

# Декомпозиция булевых функций, заданных диаграммой двоичного выбора

П.Н. Бибило, П.В. Леончик

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

bibilo@newman.bas-net.by

**Аннотация** — Предлагается метод декомпозиции системы полностью определенных булевых функций по двухблочному разбиению множества аргументов и алгоритм выбора разбиения аргументов для системы функций, заданной диаграммой двоичного выбора. Приводятся результаты экспериментальных исследований программ, показывающие эффективность процедур декомпозиции при синтезе логических схем.

**Ключевые слова** — Булевы функции, декомпозиция, диаграмма двоичного выбора, библиотека логических элементов.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Эффективность решения задач синтеза комбинационных логических схем в значительной степени зависит от формы представления булевых функций, которые требуется реализовать логической схемой. В качестве исходных форм представления булевых функций (и их систем) в практике проектирования используются как двухуровневые представления – системы дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ) и таблицы истинности, представленные троичными и булевыми матрицами, так и многоуровневые представления – алгебраические скобочные формы и диаграммы двоичного выбора (*binary decision diagram - BDD*). Различные методы синтеза схем ориентируются на различные формы исходного представления функций. Наибольшее развитие в настоящее время получили методы, оперирующие с алгебраическими представлениями функций и предназначенные для синтеза схем в заданной библиотеке проектирования заказных схем, и декомпозиционные методы, развитые для синтеза сетей программируемых логических матриц (ПЛИМ) [1] и структур FPGA [2]. Структура ПЛИМ адекватна структуре реализуемой на ПЛИМ системы ДНФ булевых функций, поэтому в литературе большое внимание было уделено решению задач декомпозиции систем ДНФ. Представления функций в виде BDD широко изучались в литературе [3], особенно при синтезе структур FPGA. В литературе [4] рассматривались простые случаи декомпозиции булевой функ-

ции по представлению ее в виде BDD: декомпозиция с фиксированной выходной функцией (двухместными дизъюнкцией, конъюнкцией, суммой по модулю 2) и простая декомпозиция, т.е. декомпозиция с одной промежуточной переменной.

В данной работе исходное представление функций в виде BDD используется для решения задачи декомпозиции системы полностью определенных булевых функций и несколькими промежуточными переменными. Особенностью предлагаемого метода является то, что один из двух блоков разложения остается заданным в виде BDD, а функции другого блока разложения строятся заданными в виде ДНФ. Поэтому схема может быть реализована в смешанном базисе – один из блоков легко реализуется на ПЛИМ, а другой может быть реализован в заданной библиотеке логических элементов. Предлагается алгоритм выбора двухблочного разбиения множества аргументов, по которому проводится декомпозиция, и приводятся результаты экспериментов по реализации функций разложения схемами в библиотеке проектирования заказных СБИС.

## II. ДИАГРАММА ДВОИЧНОГО ВЫБОРА ДЛЯ СИСТЕМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

BDD строятся на основе разложения Шеннона. *Разложением Шеннона* полностью определенной булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  по переменной  $x_i$  называется представление  $f(x_1, \dots, x_n)$  в виде

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_i f_1 \vee \overline{x_i} f_0. \quad (1)$$

Функции  $f_1, f_0$  в (1) называются *коэффициентами* разложения. Они получаются из функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  подстановкой вместо переменной  $x_i$  константы 1 и 0 соответственно. Видно, что если коэффициенты разложения Шеннона равны, то

$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Переменная  $x_i$  называется в этом случае *несущественной* или *фиктивной* переменной полностью определенной функции  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Каждый из коэффициентов  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$  может быть разложен по одной из переменных из множества  $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ . Процесс разложения коэффициентов заканчивается, когда все  $n$  переменных будут использованы для разложения. На последнем шаге разложения коэффициенты вырождаются до констант 0, 1.

Под *диаграммой двоичного выбора*, т. е. под BDD, понимается граф, задающий разложение Шеннона булевой функции  $f(x_1, \dots, x_n)$  по всем ее переменным  $x_1, \dots, x_n$  при заданном порядке (перестановке) переменных, по которым проводится разложение. Условимся, что коэффициенту  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$  на BDD будет соответствовать штриховая дуга, а коэффициенту  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  - сплошная дуга. Для упрощения графа BDD вершины-константы 0, 1 обычно дублируются. Заметим, что в литературе граф BDD рисуется обычно в сокращенном виде - полученные коэффициенты разложения не отмечаются и лишь предполагается, что все заходящие в одну и ту же вершину-переменную дуги соответствуют одному и тому же коэффициенту разложения.

Упорядоченную систему булевых функций  $\underline{f} = (f^1(x), \dots, f^m(x))$  для краткости будем называть также векторной булевой функцией, или *векторной* функций. Векторная функция  $\underline{f} = (f^1, f^2)$ ,  $m=2$ , (табл. 1), представляется в виде

данной конъюнкции в ДНФ соответствующей компонентной функции системы.

BDD для векторной функции  $\underline{f} = (f^1, f^2)$  (табл. 1) представлена на рис. 1, порядок  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \rangle$  переменных, по которым проведено многократное разложение Шеннона, совпадает с порядком следования переменных в функции.

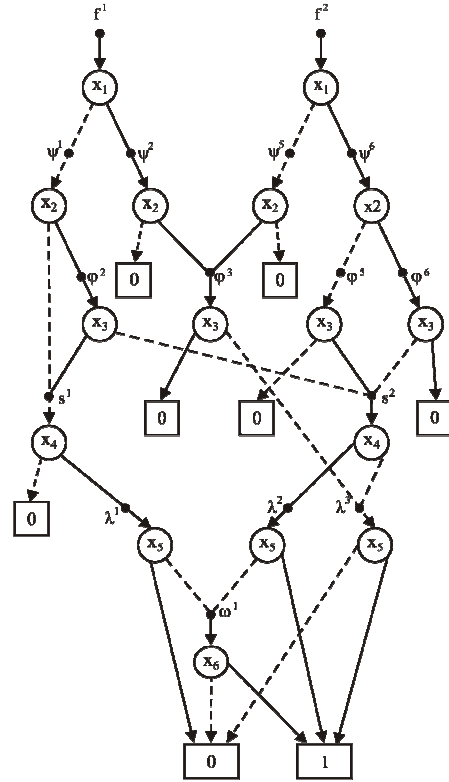


Рис. 1. Диаграмма двоичного выбора

Граф BDD для векторной функции получается из BDD компонентных функций отождествлением тех вершин, которые соответствуют одинаковым коэффициентам разложения. По диаграмме двоичного выбора легко записывается многоуровневое представление компонентных булевых функций  $f^j$ . Например, для векторной функции (табл. 1), многоуровневое представление, соответствующее этой BDD, состоит из булевых формул

$$\begin{aligned}
 f^1 &= \bar{x}_1\psi^1 \vee x_1\psi^2; & f^2 &= \bar{x}_1\psi^5 \vee x_1\psi^6; \\
 \psi^1 &= \bar{x}_2s^1 \vee x_2\varphi^2; & \psi^2 &= x_2\varphi^3; & \psi^5 &= x_2\varphi^3; \\
 \psi^6 &= \bar{x}_2\varphi^5 \vee x_2\varphi^6; & \varphi^2 &= \bar{x}_3s^2 \vee x_3s^1; & \varphi^3 &= \bar{x}_3\lambda^3; \\
 \varphi^4 &= x_3s^5; & \varphi^5 &= x_3s^2; & \varphi^6 &= \bar{x}_3s^2; & s^1 &= x_4\lambda^1; \\
 s^2 &= \bar{x}_4\lambda^3 \vee x_4\lambda^2; & s^4 &= \bar{x}_4\lambda^4; & \lambda^1 &= \bar{x}_5\omega^1;
 \end{aligned}$$

Таблица 1  
Система булевых функций

$T^x$						$B^f$	
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$f^1$	$f^2$
1	0	1	-	1	-	0	1
1	0	1	1	-	1	0	1
1	1	0	1	-	1	0	1
0	-	-	1	0	1	1	0
-	1	0	-	1	-	1	1

системы дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), заданной в виде пары матриц  $T^x$ ,  $B^f$ . В каждой из строк матрицы  $T^x$ , располагающейся в левой части таблицы, задается элементарная конъюнкция булевых переменных, единичные значения элементов матрицы  $B^f$  в правой части таблицы отмечают вхождения

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \overline{x_5} \omega^1 \vee x_5; \lambda^3 = x_5; \lambda^4 = x_5 \omega^2; \omega^1 = x_6; \\ \omega^2 &= \overline{x_6}. \end{aligned} \quad (2)$$

### III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задано разбиение  $Y/Z$  множества  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  аргументов векторной булевой функции  $\underline{f}(\underline{x}) = (f^1(\underline{x}), \dots, f^m(\underline{x}))$  на два непересекающиеся подмножества  $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ ,  $Z = \{z_1, \dots, z_{n-r}\}$ . Обозначим через  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_r)$  вектор, полученный упорядочением аргументов из подмножества  $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ , а через  $\underline{z} = (z_1, \dots, z_{n-r})$  – вектор, полученный упорядочением аргументов из подмножества  $Z = \{z_1, \dots, z_{n-r}\}$ . Пусть диаграмма двоичного выбора векторной функции  $\underline{f}(\underline{x})$  построена так, что начальные  $r$  аргументов последовательности разложения Шеннона являются аргументами подмножества  $Y$ .

**Задача 1.** Для векторной булевой функции  $\underline{f}(\underline{x})$ , представленной в виде BDD, и заданного разбиения  $Y/Z$  множества аргументов  $X$  построить функциональное разложение (провести декомпозицию векторной функции) вида

$$\underline{f}(\underline{x}) = \underline{f}(\underline{y}, \underline{z}) = \underline{g}(\underline{h}(\underline{y}), \underline{z}), \quad (3)$$

где  $\underline{h}(\underline{y}) = (h_1(\underline{y}), \dots, h_p(\underline{y}))$ . При этом требуется минимизировать число  $\overline{p}$  компонент векторной функции  $\underline{h}(\underline{y})$  и представить ее в виде системы ДНФ, а векторную функцию  $\underline{g}(\underline{h}(\underline{y}), \underline{z})$  представить в виде BDD.

### IV. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ВЕКТОРНОЙ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОМУ РАЗБИЕНИЮ МНОЖЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ

Декомпозиция векторной функции с минимальным числом промежуточных функций рассмотрена в литературе [5] для случая задания векторных функций матричными формами – системами ДНФ. Решение задачи 1 декомпозиции векторной функций, заданной BDD, осуществляется в три этапа и имеет свои особенности, обусловленные формой представления декомпозируемой векторной функции.

Этап 1. Построение кратчайшего разложения Шеннона векторной функции по кратчайшим разложениям Шеннона компонентных функций. На данном этапе возникает логико-комбинаторная задача нахождения минимального дизъюнктивного базиса для системы ДНФ.

Этап 2. Определение минимального числа промежуточных функций  $\underline{h}$  и их построение функций ко-

дированием ДНФ минимального дизъюнктивного базиса. Совместная минимизация промежуточных функций в классе ДНФ.

Этап 3. Построение выходных функций  $\underline{g}$ .

Рассмотрим данные этапы более подробно.

Этап 1. Построим классическое разложение Шеннона

$$\begin{aligned} \underline{f}(\underline{y}, \underline{z}) &= \overline{y_1} \overline{y_2} \dots \overline{y_r} \underline{f}_{\overline{y_0}}(\underline{z}) \vee \overline{y_1} \overline{y_2} \dots y_r \underline{f}_{\underline{y_0}}(\underline{z}) \vee \dots \\ &\vee y_1 y_2 \dots y_r \underline{f}_{\underline{y_{2^r-1}}}(\underline{z}). \end{aligned} \quad (4)$$

векторной функции  $\underline{f}(\underline{x})$  по подмножеству аргументов  $Y$

Коэффициент разложения  $\underline{f}_{\underline{y_i}}(\underline{z})$  – это векторная функция, полученная в результате подстановки в функцию  $\underline{f}(\underline{y}, \underline{z})$  вместо переменных вектора  $\underline{y}$  вектора  $\underline{y}_i, i=1, \dots, 2^r-1$ , их значений.

Сгруппировав в один класс дизъюнктивные члены разложения (4) с одинаковыми коэффициентами  $\underline{f}_{\underline{z}}$ , получим разложение вида

$$\underline{f} = Q_1 \underline{f}_{\underline{z}_1} \vee Q_2 \underline{f}_{\underline{z}_2} \vee \dots \vee Q_k \underline{f}_{\underline{z}_k}, \quad (5)$$

которое названо в [12] *кратчайшим* (по числу дизъюнктивных членов) разложением Шеннона векторной функции. Совершенные ДНФ  $Q_i$  могут быть минимизированы к классу ДНФ.

Построение кратчайшего разложения Шеннона (6) для компонентной функции  $f^j(\underline{x})$ , заданной графом BDD векторной функции  $\underline{f}(\underline{x})$ , легко осуществляется на основе следующего утверждения: каждому пути из корневой вершины BDD, помеченной функцией  $f^j$ , к вершине, представляющей коэффициент  $f_q^j(\underline{z})$  кратчайшего разложения Шеннона, соответствует элементарная конъюнкция, включающая дуги-литералы  $x_i, \overline{x}_i$  на этом пути, при этом штриховой дуге BDD соответствует отрицательный литерал  $\overline{x}_i$ , сплошной дуге – положительный литерал  $x_i$ , а всем путям между указанными вершинами соответствует дизъюнкция получаемых конъюнкций, образующая ДНФ  $Q_q^j$  кратчайшего разложения Шеннона.

Рассмотрим векторную функцию  $\underline{f} = (f^1, f^2)$ , компоненты  $f^1, f^2$  которой заданы на BDD (рис. 1). Будем проводить разложение вида (4) векторной функции  $\underline{f} = (f^1, f^2)$  по разбиению  $Y/Z$ , где  $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ,  $Z = \{x_5, x_6\}$ . Кратчайшие разложения Шеннона компонентных функций  $f^1, f^2$  будут иметь вид:

$$f = Q_0^1 \lambda^0(z) \vee Q_1 \lambda(z) \vee Q_2^1 \lambda^2(z) \vee Q_3^1 \lambda^3(z), \quad (6)$$

$$f^2 = Q_0^2 \lambda^0(z) \vee Q_1^2 \lambda^2(z) \vee Q_2^2 \lambda^3(z), \quad (7)$$

где ДНФ  $Q_i^j$  даны в табл. 2.

Таблица 2

ДНФ  $Q_i^j(y)$  из кратчайших разложений Шеннона функций  $f^1, f^2$

Функция $f^1$		Функция $f^2$	
$Q_i \lambda^j$	ДНФ $Q_i$	$Q_i^2 \lambda^j$	ДНФ $Q_i^2$
$Q_0 \lambda^0$	0110 00-0 10-- 111-	$Q_0^2 \lambda^0$	00-- 011- 111- 100-
$Q_1 \lambda^1$	0111 00-1	$Q_2^2 \lambda^2$	1101 1011
$Q_2 \lambda^2$	0101	$Q_2^2 \lambda^3$	010- 1010 -100
$Q_3 \lambda^3$	0100 110-		

Так как по BDD легко строятся кратчайшие разложения Шеннона компонентных функций, то возникает задача построения кратчайшего разложения Шеннона векторной функции по кратчайшим разложениям Шеннона компонентных функций. Данная задача сводится к задаче нахождения минимального дизъюнктивного базиса для системы ДНФ  $S$ . Систему ДНФ  $S$  образуют ДНФ  $Q_i^j(y)$ , входящие в кратчайшие разложения Шеннона (6) компонентных функций векторной функции  $\underline{f}(\underline{x}) = (f^1(\underline{x}), \dots, f^m(\underline{x}))$ . Минимальным дизъюнктивным базисом системы ДНФ  $S$  называется минимальная по мощности система попарно ортогональных ДНФ  $D = \{D^1(y), \dots, D^k(y)\}$  такая, что каждая ДНФ  $Q_i^j(y) \in S$  равна дизъюнкции некоторого подмножества ДНФ системы  $S$ . Нахождение минимального дизъюнктивного базиса  $D$  сводится к выполнению операций перемножения, инверсирования и сравнения на равенство ДНФ  $Q_i^j(y)$  исходной системы  $S$ .

В систему  $S$  входят ДНФ  $Q_0^1, Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_0^2, Q_1^2, Q_2^2$  (табл. 2). Решением задачи нахождения минимального дизъюнктивного базиса являются попарно ортогональные ДНФ  $D = \{D^1(y), \dots, D^7(y)\}$ , представленные в табл. 3.

Таблица 3

ДНФ минимального дизъюнктивного базиса  $S$

$D^i$	ДНФ	Код $h_1 h_2 h_3$
$D^1$	-110 00-0 100- 111-	000
$D^2$	0-11 00-1	001
$D^3$	-100	010
$D^4$	0101	011
$D^5$	1010	100
$D^6$	1011	101
$D^7$	1101	110

ДНФ системы  $S$  выражаются в виде дизъюнкции базисных ДНФ  $D^i(y)$ :

$$\begin{aligned} Q_0 &= D^1 \vee D^5 \vee D^6; & Q_1 &= D; & Q_2^1 &= D^4; \\ Q &= D^3 \vee D^7; & Q_0^2 &= D^1 \vee D; & Q_1^2 &= D \vee D^7; \\ Q_3^2 &= D^3 \vee D^4 \vee D. \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом дизъюнктивного расщепления ДНФ  $Q_i^j$  (8), запишем кратчайшее разложение Шеннона (6) компонентной функции  $f^1$  в виде

$$\begin{aligned} f^1 &= (D^1 \vee D \vee D) \lambda^0 \vee D^2 \lambda^1 \vee D^4 \lambda^2 \vee \\ & (D^3 \vee D^7) \lambda^3 = D \lambda \vee D^2 \lambda^1 \vee D^3 \lambda^3 \vee D \lambda \vee \\ & D \lambda \vee D \lambda \vee D^7 \lambda^3, \end{aligned} \quad (9)$$

Аналогично для компонентной функции  $f^2$  кратчайшее разложение Шеннона (7) переписывается в виде

$$\begin{aligned} f^2 &= (D \vee D) \lambda \vee (D \vee D^7) \lambda \vee (D^3 \vee D \\ & \vee D) \lambda^3 = D \lambda \vee D \lambda \vee D^3 \lambda^3 \vee D \lambda^3 \vee D \\ & \lambda^3 \vee D \lambda \vee D^7 \lambda. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая, что  $\lambda = 0$ , по равенствам (9), (10) легко записать кратчайшее разложение Шеннона векторной функции  $\underline{f} = (f^1, f^2)$ :

$$\begin{aligned} \underline{f} &= D(0,0) \vee D^2(\lambda^1,0) \vee D^3(\lambda^3,\lambda^3) \vee D(\lambda,\lambda^3) \\ & \vee D(0,\lambda^3) \vee D(0,\lambda) \vee D^7(\lambda^3,\lambda^2) \end{aligned} \quad (11)$$

Этап 2. Минимальное число  $p$  промежуточных функций  $h_1(y), \dots, h_p(y)$  в разложении (3) векторной функции определяется по формуле

$$p = \lceil \log_2 k \rceil, \quad (12)$$

где  $k$  - число ДНФ в минимальном дизъюнктивном базисе для системы ДНФ  $S$ . Векторная функция  $\underline{h}(y) = (h_1(y), \dots, h_p(y))$  в (3) строится кодированием ДНФ  $D^1(y), \dots, D^k(y)$  попарно ортогональными булевыми либо троичными векторами. В рассматриваемом примере  $k=7$ ,  $p=3$ , векторная функция  $\underline{h}(y) = (h_1(y), h_2(y), h_3(y))$  дана в табл. 3, она может быть минимизирована в классе ДНФ и реализована на ПЛМ.

Этап 3. Построим выходную векторную функцию  $\underline{g} = (g^1, g^2)$ . Заменяем ДНФ  $D^1(y), \dots, D^k(y)$  кодами (см. табл. 3) и учтем, что  $\lambda^0 = 0$ , получим

$$g^1 = D^2 \lambda^1 \vee D^4 \lambda^2 \vee (D^3 \vee D^7) \lambda^3 = \bar{h}_1 \bar{h}_2 h_3 \lambda^1 \vee \bar{h}_1 h_2 h_3 \lambda^2 \vee (\bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3 \vee h_1 h_2 \bar{h}_3) \lambda^3. \quad (13)$$

$$g^2 = (D^6 \vee D^7) \lambda^1 \vee (D^3 \vee D^5) \lambda^2 = (h_1 \bar{h}_2 h_3 \vee h_1 h_2 \bar{h}_3) \lambda^1 \vee (\bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3 \vee \bar{h}_1 h_2 h_3 \vee h_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3) \lambda^2. \quad (14)$$

Выражения для коэффициентов  $\lambda$  содержатся в (2). Таким образом, выходные компонентные функции  $g$  заданы в виде многоуровневого представления, при этом коэффициенты  $\lambda$  остаются заданными в первоначальном виде, т.е. в виде BDD.

Следует заметить, что, если компонентных функций много, то декомпозиция всей исходной системы как векторной функции может быть нецелесообразной. Возникает отдельная задача разбиения исходной системы на подсистемы и проведение раздельной декомпозиции подсистем, интерпретируемых как векторные функции.

#### V. ВЫБОР РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА ПЕРЕМЕННЫХ

Целью декомпозиции является уменьшение числа переменных (аргументов), от которых зависят функции. Рассмотрим сначала выбор разбиения для случая раздельной декомпозиции компонентных функций. Будем использовать следующую терминологию. Уровнями BDD будем считать переменные, по которым проводятся разложения Шеннона, т.е. каждому уровню соответствует своя переменная разложения. Будем ассоциировать разбиение  $Y/Z$  с разрезом BDD, полагая, что переменные  $x_i$  разложения, расположенные выше разреза, относятся к подмножеству  $Y$ , а переменные  $x_i$ , используемые ниже разреза, входят в подмножест-

во  $Z$ . Центр BDD – это разрез на уровне  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ . Процедура выбор разбиения  $Y/Z$  включена в алгоритм поиска перестановки переменных  $x_i$ , по которой строится BDD. Для построенной BDD разрез ищется от середины BDD в полосу вверх на  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  уровней BDD и вниз на  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  уровней BDD от центра BDD. Для первой

перестановки для каждого разреза из указанной полосы оценивается суммарное число переменных  $h$  и выбирается разрез, который приводит к меньшему числу функций  $h$ , а если таких разрезов несколько, то выбирается тот разрез (разбиение  $Y/Z$ ), который ближе к центру BDD. Для всех последующих перестановок ищется свой лучший разрез, который сравнивается с лучшим из уже найденных разрезов. Сравнение разрезов осуществляется следующим образом: разрез считается лучшим, если он обеспечивает меньшее число различных коэффициентов разложения Шеннона (критерий 1), попадающих в данный разрез. Если эти параметры равны, то выбирается, разрез, который ближе к центру BDD (критерий 2), если же эти параметры (мощности множеств  $Y$ ) одинаковы, то предпочтение отдается тому разрезу, который совершается в BDD, имеющей меньшее число вершин - различных коэффициентов разложения по всем переменным (критерий 3).

Выбор разбиения  $Y/Z$  переменных для декомпозиции векторной функции включен в алгоритм генерации случайных перестановок. Для очередной перестановки разрез ищется в полосе  $\lceil \frac{n}{4} \rceil \leq |Y| \leq \lceil \frac{3n}{4} \rceil$ , где  $|Y|$  - мощность подмножества  $Y$ , при этом лучшим считается тот разрез, для которого меньше сложность BDD (критерий 3), если же по критерию 3 разрезы равноценны, то лучшим считается разрез, для которого меньше число  $k$  ДНФ минимального дизъюнктивного базиса  $D$  (критерий 4), далее используются критерии 1 и 2 выбора разбиения для раздельной декомпозиции.

#### VI. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Целью экспериментов было сравнение эффективности программ минимизации и декомпозиции, реализующих этап предварительной логической оптимизации при синтезе комбинационных схем из библиотечных элементов. В качестве исходных данных для проведения экспериментов были взяты системы ДНФ (табл. 4) - примеры ПЛМ из библиотеки примеров Berkeley PLA Test Set, где  $n$  - число входных пере-

менных ПЛМ;  $m$  - число выходных переменных ПЛМ;  $k$  - число промежуточных шин ПЛМ, равное числу элементарных конъюнкций в системе ДНФ булевых функций, реализуемых на ПЛМ. Исходные описания были представлены на языке VHDL [6]. В каждом эксперименте синтезировалась схема в базе базовых матричных кристаллов (БМК), эксперименты могут быть интерпретированы как замена двухуровневых схем ПЛМ многоуровневыми схемами в базе БМК. В качестве библиотеки БМК была выбрана библиотека [6, с. 159], состоящая из 35 логических элементов.

Таблица 4

Результаты экспериментов

Имя схемы	$n$	$m$	$k$	$S_{БМК}$			
				Эксперимент			
				1	2	3	4
add6	12	7	1092	4935	535	198	<b>162</b>
addm4	9	8	480	3985	1370	1412	967
b12	15	9	431	192	<b>188</b>	198	327
b2	16	17	110	2474	3538	3878	<b>2595</b>
in0	15	11	135	2067	1617	1255	<b>1255</b>
in2	19	10	137	1845	1889	1198	<b>1102</b>
m181	15	9	430	192	<b>188</b>	216	597
m3	8	16	128	1385	901	<b>565</b>	721
mlp4	8	8	225	2564	999	838	<b>664</b>
tial	14	8	640	4505	4597	5156	<b>4226</b>
z9sym	9	1	420	920	710	184	<b>161</b>
intb	15	7	664	5810	5586	4010	<b>2614</b>
alu1	12	8	19	<b>66</b>	<b>66</b>	<b>66</b>	152
in1	16	17	110	2862	<b>2323</b>	2996	2535
vtx1	27	6	110	<b>175</b>	331	259	1753
x9dn	27	7	120	198	<b>197</b>	197	1732
soar	83	94	529	<b>1705</b>	2302	1944	2004
gary	15	11	442	1119	1276	<b>1082</b>	1255
max1024	10	6	1024	4048	1638	1968	<b>1310</b>

Результирующие схемы сравнивались по сложности  $S_{БМК}$ , сложность  $S_{БМК}$  схемы подсчитывается как сумма площадей входящих в данную схему элементов. В качестве синтезатора использовалась система LeonardoSpectrum [6].

**Эксперимент 1.** Синтез схем БМК по исходным - не минимизированным системам ДНФ (ПЛМ).

**Эксперимент 2.** Предварительная совместная (либо раздельная) минимизация [7] в классе ДНФ исходных систем функций и последующий синтез схем БМК по минимизированным ДНФ.

**Эксперимент 3.** Синтез схем БМК по раздельно декомпозированным функциям. В эксперименте 3 промежуточные функции  $h$  представлялись одной системой ДНФ, которая совместно минимизировались с помощью программ совместной минимизации, либо

представлялись в виде BDD. Выходные функции  $g$  представлялись только в виде BDD.

**Эксперимент 4.** Синтез схем БМК по представлениям, полученным в результате декомпозиции векторной функции. В эксперименте 4 векторные функции  $\underline{h}(y)$  и  $\underline{g}(\underline{h}(y), \underline{z})$  представлялись в BDD.

В табл. 4 жирным шрифтом выделены лучшие решения по экспериментам 1 – 4. Результаты экспериментов позволяют сделать вывод о том, декомпозиция и представление декомпозированных функций в виде BDD являются более эффективными приемами предварительной технологически независимой оптимизации по сравнению с минимизацией функций в классе ДНФ при синтезе логических схем из библиотечных вентиляей.

## VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представление булевых функций и систем функций в виде BDD является эффективной формой их задания не только для проведения этапа технологического отображения многоуровневых представлений функций в заданный технологический базис, но и эффективной формой для декомпозиции булевых функций и систем таких функций. Использование аппарата BDD позволяет более эффективно (по сравнению с декомпозицией матричных форм систем ДНФ) решать задачу выбора разбиения аргументов при декомпозиции. Эксперименты показали, что наряду с логической минимизацией декомпозиция может быть применена при решении задач синтеза логических схем практической размерности.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
- [2] Sasao T. FPGA design by generalized functional decomposition // Representations of discrete functions (ed. by Sasao T., Fujita M.). – Kluwer Academic Publishers, 1996. – P. 233 – 258.
- [3] Bryant R.E., Meinel C. Ordered Binary Decision Diagrams // Logic synthesis and verification (ed. by S. Hassoun, T. Sasao, R.K. Brayton). Kluwer Academic Publishers, 2002. – P. 285 – 307.
- [4] Yang S., Ciesielski M. BDS: a BDD-based logic optimization system. // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2002. – Vol. 21, № 7. – P. 866 – 876.
- [5] Бибило П.Н. Декомпозиция булевых функций на основе решения логических уравнений. – Минск: Беларус. наука, 2009. – 211 с.
- [6] Бибило П.Н. Синтез логических схем с использованием языка VHDL – М.: Солон-Р, 2002. – 384 с.
- [7] Леончик П.В. Минимизация систем булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Информатика. – 2006. – № 1. – С. 88–96.