

Платформа математического моделирования во временной области разнородных технических систем и объектов FMS PA10

Д.М. Жук, В.Б. Маничев, А.В. Андронов

МГТУ имени Н.Э.Баумана,

zhuk@bmstu.ru, manichev@bmstu.ru, andronov@techinspect.ru

Аннотация - Рассмотрена структура и принципы организации платформы математического моделирования разнородных (multi-discipline) технических систем и объектов во временной области (программный комплекс FMS PA10 – Framework for Mathematical Simulation, Program for Analysis, version 10), превосходящей подобные зарубежные программные продукты. Базовое внедрение FMS PA10 – это математическое моделирование и инженерный анализ во временной области систем и объектов при проектировании изделий микроэлектроники, наноэлектроники и мехатроники. Показано, что для передачи информации между основными программными модулями комплекса следует использовать форматы обмена данных PA10-XML и CSV.

Ключевые слова – Моделирование, анализ инженерных данных, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ), методы интегрирования, временная область, линейные алгебраические уравнения (ЛАУ).

I. ВВЕДЕНИЕ

Важное место при автоматизированном проектировании изделий занимают системы математического моделирования и анализа инженерных данных (CAE (Computer Aided Engineering)) [1]. В настоящее время существует множество инженерных программных комплексов, в том числе программных комплексов математического моделирования и инженерного анализа разнородных (multi-discipline) технических систем и объектов (ANSYS, NASTRAN, ABAQUS, MSC.EASY5, MATLAB-SIMULINK, Maple-MapleSim., MBTU, PA9 и др.).

CAE технологии и системы становятся всё более востребованными при разработке разнообразных изделий и объектов. Какие бы не применялись подходы, становится очевидным, что моделирование процессов и анализ (Simulation & Analysis - S&A), которые пока являются неотъемлемой частью цикла проектирования в основном в высокотехнологичных и наукоёмких отраслях, постепенно становятся таковы-

ми и в отраслях, занятых выпуском продукции массового спроса. Поэтому сегодняшнему среднестатистическому инженеру уже бывает недостаточно только известных, отличных математических пакетов программ (MATLAB, Maple, Mathcad, Mathematica и др.), а требуются специализированные CAE системы. Кроме того, миниатюризация электроники стимулирует объединение механических и электронных компонент в одном конструктиве - развивается мехатроника (Mechatronics - Mechanical and Electronics Engineering) - новая научно-техническая дисциплина, которая изучает построение электромеханических систем нового поколения, основанных на применении знаний в области механики, электроники, микропроцессорной техники, информатики и компьютерного управления движением машин и агрегатов. Создание и развитие электромеханических изделий приводит к необходимости интеграции систем механического, электротехнического и электронного проектирования, а значит — и к интеграции соответствующих CAE технологий для моделирования и инженерного анализа, т.е. интеграцию CAE систем для машиностроения (MCAE систем - Mechanical Computer Aided Engineering) с CAE системами электротехнического (Electronic Design Automation – EDA) и электронного (ECAE - Electronic CAE) моделирования и анализа.

Основная цель разработки программного комплекса FMS PA10 – это разработка платформы на персональных компьютерах для математического моделирования и инженерного анализа во временной области разнородных (multi-discipline) технических систем и объектов на базе превосходящих зарубежные аналоги (MATLAB-SIMULINK и Maple-MapleSim) надежных, высокоточных программ-решателей систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Базовое внедрение FMS PA10 – это математическое моделирование и инженерный анализ во временной области систем и объектов при проектировании изделий микроэлектроники, наноэлектроники и мехатроники.

II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЯДРО FMS-PA10

CAE системы в большинстве случаев основаны на численном решении различных математических уравнений. В частности, при компьютерном моделировании и анализе разнородных технических систем и объектов с помощью дифференциальных уравнений можно выделить два основных направления:

1. Моделирование технических систем и объектов в пространстве и времени на основе численного решения дифференциальных уравнений в частных производных, лучшие в настоящее время программные продукты – ANSYS (Ansys Inc.), MSC.NASTRAN (MSC Software Inc.) ABAQUS (Abaqus, Inc.), и другие программные комплексы.

2. Моделирование технических систем и объектов во временной области на основе численного решения систем дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), частным случаем которых являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), лучшие в настоящее время программные продукты – SPICE (Cadance Inc., Synopsys Inc., Mentor Graphics Inc.), MSC.ADAMS, MSC.EASY5 (MSC Software Inc.), MATLAB-SIMULINK (MathSoft Inc.), Maple-MapleSim (Maple Inc.), MathCAD (PTC Inc.), MBTU (МГТУ им. Н.Э. Баумана), ПА9 (МГТУ им. Н.Э. Баумана) и другие программные комплексы.

Научно-исследовательские работы по второму направлению выполняются преподавателями, аспирантами, сотрудниками и студентами кафедры РК6 (САПР) МГТУ имени Н.Э.Баумана с 1974 года. В результате мы пришли к выводу, что разработка программных комплексов моделирования по принципу черного ящика («все в одном», на одном компьютере) с возможностью решения уравнений большой и сверхбольшой размерности неправильна, т.к. не позволяет оценить точность работы математического ядра таких программ на известных математических тестах. Оказалось, что программы, решающие на обычных ПК тысячи дифференциальных уравнений, неверно решают классические уравнения Ван дер Поля, а следовательно, они не гарантируют точность решений этих тысяч уравнений. Например, компьютерное моделирование и инженерный анализ во временной области электронных схем (компаниями Intel, AMD, Motorola, Siemens, нашими компаниями, связанными с электроникой, и др.) сейчас выполняется, в основном, с помощью программы схемотехнического моделирования SPICE. Было проведено сравнение расчетного модуля программного комплекса ПА7 (наша предыдущая разработка) с расчетным модулем программы PSPICE: расчетный модуль программного комплекса ПА7 оказался численно более устойчивым [2]. При изменении параметров тестовых электронных схем программа PSPICE давала качест-

венно неправильные результаты задолго до полного отказа этой программы, не выдавая сообщений об ошибках в вычислениях, а проблема «ложных колебаний» («ginging») в неявном методе трапеций при интегрировании систем ОДУ с разрывами производных до сих пор не решена в программе SPICE [4]. Аналогичный недостаток имеет место и для математических пакетов программ MATLAB, Maple и MathCAD [3]. В программном комплексе FMS PA10 этого недостатка не будет - либо будет выдаваться численно правильный результат, либо соответствующее сообщение о невозможности получения решения для заданных пользователем математической модели и требуемой точности результатов. Программные комплексы математического моделирования следует разрабатывать по схеме, реализованной в пакетах программ MATLAB-SIMULINK и Maple-MapleSim: препроцессор -> математическое ядро -> постпроцессор, но с открытыми форматами обмена между модулями, чтобы можно было проверять точность работы математического ядра на известных тестовых задачах, а также выполнять расчеты на суперкомпьютерах, разместив там математическое ядро. Методы и алгоритмы для разработки препроцессора (PA10-Input) для FMS PA10 были рассмотрены в работе [4].

Математическое ядро для FMS PA10 реализуется на основе библиотеки Math-Solvers-PSC математических программ-решателей на языке Си для решения систем ДАУ-ОДУ и систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с гарантированной математической, компьютерной, машинной точностью. При решении систем ДАУ-ОДУ следует выделить два типа ошибок - качественные и количественные. Программисты основное внимание уделяют получению гарантированной математической, локальной точности, хотя главное, конечно, это получение качественно корректного численного решения. Качественно правильные результаты можно обеспечить путем использования AL устойчивых методов интегрирования ОДУ (методов, абсолютно (A-) устойчивых строго в левой (Left) полуплоскости области устойчивости методов интегрирования), которые являются устойчивыми для устойчивых систем ОДУ и являются неустойчивыми для неустойчивых систем ОДУ. AL-устойчивые методы 2-го и 4-го порядков точности были реализованы в программе DMAN [5] (номер государственной регистрации в Роспатенте: 2009612666 от 27 мая 2009). Программная реализация AL-устойчивых методов интегрирования, в конечном итоге, сводится к многократному решению соответствующих СЛАУ на каждом шаге численного интегрирования, что, как правило, приводит к нескольким тысячам и более обращений к программе-решателю СЛАУ на всем заданном отрезке численного интегрирования. Решение большого количества тестовых и

практических задач моделирования технических систем и объектов во временной области с помощью программы DMAN показало, что для получения качественно корректного решения разнообразных систем ОДУ необходимо на всех шагах численного интегрирования обеспечить решение соответствующих тысяч разнообразных СЛАУ с гарантированной точностью в 15 верных значащих цифр для всех неизвестных этих СЛАУ (с точностью выполнения простых арифметических операций для стандартного типа double представления вещественных чисел алгоритмического языка Си, на котором предполагается разрабатывать математическое ядро для FMS PA10). Покажем, что даже в отличных, общепризнанных математических пакетах программ MATLAB, Maple, Mathcad, Mathematica (все расчеты были выполнены на 32-разрядных версиях этих пакетов программ 2007 года выпуска) эта проблема для соответствующих решателей СЛАУ не решена. Рассмотрим тестовую задачу Уилкинсона [6]:

$$\begin{bmatrix} 0,780 & 0,563 \\ 0,913 & 0,659 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.217 \\ 0.254 \end{bmatrix}$$

Нетрудно видеть, что абсолютно точное решение этой задачи: $x_1=1, x_2=-1$.

В пакете MATLAB рекомендуется определять число обусловленности $\text{cond}(A)$ матрицы A коэффициентов СЛАУ с помощью функции $\text{cond}(A)$, чтобы оценить гарантированную точность решений, но конкретных рекомендаций не дается. Попытаемся решить эту задачу и зададим параметр получаемых верных значащих цифр - 15. Описание тестовой задачи Уилкинсона в пакете MATLAB будет таким:

```
format('long')
digits(15)
A=[0.78 0.563;0.913 0.659]
cond(A)
B=[0.217;0.254]
x=vpa(A\B)
```

Результат решения тестовой задачи Уилкинсона в пакете MATLAB:

```
x =
.999999999982476
-.999999999975684
```

Результат решения тестовой задачи Уилкинсона в пакете Maple:

```
>LinearSolve(A,B);
0.999999999901257661
-0.999999999986319910
```

Результат решения тестовой задачи Уилкинсона в пакете Mathcad:

```
x:=lsolve(A,B)
0.99999999998902543
-0.9999999999847955
```

Результат решения тестовой задачи Уилкинсона в пакете Mathematica:

```
SetPrecision[LinearSolve[{{0.78000000000000,0.56300000000000},{0.91300000000000,0.65900000000000}},{0.21700000000000,0.25400000000000}],15]
{0.9999999999890426,-0.9999999999848763}
```

Таким образом, для тестовой задачи Уилкинсона при выборе решателей СЛАУ, рекомендуемых в рассмотренных пакетах по умолчанию, не обеспечивается требуемая точность в 15 верных значащих цифр для всех неизвестных СЛАУ.

Из описаний решателей СЛАУ для наиболее известных математических библиотек стандартных программ на языке Си: IMSL, NAG, Intel MKL, BLAS, LAPACK, CUBLAS, MAGMA и др. следует, что они также не гарантируют обеспечения требуемой точности в 15 верных значащих цифр для всех неизвестных решаемых СЛАУ, если $\text{cond}(A) > 1$ или диагональные элементы матрицы коэффициентов не преобладают по абсолютной величине по сравнению с недиагональными элементами. Итерационные численные методы решения СЛАУ не решают эту проблему, т.к. не могут гарантировать для плохообусловленных СЛАУ указанную выше математическую, компьютерную, машинную точность получаемых решений. Нам удалось решить эту проблему с помощью точных, прямых численных методов решения СЛАУ и методов получения сверхточных (extra precision) решений, реализованных, в математических пакетах программ Maple (метод Software Floating Point), MATLAB (метод Variable Precision Arithmetic), Mathematica (метод Arbitrary Precision Arithmetic) и др. [6].

Численные эксперименты при разработке методов и алгоритмов, реализованных в программах библиотеки Math-Solvers-PSC, выполнялись на универсальном суперкомпьютере СКИФ-МГУ («Чебышев») и на персональном суперкомпьютере на базе процессоров Intel+процессоров технологии NVIDIA® CUDA™. В результате были разработаны программы, которые позволили на обычном персональном компьютере получить указанную выше точность решения СЛАУ [6]:

```
Wilkinson task, cond(A)=2e6, n= 2, matrix A:
i=1 j=1 ,Aij= 0.780000000000000
i=2 j=1 ,Aij= 0.913000000000000
i=1 j=2 ,Aij= 0.563000000000000
i=2 j=2 ,Aij= 0.659000000000000
vector B:
i=1 Bi= 0.217000000000000
i=2 Bi= 0.254000000000000
vector X:
i=1 Xi= 1.000000000000000
```

$$i=2 \quad X_i = -1.0000000000000000$$

III. СТРУКТУРА FMS PA10 И ВЫБОР ФОРМАТОВ ОБМЕНА ДАННЫМИ МЕЖДУ ПРОГРАММНЫМИ МОДУЛЯМИ КОМПЛЕКСА

Программный комплекс FMS PA10 будет состоять из трех основных программных модулей с открытыми форматами обмена между модулями:

1. Математическое ядро PA10-Solver на основе библиотеки Math-Solvers-PSC [6]. Math-Solvers-PSC (Mathematical Solvers in algorithmic language C for solution of Sets of Linear Algebraic Equations and Sets of Ordinary Differential Equations with guaranteed precision, best performance will be resulted on Personal Super Computers) – это математическая библиотека программ-решателей на алгоритмическом языке Си для решения СЛАУ и систем ОДУ с гарантированной математической, компьютерной, машинной точностью. Решение СЛАУ гарантируется получать с точностью в 15 верных значащих цифр для всех неизвестных решаемой СЛАУ, решение систем ОДУ гарантируется с задаваемой относительной точностью не менее 0.001 (точность по умолчанию) для всех переменных решаемой системы ОДУ. Математическое ядро будет выполнять функции сервера по приему и обработке данных. Выходные данные будут выдаваться по запросу модуля вывода.

2. Программный модуль подготовки исходных данных (препроцессор): PA10-Input, реализованный на персональных компьютерах с использованием программных технологий Java, .NET, C++.

3. Программный модуль обработки и визуализации результатов (постпроцессор): PA10-Output, реализованный на графических станциях с использованием программных технологий C++, OpenCL, OpenGL, DirectX.

Программные модули будут представлять собой независимые приложения, которые могут размещаться как на одном компьютере, так и в распределенной среде [7].

Обмен данными между PA10-Input и математическим ядром должен обеспечивать возможность описания дифференциальных уравнений в однозначно интерпретируемой форме. Пользователь вводит в PA10-Input схемную модель на входном графическом языке PA10-Input, сопровождая ее числовыми данными. На выходе будут формироваться аналитические описания систем ОДУ, числовые данные и блоки подпрограмм для представления некоторых функций. Для обмена данными рассматривались два варианта описания: языки MathML и MATLAB. Установлено, что форматы языков MathML и MATLAB не могут использоваться для обмена данными в исходном виде. В то же время, представление на основе языка

XML и использование отдельных тегов MathML позволит полностью решить вопрос обмена данными между PA10-Input и математическим ядром. На основе XML будет разработан свой открытый текстовый формат обмена, который будет называться PA10-XML. Входной схемный язык PA10-Input должен включать в себя как подмножества следующие графические языки: PA9, SIMULINK, MapleSim, Easy5, MBTU и др., а язык PA10-XML должен включать в себя как минимум язык VHDL.

Обмен данными между ядром и PA10-Output должен обеспечивать однозначность выдаваемых результатов. В результате анализа возможных вариантов для обмена данными был выбран текстовый формат CSV (comma-separated value, разделяемые запятыми численные значения). Формат CSV позволяет представлять числа любой точности в виде текста с гарантией того, что они будут однозначно интерпретированы на любом компьютере. Представление в виде текста дает ряд преимуществ: он может импортироваться в MS Excel для проведения нестандартных расчетов; с ним можно работать «вручную»; его можно загрузить в независимую программу визуализации в виде массива точек; для передачи через Интернет CSV данные можно инкапсулировать в любой транспортный протокол, например, вложить в электронное письмо.

На рис. 1. показана схема обмена данными между программными модулями FMS PA10. Форматы обмена будут зафиксированы в виде открытых стандартов программного комплекса и на их основе могут быть созданы сторонние приложения, реализующие дополнительный функционал FMS PA10.

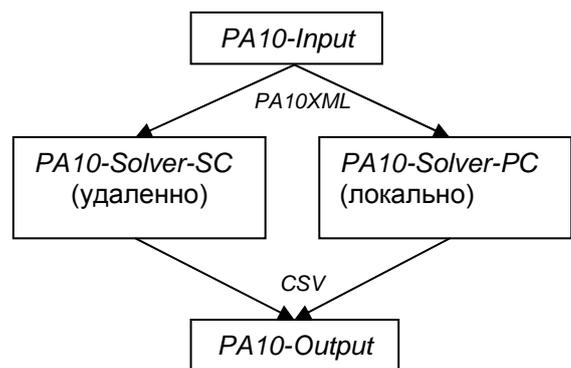


Рис. 1. Схема взаимодействия программных модулей FMS PA10 (SC - Super Computer, PC - Personal Computer)

IV. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ FMS PA10 СОВМЕСТНО С СИСТЕМАМИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Как правило, исходные модели, для которых требуется проводить математическое моделирование и инженерный анализ, существуют в формате CAD систем, именно там разрабатываются и изменяются. Модуль PA10-Input будет использоваться для ввода схемной модели, полученной на основе соответствующей CAD модели. После импорта схемная модель должна быть дополнена вручную, поскольку CAD модель не содержит всех требуемых исходных данных для математического моделирования и инженерного анализа.

Схемная модель, как правило, будет построена вручную, без использования средств автоматизации. Это удобно при рассмотрении отдельных новых элементов изделий или проверке нестандартных решений.

Обработка схемной модели производится отдельно от CAD модели: все вводимые данные хранятся только в рамках FMS PA10. Это позволит отлаживать модель и проводить различные расчеты без необходимости эксклюзивной блокировки основной CAD модели.

Результаты работы модуля PA10-Input будут передаваться ядру системы для расчета в формате PA10-XML.

Модуль PA10-Output будет состоять из нескольких компонентов, в зависимости от используемых CAD систем. Этот модуль будет получать от сервера результаты расчета в формате CSV, поддерживать функции экспорта в различные CAD системы, вывода табличных данных и построения графических зависимостей. Для визуализации расчетов (анимация и т.п.) будут задействованы дополнительные модули, разрабатываемые для соответствующих CAD систем. Модуль PA10-Output будет загружаться стандартными средствами соответствующей CAD системы и работать с исходной CAD моделью.

Таким образом, при работе с существующей CAD моделью появляются дополнительные документы – схемная модель в формате PA10-Input и математическая модель в формате PA10-XML.

V. СРАВНЕНИЕ ПРОГРАММЫ DMAN С РЕШАТЕЛЯМИ ОДУ В ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ MATHCAD, MATLAB И MAPLE

В таблице 1 приведены результаты сравнения только наиболее трудных для современных решателей ОДУ жестких систем ОДУ с многопериодным решением (общезвестные тесты [8]-[11] для сравниваемых решателей ОДУ были решены верно).

В таблице 1 сравнивались только методы интегрирования соответствующих решателей ОДУ, рекомендуемые в соответствующих математических программных комплексах для решения жестких систем ОДУ. Знак минус означает невозможность получения решения или (в большинстве случаев) качественно неверный результат без всякого предупреждения о возможных ошибках. При значительном увеличении жесткости и значений коэффициентов тестовых систем из таблицы 1 решатели систем ОДУ программных комплексов Mathcad, MATLAB и Maple дают неверный результат, как правило, без всякого сообщения об ошибке, при этом программа DMAN дает правильное решение вплоть до максимально допустимой машинной точности. Ниже приведено краткое описание данных трудных тестов:

ТЕСТ 1 Жесткая система ОДУ 2-го порядка (MU – параметр жесткости) – тест Ван дер Поля [8]. Сравнение программ было проведено для часто встречающихся на практике значений жесткости $MU=10^6$ и $MU=10^9$.

ТЕСТ 2 Линейная система ОДУ 5-го порядка для моделирования электронной схемы с многопериодным решением – тест Маничева [2]. Сравнение программ было приведено для часто встречающихся на практике параметров масштабных коэффициентов по времени, току и напряжению: $kt=1$, $ki=1$, $ku=10^{-2}$, а также для значений параметров $kt=10^{-104}$, $ki=1$, $ku=1$, которые дают трудный тест для современных решателей ОДУ.

ТЕСТ 3 Нелинейная жесткая система ОДУ, имеющая локально-неустойчивое решение – тест Скворцова [12]. Сравнение программ было проведено для часто встречающегося на практике значения жесткости $MU=10^6$.

ТЕСТ 4 Нелинейная система ОДУ с многопериодным решением для моделирования процессов реального лазера – тест Евстифеева [13]. Сравнение решателей ОДУ было проведено для параметров реального работающего лазера.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные преимущества программного комплекса FMS PA10 по сравнению с подобными программными продуктами:

1. Гарантированная точность и адекватность результатов математического моделирования, выдаваемых пользователям. В случае невозможности точного и адекватного решения какой-либо задачи на персональном компьютере будет предложено решить эту задачу на универсальном или персональном суперкомпьютере.

2. Возможность моделирования систем и объектов с плохо обусловленными математическими моде-

Сравнение программы DMAN с решателями ОДУ программных комплексов MATLAB, Maple, Mathcad

Тесты	Решатели ОДУ			
	DMAN	MATLAB	Maple	Mathcad
ТЕСТ 1. Уравнения Ван дер Поля с $MU=10^6$	+	+	-	+
ТЕСТ 1. Уравнения Ван дер Поля с $MU=10^9$	+	-	-	-
ТЕСТ 2. Высокодобротный фильтр $kt=1, ki=1, ku=0.01$	+	-	+	-
ТЕСТ 2. Высокодобротный фильтр $kt=10^{-104}, ku=1, ki=1$	+	-	-	-
ТЕСТ 3. Локально-неустойчивая система ОДУ $MU=10^6$	+	-	-	+
ТЕСТ 4. Моделирование свечения лазера	+	+	-	+

лями (с жесткими и сверхжесткими системами ОДУ, с многопериодным характером протекающих процессов).

3. Открытые форматы обмена данными между основными компонентами программного комплекса FMS PA10 позволят пользователям расширять функциональность комплекса за счет разработки собственных библиотек математических моделей технических систем и объектов.

Новые научные результаты предполагается получить в направлениях развития новых методов и алгоритмов моделирования и анализа разнородных технических систем и объектов. Для гарантии правильности получаемых решений будет предусмотрена дополнительная возможность выполнения расчетов на универсальном и на персональном суперкомпьютерах.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов А.В. Конечная цель автоматизации для небольших предприятий // CAD/CAM/CAE Observer. 2008. №5(41).
- [2] Маничев В.Б. Новые алгоритмы для программ анализа динамики технических систем // Вестник МГТУ, сер. Приборостроение. 1996. Вып. 1. С. 48-56.
- [3] Маничев В.Б. Метод тестирования программ, реализующих неявные методы интегрирования ОДУ // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики», Самарский-2009. М.: МГУ имени Ломоносова, июнь 2009. С. 76.
- [4] Жук Д.М., Маничев В.Б., Папсуев А.Ю. Обобщенный метод моделирования динамики технических систем // Информационные технологии. 2004. №8. С. 6-14.
- [5] Жук Д.М., Маничев В.Б. Программа DMAN для решения дифференциально-алгебраических уравнений, номер государственной регистрации 2009612666 от 27 мая 2009.
- [6] Андронов А.В., Жук Д.М., Кожевников Д.Ю., Маничев В.Б. Библиотека математических программ-решателей на языке Си: Math-Solvers-PSC. <http://pa10.ru>.
- [7] Андронов А.В. Сравнение подходов к проектированию программных систем // Сборник научных докладов МНТК «Научные технологии и интеллектуальные системы 2004». М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2004.
- [8] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1990.
- [9] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 2001.
- [10] Mazzia F., Magherini C., Iavernaro F. Test set for initial value problem solvers. <http://pitagora.dm.uniba.it/~testset>.
- [11] The code BiMD for solving initial value problems. <http://web.math.unifi.it/users/brugnano/BiM/>.
- [12] Скворцов Л.М. Явный многошаговый метод численного решения жестких дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 6. С. 959-967.
- [13] Системы автоматизированного проектирования. Учеб. пособие для вузов: в 9 кн., кн. 8 // Под ред. И.П.Норенкова. М.: Высшая школа, 1986.