

# Гибридные методы анализа электронных цепей во временной области

В.Н. Бирюков, А.М. Пилипенко

Технологический институт Южного федерального университета в г. Таганроге,  
pilipenko-am@mail.ru

**Аннотация** — Рассмотрены гибридные  $A$ -,  $L$ - и  $P$ -устойчивые неявные методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, построенные на основе известных разностных схем. Проведен сравнительный анализ канонических одношаговых и предлагаемых гибридных методов, который подтверждает высокую эффективность последних для анализа во временной области жестких и колебательных цепей.

**Ключевые слова** — Высокооборотные цепи, жесткие системы, неявные методы Рунге-Кутты,  $A$ -устойчивость,  $L$ -устойчивость,  $P$ -устойчивость.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Разрабатываемые в последние десятилетия новые эффективные методы численного решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) до сих пор не нашли широкого применения в электронных симуляторах. Ситуация объясняется рядом обстоятельств, главными из которых являются два. Во-первых, применяемые в симуляторах *SPICE*-типа многошаговые методы, использующие формулы дифференцирования назад, обладают минимальной для своего порядка точности вычислительной сложностью. Во-вторых, для анализа высокооборотных цепей приходится использовать метод трапеций 2-го порядка, поскольку методы более высокого порядка более эффективны только для осциллирующих задач, а реальные цепи, как правило, являются осциллирующими и жесткими одновременно. В работе [1] показано, что для анализа во временной области жестких цепей перспективным может считаться двухстадийный  $L2$ -устойчивый полностью неявный метод Рунге-Кутты, а для анализа высокооборотных –  $P$ -устойчивый метод 4-го порядка, в то же время в [2] утверждается, что использование известных методов высоких порядков для анализа реальных цепей в общем случае малоэффективно.

Одним из направлений развития численного решения СОДУ является разработка  $A$ -устойчивых многошаговых методов порядка выше 2-го [3], [4], другим – композитных методов, объединяющих свойства одношаговых и многошаговых методов [5], [6], третьим – разработка нелинейных гибридных разностных схем [7], [8]. Данная работа посвящена третьему направлению, сочетающему оптимальным образом вычисли-

тельную сложность,  $A$ -,  $L$ - и  $P$ -устойчивость двух различных методов.

## II. МЕТОД ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Принцип синтеза гибридного метода удобнее всего рассматривать для простейшего случая – объединения неявных методов Эйлера и трапеций. Если шаг численного решения разбить на два частичных, осуществляемых указанными методами, то результирующий метод будет обладать таким же порядком точности и  $L$ -устойчивостью, как и метод Эйлера. Поскольку постоянная асимптотической погрешности при такой комбинации уменьшается быстрее, чем при использовании метода Эйлера на обоих частичных шагах, то такой комбинированный метод оказывается более эффективным, чем метод Эйлера. Попытки его практического использования, однако, объясняются не этим обстоятельством, а тем, что метод оказывается экспоненциально-подогнанным (точным для какого-то определенного собственного значения  $\lambda$ ), вследствие чего его эффективность резко растет при анализе *слабо-жестких* СОДУ. Разностная схема простейшего экспоненциально-подогнанного метода может быть представлена в виде [9]:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2} [(1+\alpha)\mathbf{f}_{n+1} + (1-\alpha)\mathbf{f}_n], \quad (1)$$

где  $\alpha$  – весовой коэффициент ( $0 \leq \alpha \leq 1$ );  $h$  – шаг интегрирования;  $n$  – целое неотрицательное число;  $\mathbf{x}_{n+1}$  и  $\mathbf{x}_n$  – приближенные значения решения СОДУ в моменты времени  $t_{n+1} = t_n + h$  и  $t_n$  соответственно;  $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n+1}, t_{n+1})$ ;  $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, t_n)$ .

В уравнениях математической физики встречаются задачи, в которых физическое свойство жесткости наблюдается не во времени, а в пространстве (т. н. разрывные решения). Разностные схемы, корректно описывающие разрывные решения, обладают намного большей сложностью, чем схемы для монотонного решения. Для сохранения приемлемой вычислительной сложности в этом случае используют гибридные методы, в которых при превышении какого-то свойства решения (обычно третьей производной по пространству) происходит переключение с простой раз-

ностной схемы на более сложную, но точную [10]. По-видимому, такой подход может оказаться осуществимым и при решении СОДУ, однако, только при *постоянном* шаге во времени. Алгоритм Гира, используемый практически во всех электронных симуляторах, предусматривает изменение порядка точности формул дифференцирования назад или шага при решении СОДУ. В работе [7] был предложен иной подход, основанный именно на использовании *переменного* шага.

Если при использовании метода экспоненциальной подгонки необходимо получить повышенную точность, то вместе с очевидным уменьшением шага можно так подобрать константу, определяющую соотношение между частичными шагами, чтобы результирующая разностная схема была бы близка к методу трапеций (т. е.  $\alpha \rightarrow 0$ ). В случае же необходимости исследования общего характера решения на значительном интервале времени необходимо использовать не только большой шаг, но и наиболее устойчивый метод – в данном случае близкий к неявному методу Эйлера (т. е.  $\alpha \rightarrow 1$ ). Если упомянутую константу сделать функцией шага, то оба требования оказываются удовлетворенными.

Представим весовой коэффициент в (1) в виде возрастающей от 0 до 1 рациональной функции шага

$$\alpha = \alpha_m^*(h) = 1 - [1 - (h/h_{\max})]^m,$$

где  $h_{\max}$  – максимальный шаг интегрирования (в существующих программах решения СОДУ максимальный шаг выбирается меньше интервала наблюдения в 20... 50 раз);  $m = 1, 2, 3, \dots$

На рис. 1 показаны зависимости от шага локальной (шаговой) погрешности  $\varepsilon = |x_{n+1} - x(h)|$  для различных методов при решении задачи

$$dx/dt = -x, \quad t \in [0, T], \quad x(0) = 1. \quad (2)$$

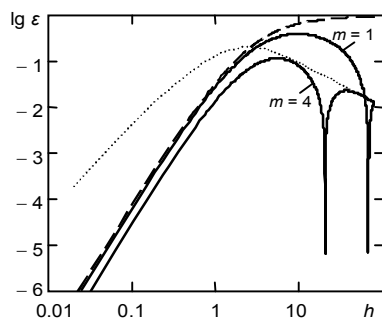


Рис. 1. Зависимости локальной погрешности от шага интегрирования. Штриховая кривая – для метода трапеций, пунктирная – для метода Эйлера, сплошные кривые – для метода (1)

Из рис. 1 следует, что с ростом  $m$  устойчивость метода (1) растет. В общем случае значение  $m$  определяется жесткостью решаемой задачи и его оптимальное

значение приближенно равно порядку отношения максимальной и минимальной постоянной времени цепи. Поскольку априорно жесткость задачи неизвестна, то можно считать с запасом  $m = 5$ .

На рис. 2 приведены зависимости от шага глобальной (интервальной) погрешности  $\bar{\varepsilon} = |x_N - x(t_N)|$  для тех же методов, что и на рис. 1. Глобальная погрешность рассчитывалась при решении задачи (2) для момента времени  $t_N = T = 2^{16}$ .

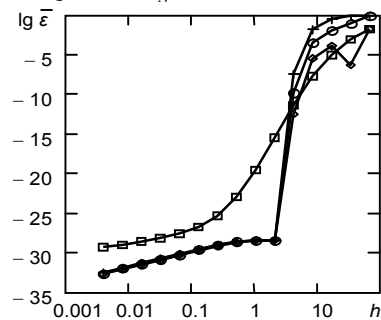


Рис. 2. Зависимости глобальной погрешности от шага интегрирования. Знаком + отмечена зависимость для метода трапеций, □ – для метода Эйлера, ○ – для метода (1) при  $m = 1$ , ◇ – для метода (1) при  $m = 2$

Из рис. 1 и 2 следует, что гибридный метод одновременно сохраняет  $L$ -устойчивость неявного метода Эйлера и 2-й порядок точности метода трапеций, а выбор весовой функции  $\alpha_m^*(h)$  не критичен. Нетрудно показать, что гибридный метод  $A$ -устойчив и пригоден для анализа и неавтономных задач.

### III. МЕТОД ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Гибридные методы можно синтезировать на основе методов более высокого порядка. Большой интерес в этом случае представляют симметричные разностные схемы, позволяющие получить максимальный порядок точности для данного числа стадий. В качестве устойчивого метода для синтеза можно выбрать любой  $L$ -устойчивый метод до 3-го порядка включительно. Для цепей повышенной жесткости необходимы  $L2$ -устойчивые методы [12], поэтому далее рассматривается разностная схема гибридного метода, комбинирующего схемы двухстадийных  $A$ -устойчивых неявных методов Рунге-Кутты – полностью неявного метода 2-го порядка и симметричного метода 4-го порядка (методы (26) и (30) из [13]):

$$\begin{aligned} x_{n+\alpha} &= x_n + \alpha h \mathbf{f} \left( x_{n+\alpha} - \frac{\alpha h}{2} \mathbf{f}_{n+\alpha}, t_n + \frac{\alpha h}{2} \right), \\ x_{n+1} &= x_{n+\alpha} + \frac{(1-\alpha)h}{6} \left\{ \mathbf{f}_{n+1} + \mathbf{f}_{n+\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + 2\mathbf{f} \left[ x_{n+1} + x_{n+\alpha} - \frac{(1-\alpha)h}{4} (\mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{f}_{n+\alpha}), t_n + \frac{(1+\alpha)h}{2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x_{n+\alpha}$  – приближенное значение решения СОДУ в момент времени  $t_n + \alpha h$ ,  $f_{n+\alpha} = f(x_{n+\alpha}, t_n + \alpha h)$ .

Зависимость локальной (рис. 3) и глобальной (рис. 4) погрешностей метода (3) от шага для задачи (2) показывает, что метод еще менее критичен к выбору весовой функции, чем (1). Как и метод (1), метод (3) не только сохраняет асимптотическую устойчивость наиболее устойчивого из вложенных методов, но для слабо-жестких задач оказывается еще более устойчивым.

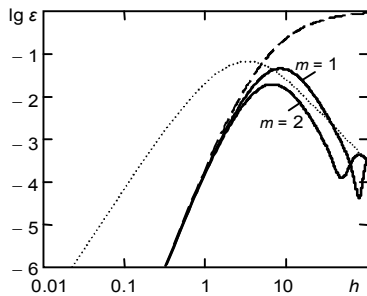


Рис. 3. Зависимости локальной погрешности от шага интегрирования. Пунктирная и штриховая кривые – для методов Рунге-Кутты – полностью неявного метода 2-го порядка и симметричного метода 4-го порядка соответственно, сплошные кривые – для метода (3)

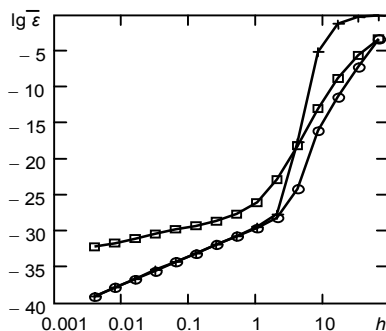


Рис. 4. Зависимости глобальной погрешности от шага интегрирования. Знаком + отмечена зависимость для симметричного метода Рунге-Кутты 4-го порядка, □ – для полностью неявного метода Рунге-Кутты 2-го порядка, ○ – для метода (3) при  $m = 1$

Граница области устойчивости метода (3) со снижением  $\alpha$  быстро приближается к мнимой оси, поэтому  $P$ -устойчивость [14] метода (3) оказывается близкой к  $P$ -устойчивости вложенного метода 4-го порядка.

Арифметическая (вычислительная) сложность метода (3) вдвое превосходит соответствующую сложность вложенных методов. Она может быть существенно снижена при выборе в качестве метода 2-го порядка  $L1$ -устойчивого диагонально-неявного метода, например TR-BDF2 [5], используемого в программе компьютерной математики MATLAB. Конечно, в этом случае для особо жестких задач выигрыш вследствие потери  $L2$ -устойчивости будет минимальным. Метод TR-BDF2 не обладает  $P$ -устойчивостью, по-

этому более выгодным является использование на первом частичном шаге метода TR-BDF2-3-4 [6].

Задача (2) позволяет исследовать асимптотическую точность и  $L$ -устойчивость методов численного решения ОДУ. Для анализа радиотехнических цепей не менее важным свойством метода является его  $P$ -устойчивость, т. е. устойчивость решения задачи анализа  $RLC$ -контура:

$$du/dt = i/C; di/dt = -u/L - Ri/L, u(0) = U_0, i(0) = 0,$$

решением которой, при принятом в [14] коэффициенте затухания равном нулю, является гармоническая функция.

Следует отметить, что для практики более интересно решение в виде не гармонической, а квазигармонической функции с малым коэффициентом затухания. На рис. 5 и рис. 6 приведены графики текущей погрешности  $\varepsilon(t_n) = |x_n - x(t_n)|$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  трех методов: трапеций (штриховые линии), Гира (пунктирные линии) и метода (3) при  $m = 1$  (сплошные линии). Для метода Гира использовались стандартные установки точности ( $REL TOL = 10^{-6}$ ). В качестве тестовой задачи был выбран расчет переходной характеристики последовательного  $RLC$  колебательного контура при низком и высоком значении его добротности ( $Q = 10$  и  $Q = 100$ ).

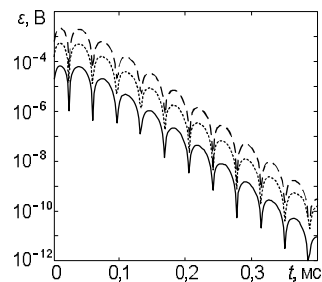


Рис. 5. Текущие погрешности анализа  $RLC$ -контура ( $Q = 10$ ). Штриховая кривая – для метода трапеций, пунктирная – для метода Гира, сплошные кривые – для метода (3) при  $m = 1$

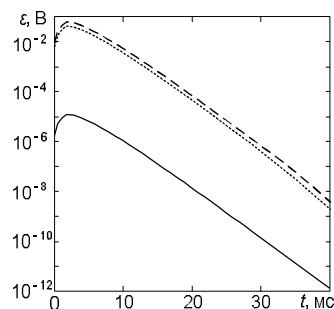


Рис. 6. Верхняя граница текущих погрешностей анализа  $RLC$ -контура ( $Q = 100$ ). Штриховая кривая – для метода трапеций, пунктирная – для метода Гира, сплошные кривые – для метода (3) при  $m = 1$

Из последних графиков следует, что при анализе низкодобротных колебательных систем метод (3) в

силу более высокой вычислительной сложности обладает соизмеримым с методами Гира и трапеций соотношением точности к сложности, но при анализе высокодобротных колебательных систем оказывается более эффективным. Следует отметить, что метод Гира обладает более низкой  $L$ -устойчивостью, чем одношаговые методы [12].

В работах, посвященных анализу колебательных систем в частотной области, основным недостатком анализа во временной области называется необходимость расчета слишком большого (до  $10^6$ ) числа периодов колебания, то есть недопустимо большое время решения СОДУ [15]. В связи с этим следует отметить, что ограничение допустимого интервала наблюдения происходит, в основном, не вследствие нехватки времени или оперативной памяти, а вследствие накопления погрешности округления, поскольку при использовании методов 2-го порядка для достижения приемлемой точности шаг решения приходится выбирать, по крайней мере, в 200 раз меньше периода колебания. Повышение точности результатов анализа во временной области позволяет уменьшить не менее чем на порядок общее число шагов. Даже в том случае, если время анализа вследствие увеличения сложности метода не уменьшается, то использование более точного метода остается предпочтительным вследствие снижения влияния ошибки округления. Кроме того, существующая практика не ограничивается узкополосными цепями, для которых методы анализа в частотной области становятся эффективными.

В заключение отметим, что кроме рассмотренных методов известен только один метод 2-го порядка точности, сочетающий одновременно в какой-то степени  $A$ -,  $L$ - и  $P$ -устойчивость [16].

#### IV. Выводы

Предложен  $A$ - и  $L$ -устойчивый метод решения СОДУ основанный на применении на последовательных частичных шагах двух вложенных методов: одного  $L$ -устойчивого низкого порядка, определяющего  $L$ -устойчивость гибридного метода, другого более высокого порядка, не обладающего такой устойчивостью, определяющего порядок точности гибридного метода. В каждом методе используется свой шаг, соотношение между частичными шагами функционально связано с общим шагом. Вычислительный эксперимент показал, что точность решения быстроосциллирующих задач гибридным методом также близка к точности более точного и  $P$ -устойчивого вложенного метода.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Maffezzoni P., Codecasa L., D'Amore D. Time-Domain simulation of Nonlinear Circuits Through Implicit Runge-Kutta methods // IEEE Trans. Circuits and Systems. – 2007. – V. 54. - № 2. - P. 391 – 400.
- [2] Жук Д.М., Маничев В.Б., Ильницкий А.О. Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования динамики технических систем и объектов // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2008. Сб. научных трудов / Под ред. А. Л. Стемпковского. – М.: ИППМ РАН, 2008. – С. 109 – 113.
- [3] Булатов М. В. Построение неклассических многошаговых схем для линейных ОДУ // Доклады академии наук. – 2005. – Т. 404. – № 1. – С. 11 – 13.
- [4] Skeel R.D., Kong A.R. Blended linear multistep methods // ACM TOMS. – 1977. – V. 3. – P. 326 – 343.
- [5] M.E. Hosea, L.F. Shampine. Analysis and implementation of TR-BDF2 // Appl. Numer. Math. – 1996. – V. 20. – №. 1-3. – P. 21 – 37.
- [6] Бирюков В.Н. Использование формул дифференцирования назад в одношаговом методе второго порядка точности // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21 - № 10. – С. 107 – 110.
- [7] Бирюков В.Н., Пилипенко А.М. Численный анализ жестких узкополосных систем // Радиосистемы: Радиоэлектронные устройства и системы управления, локация и связи. – 2002. - № 54. – С. 36 – 41.
- [8] Бирюков В.Н. Алгоритм решения обыкновенных дифференциальных уравнений, комбинирующий  $A$ - и  $L$ -устойчивые методы различных порядков точности // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2008. - № 6. – С. 36 – 38.
- [9] Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 312 с.
- [10] Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во МФТИ, 1994. – 528 с.
- [11] Пилипенко А.М. Модификация метода трапеций для анализа жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений // VI Всероссийская научная конференция студентов и аспирантов «Техническая кибернетика, радиоэлектроника и системы управления». Тезисы докладов. – Таганрог: ТРТУ, 2002. – С. 7 – 8.
- [12] Калиткин Н.Н. Численные методы решения жестких систем // Математическое моделирование. – 1995. – Т. 7. - № 5. – С. 5 – 11.
- [13] Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноуцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
- [14] Petzold L.R., Jay L.O., Yen J. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations // Acta Numerica. – 1997. – P. 437– 483.
- [15] Глебов А.Л., Гурарий М.М., Жаров М.М., Егоров Ю.Б., Русаков С. Г., Стемпковский А.Л., Ульянов С.Л. Актуальные проблемы моделирования в системах автоматизации схемотехнического проектирования / Отв. ред. А.Л. Стемпковский. – М.: Наука, 2003. – 430 с.
- [16] Бирюков В. Н., Полстяной А. М. Применение итераций Зейделя для решения неявных разностных схем обыкновенных дифференциальных уравнений в программах анализа электронных цепей // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 1997. – Т. 40. - №11. – С. 77 – 80.