УДК 621.38+621.373.1

Вычислительный метод расчета фазового шума в автогенераторах

М.М. Гурарий, М.М. Жаров, С.Л. Ульянов

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, ippm@ippm.ru

***Аннотация* — В статье рассматриваются различные подходы, вычислительные методы и модели для расчета фазового шума в автогенераторах. В рамках линейной периодически нестационарной модели предлагается вычислительный метод для расчета фазового шума. Предложенный метод, в отличие от известных подходов, обеспечивает корректный расчет фазового шума как для малых так и для больших отклонений частоты от частоты колебаний автогенератора.**

***Ключевые слова* — аналоговые схемы, автогенераторы, гармонический баланс, амплитудный шум, фазовый шум, шумовой анализ, спектральная плотность мощности.**

I. Введение

При проектировании электронных схем важное место занимает расчет шумовых характеристик или шумовой анализ схемы [10]. Практически каждая программа схемотехнического моделирования имеет в своем составе режим расчета шума в частотной области. Прогресс в области создания новых радиотехнических схем обуславливает необходимость создания нового математического аппарата и программных средств шумового анализа. При этом значение и роль правильной оценки шумовых характеристик схемы в процессе проектирования значительно возрастает. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что хотя аналоговая часть составляет относительно небольшую часть системы связи, именно ее параметры могут определить общие характеристики системы.

Электронный шум обусловлен фундаментальными процессами переноса заряда в приборах схемы. Так как заряд имеет дискретную природу, то возникают флуктуации тока или напряжения, которые и определяют шум в электронных схемах. В зависимости от физического механизма возникновения флуктуаций различают три вида электронного шума: тепловой, дробовой и фликкер-шум. Далее, если детерминированная система подвержена шумовым воздействиям, представленным как стохастические процессы, то и переменные состояния системы (например, узловые напряжения) будут представляться как стохастические процессы. Тогда "шумовой анализ" системы, возбужденной шумовыми источниками, можно рассматривать как вычисление вероятностных характеристик стохастических процессов, представляющих переменные состояния. При этом математическая модель системы может соответствовать линейной стационарной системе, линейной нестационарной системе, нелинейной и нестационарной системе. Применяемая математическая модель системы зависит от принятых допущений, класса схем и во многом определяет метод анализа. Допущение о малости шумового воздействия по сравнению с полезным сигналом позволяет строить методы шумового анализа на основе теории возмущений и линеаризации нелинейных систем.

Проблемам расчета фазового шума в автогенераторах посвящено значительное число работ, однако вопрос об эффективном и корректном вычислительном методе расчета все еще остается открытым. В статье предлагается новый вычислительный метод для расчета фазового шума. В разделе II приводится понятие фазового шума и способы его характеризации, в разделе III рассмотрены известные методы и модели. Описание нового вычислительного метода приведено в разделе IV.

II. Фазовый шум

A. *Спектр выходного сигнала генератора*

Задача определения формы спектра выходного сигнала автогенератора имеет самостоятельный интерес и ее решение может рассматриваться как конечная цель анализа.

Пусть выходной сигнал генератора имеет вид колебания близкого к синусоидальному $x(t) = (1 + a(t))\cos(\omega_0 t + \phi(t))$, где $a(t)$, $\phi(t)$ - амплитудные и фазовые отклонения, ω_0 - частота колебаний в установившемся режиме. При отсутствии случайных воздействий генератор находится в установившемся периодическом режиме, амплитудные и фазовые отклонения отсутствуют, а спектр сигнала содержит гармоники частоты колебаний. На фазовой плоскости установившийся режим характеризуется периодическим движением изображающей точки по выпуклой кривой - предельному циклу. Случайные воздействия сбивают изображающую точку с предельного цикла. При каждом воздействии амплитуда и фаза колебаний меняется скачком, что приводит к появлению амплитудных и фазовых флуктуаций. Так как для амплитудных флуктуаций существует возвращающая сила, обусловленная нелинейной природой генератора, изображающая точка со временем возвращается на предельный цикл и соответственно амплитудные отклонения затухают ($a(t) \to 0$ при $t \to \infty$). Вследствие того, что периодическое установившееся решение уравнений автогенератора справедливо для произвольного значения начальной фазы, фазовые отклонения сохраняются (отдельное воздействие приводит к постоянному сдвигу $\phi(t) \to \Delta\phi$ при $t \to \infty$) и могут неограниченно накапливаться с течением времени. Таким образом, доминирующим фактором, определяющим спектр колебания генератора являются флуктуации фазы колебания. Случайные воздействия приводят к размыванию спектра сигнала вблизи гармоник частоты колебаний. На практике интересуются шириной и формой спектра вблизи первой гармоники или частоты колебаний.

Задача определения формы спектра имеет свою историю. Теоретический анализ флуктуационных явлений в автоколебательных системах, стационарные флуктуации амплитуды и фазы и обусловленная ими картина спектра были даны в работах И.Л. Берштейна [2]. Было найдено, что спектр лампового генератора состоит из узкой размытой спектральной линии и пьедестала. Исследование формы и ширины спектра колебания для случая, когда флуктуации амплитуды и частоты имеют спектры фликкер-шума приведены в [1, 4]. Методы анализа разработаны в рамках общей теории колебаний, используют ряд упрощающих допущений и ограничений. Методы позволяют получить качественное физическое описание эффекта уширения спектра автогенератора, однако непригодны для анализа схем в рамках программ схемотехнического моделирования.

B. *Характеризация фазового шума*

На практике для характеризации фазового шума автогенератора используются спектральная плотность мощности (СПМ) сигнала x (S_x или L) или фазы сигнала ϕ (S_ϕ) [13]. S_x содержит как амплитудные так и фазовые компоненты шума, а S_ϕ - только фазовые. СПМ S_x можно непосредственно измерить с помощью спектрального анализатора, в то время как для измерения S_ϕ требуется фазовый детектор. СПМ L - это односторонняя спектральная плотность, нормализованная на величину мощности сигнала.

С увеличением времени случайный набег фазы растет неограниченно и поэтому СПМ $S_\phi \to \infty$ при $\Delta f \to 0$, где Δf - отклонение частоты от частоты колебаний. В то же время случайные амплитудные отклонения ограничены диаметром предельного цикла и затухают со временем. Поэтому при $\Delta f \to 0$ СПМ S_x выходит на плоский участок.

Таким образом, термин фазовый шум связан со спектральной характеристикой шума в автогенераторе. Следует отметить, что в отличие от СПМ S_x спектральная плотность мощности S_ϕ не имеет строгого обоснования так как случайная фаза сигнала не является стационарным стохастическим процессом [7].

Если ввести временную переменную $\theta(t) = \phi(t)/\omega_0$, то фазовый шум в автогенераторе можно характеризовать одним числом, т.е. дисперсией $E[\theta(t)^2]$, где $E[\ ]$ - математическое ожидание. В этом случае говорят о джиттере. Поэтому фазовый шум (СПМ) и джиттер являются различными характеристиками одного и того же процесса.

III. Методы и модели для анализа фазового шума

A *Линейная стационарная модель*

Теория линейных стационарных систем (LTI) позволяет на качественном уровне предсказывать шумовые характеристики. Полученные на основе этой теории выражения для расчета шума приводят к значительным отклонениям от экспериментальных результатов. С целью уменьшения различий была получена полуэмпирическая модель Лисона для LC генератора [14]. Формула Лисона дает аппроксимацию односторонней СПМ фазового шума и имеет вид

$$L\{\Delta\omega\} = 10 \cdot \log\left\{ \frac{2FkT}{P_{sig}} \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{2Q\Delta\omega} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\Delta\omega_{1/f^3}}{|\Delta\omega|} \right) \right\} \quad (1)$$

Здесь ω_0 - частота определяемая LC контуром, Q - добротность контура, F - эмпирический коэффициент, P_{sig} - средняя мощность сигнала, $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ - смещение от частоты ω_0, и $\Delta\omega_{1/f^3}$ - параметр, который определяет частоту смещения, разделяющую области с характером зависимости $1/(\Delta\omega)^2$ и $1/(\Delta\omega)^3$. Множитель F учитывает увеличение шума в области $1/(\Delta\omega)^2$. Последний множитель обеспечивает зависимость $1/(\Delta\omega)^3$ в области малых смещений.

Таким образом, в сравнении с идеализированной моделью, модель Лисона имеет дополнительный эмпирический множитель F, что затрудняет определение путей снижения шума. Та же ситуация с параметром $\Delta\omega_{1/f^3}$. Другая проблема связана с неопределённостью применения параметра добротности Q при наличии активных приборов. Поэтому функция (1) дает лишь качественное описание и не позволяет прогнозировать количественные оценки фазового шума.

B. *Модели на основе теории возмущений*

Система уравнений нелинейных схем с шумовым возбуждением имеет вид:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(x(t)) + f(x(t)) + D(x)\xi(t) = 0 \qquad (2)$$

Здесь $\xi(t)$ – некорреллированные источники белого шума, оператор - D определяет модуляцию шумовых источников.

В общем случае решение уравнения является случайным процессом. Традиционные вычислительные схемы шумового анализа основаны на методах линейной теории возмущений решения уравнения.

Пусть $x_s(t)$ - установившееся решение в отсутствии возмущений, $x(t)$ - возмущенное решение. Метод возмущения предполагает отклик $x(t)$ в следующей форме:

$$x(t) = x_s(t) + \Delta x(t) \qquad (3)$$

В силу малости шума $D(x)\xi(t)$ дисперсия малосигнального отклонения $\Delta x(t)$ также мала. Подставляя (3) в уравнение (2) и линеаризуя $q(x(t))$ и $f(x(t))$ около решения $x_s(t)$, уравнение (2) приводится к малосигнальному варианту:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x}q(x)\Delta x\right) + \frac{\partial}{\partial x}i(x)\Delta x + D(x_s(t))\xi(t) = 0 \qquad (4)$$

Уравнение определяет линейную периодическую времязависимую систему. Ограниченность величины $\Delta x(t)$ на всём временном интервале является основным предположением дальнейшего анализа. Большинство известных работ по шумовому анализу генераторных схем посвящены расширению теории линейных периодических времязависимых систем на автономные системы.

Теория фазового шума в автогенераторах, основанная на декомпозиции возмущённного отклика на составляющие, обуславливающие фазовый и амплитудный шум, разработана в работах [11], [12], [5], [6]. Возмущённое решение представляется в виде:

$$x(t) = x_s(t + \theta(t)) + \Delta x(t + \theta(t)) \qquad (5)$$

где $x_s(t + \theta(t))$ - временной сдвиг вдоль предельного цикла, и случайная переменная $\theta(t)$ отвечает за возмущения по касательной к предельному циклу, Δx - амплитудные отклонения от предельного цикла.

Отметим, что амплитудные отклонения ограничены и малы ($\|\Delta x\| \ll \|x_s(t)\|$), в то время как отклонения, обусловленные $\theta(t)$ неограничены и могут быть как угодно велики.

Используя теорию Флоке и вводя дополнительное условие

$$v_1^T(t+\theta)\Delta x(t+\theta) = 0 \qquad (6)$$

Картнер в работе [12] получил скалярное уравнение относительно $\theta(t)$

$$\dot{\theta} = v_1^T(t+\theta)D(x_s(t+\theta))\xi(t) \qquad (7)$$

Здесь $v_1(t+\theta)$ - первый вектор Флоке сопряженной системы.

Располагая статистическими характеристиками источников шума $\xi(t)$ и решая полученное уравнение, можно вычислить статистические характеристики $\theta(t)$.

В работах [5], [6] рассматривался вопрос о спектре выходного сигнала автогенератора при наличии фазового шума.

Вначале рассматривались статистические свойства случайной переменной $\theta(t)$. Используя аппарат характеристических функций и рассматривая источники белого шума в работе [5] было показано :

1) $\theta(t)$ асимптотически является гауссовой случайной переменной с постоянным средним

$\mu(t) = m$

и линейно возрастающей дисперсией

$\sigma^2(t) = ct$

где скаляр c определяет наклон зависимости от времени и определяется как

$$c = \frac{1}{T}\int_0^T v_1^T(t)D(x_s(t))D^T(x_s(t))v_1(t)dt$$

Знание величины скаляра c является достаточным для характеризации фазовых отклонений зашумлённого осциллятора.

При этом асимптотическое поведение характеристической функции имеет вид

$$\lim_{t\to\infty} E(e^{j\omega\theta(t)}) = e^{j\omega\mu(t) - \omega^2\sigma^2(t)/2} \qquad (8)$$

2) Асимптотическое поведение автокорреляционной функции определяется выражением

$$E[\theta(t)\theta(t+\tau)] = m^2 + c\cdot min(t, t+\tau) \qquad (9)$$

и соответствует нестационарному процессу винеровского типа.

Затем в работе [5] рассматривалась статистическая характеризация сигнала автогенератора при наличии фазового шума. Для получения спектра сигнала необходимо составить автокорреляционную функцию и найти от нее Фурье-образ. С учетом фазового шума автокорреляционная функция имеет вид

$$R(t,\tau) = E[x_s(t+\theta)x_s{*}(t+\tau+\theta(t+\tau))] \qquad (10)$$

Разложение в ряд Фурье установившегося периодического решения имеет вид

$$x_s(t) = \sum_i X_i e^{ji\omega_0 t} \qquad (11)$$

Поскольку установившееся решение не зависит от шума решение со сдвигом по времени можно представить с теми же коэффициентами Фурье

$$x_s(t+\theta) = \sum_i X_i e^{ji\omega_0 t} e^{ji\omega_0\theta} \quad (12)$$

Тогда автокорреляционная функция

$$R(t,\tau) = \sum_i \sum_k X_i X_k^* e^{j(i-k)\omega_0 t} e^{-jk\omega_0\tau} E[e^{j\omega_0(i\theta - k\theta(t+\tau))}] \quad (13)$$

Используя формулы (8), (9), имеем

$$\lim_{t\to\infty} E(e^{j\omega_0(i\theta - k\theta(t+\tau))}) = e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2[(i-k)^2 ct + k^2 c\tau - 2ikc\,min(0,\tau)]} \quad (14)$$

Первый член обращается в ноль при $i \neq k$, поэтому

$$\lim_{t\to\infty} R(t,\tau) = \sum_i X_i X_i^* e^{-ji\omega_0\tau} e^{-\frac{1}{2}\omega_0^2 i^2 c|\tau|} \quad (15)$$

Таким образом, шум в осцилляторе в пределе описывается стационарным процессом.

Теперь найдем Фурье преобразование от автокорреляционной функции.

Используя известную формулу $F(e^{a|\tau|}) = \frac{-2a}{a^2+\Omega^2}$ и учитывая что член $e^{-ji\omega_0\tau}$ дает сдвиг по частоте, окончательно получаем [5]

$$S_x(\Delta\omega) = \sum_i X_i X_i^* \frac{i^2\omega_0^2 c}{i^4\omega_0^4 c^2/4 + (i\omega_0 + \Delta\omega)^2} \quad (16)$$

Таким образом, спектр автогенератора, определенный формулой (16), имеет характер лоренциана около каждой гармоники $i\omega_0$. Постоянная c определяет частоту, после которой наклон кривой имеет значение -20 дБ на декаду в логарифмическом масштабе. Источники фликкер-шума рассмотрены в работе [6].

Несмотря на то что изложенная теория позволяет находить спектр автогенератора вследствие фазового шума в виде лоренциана и определять дисперсию фазового шума, вычислительные методы, построенные на базе этой теории имеют ряд ограничений. Во-первых, получение векторов Флоке, необходимых для анализа шума, сталкивается с серьезными вычислительными трудностями. Во-вторых, методы позволяют определять компоненту шума, обусловленную фазовыми отклонениями, которая является доминирующей при приближении к частоте колебаний автогенератора. В случае если необходимо определять шум для достаточно больших смещений от частоты колебаний методы будут давать погрешность, так как влияние амплитудных отклонений не учитывается.

C. *Линейная периодически нестационарная модель*

Линейная периодически нестационарная модель (LPTV) широко используется для оценки фазового шума автогенераторов. Существенным достоинством этого подхода является простота и удобство его внедрения в программы схемотехнического моделирования в рамках периодического малосигнального анализа.

Шум на выходе схемы с периодически изменяющейся рабочей точкой имеет характер циклостационарного процесса вне зависимости от типа источника шума [13]. Для стационарных источников, зависящих от режима, циклостационарность обусловлена модуляцией периодически изменяющейся величиной смещения, для независимых от режима стационарных источников - периодической передаточной функцией от источника на выход схемы.

СПМ шума на выходе периодически нестационарной линейной системы имеет вид [8]

$$S_{out}(\omega) = \sum_l \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H_l(\omega + k\omega_0)|^2 \cdot S_l(\omega + k\omega_0), \quad (17)$$

где $S_l(\omega + k\omega_0)$ - СПМ l-го источника шума на частоте $\omega + k\omega_0$, $H_l(\omega + k\omega_0)$ - передаточная функция от входа на частоте $\omega + k\omega_0$ к выходу на частоте ω, для расчета которой можно использовать периодический малосигнальный анализ.

Однако его применение к автогенераторам вызывает трудности из-за вырожденности матрицы Якоби в точке собственной частоты автогенератора. В некоторых случаях эта вырожденность вызывает рост численной погрешности и приводит к нестабильности оценки СПМ в области малых отклонений от собственной частоты. Во многих других случаях матрица Якоби, полученная численными методами, отличается от теоретического значения, и не является вырожденной при нулевом отклонении от собственной частоты. Это приводит к появлению плоской части на графике СПМ автогенератора без фликкер-шума, и к неверному наклону графика СПМ автогенератора с фликкер-шумом. Поэтому на практике такой подход не позволяет охватить весь диапазон частот так как вблизи гармоник собственной частоты генератора матрица системы плохо обусловлена вследствие ее вырожденности на частоте гармоник.

IV. Расчет передаточной функции

A. *Малосигнальная система уравнений*

Уравнения для расчета шума в автогенераторе могут быть получены на основе метода малосигнального квазипериодического гармонического баланса.

Анализ с использованием периодически нестационарной линейной модели выполняется после определения периодического установившегося режима. В частотной области решение, соответствующее установившемуся режиму, включает частоту колебаний ω_0 и вектор коэффициентов Фурье всех схемных переменных X. Вектор X имеет комплексные компоненты X_{kl}, где k,l - индексы гармоники и узла соответственно.

При малом периодическом возбуждении поведение автогенератора описывается линейной системой с периодическими коэффициентами. В частотной области линейная периодически нестационарная модель для автогенераторов записывается аналогично случаю неавтономных систем и имеет вид [3]

$$J(\Delta\omega) \cdot \Delta X = B \qquad (18)$$

Здесь B - это вектор гармоник возбуждения, где компоненты B_{kl} - гармонические сигналы частотой $k\omega_0 + \Delta\omega$, приложенные к узлу l; ΔX - вектор малосигнального решения, $J(\Delta\omega)$ - матрица Якоби при заданном отклонении $\Delta\omega$ частоты возбуждения от собственной частоты генератора ω_0. Матрица $J(\Delta\omega)$ имеет вид [3]

$$J(\Delta\omega) = G + j(\omega_0\Lambda + \Delta\omega E)C = J_0 + j\Delta\omega C \qquad (19)$$

где E - единичная матрица полной системы, G, C - блочные матрицы гармоник узловых проводимостей и емкостей, и $\Lambda = diag(-k, \ldots, 0, \ldots, k)$ - диагональная матрица индексов гармоник. Матрица Якоби $J(\Delta\omega)$ при $\Delta\omega = 0$ совпадает с матрицей гармонического якобиана в точке периодического установившегося решения $J(0) = J_0$:

$$J_0 = G + j\omega_0 \cdot \Lambda C \qquad (20)$$

Матрица J_0 является вырожденной, поэтому существуют правый U и левый V собственные вектора, соответствующие нулевому собственному значению, такие что

$$J_0 U = 0 \qquad V^T J_0 = 0 \qquad (21)$$

Векторы U и V, преобразованные во временную область, соответствуют производной от установившегося периодического решения и решению сопряженной малосигнальной системы, линеаризованной около периодического решения. Векторы U и V связаны условием нормализации

$$V^T C U = 1 \qquad (22)$$

B. *Эквивалентное преобразование системы*

Для того, чтобы получить выражение для передаточной функции нужно решить систему (18) с одним ненулевым компонентом вектора правой части, равным 1. Пусть этот компонент соответствует гармонике k и узлу l. Тогда (18) запишется в виде

$$J(\Delta\omega) \cdot \Delta X = e^{(kl)} \qquad (23)$$

где $e^{(kl)}_{mn} = 1$ для $m=k$, $n=l$ и нулевыми значениями остальных компонент.

При малых отклонениях частоты эта система плохо обусловлена, так как $J(0)$ вырождена. Для того, чтобы решить систему при малых отклонениях частоты, мы преобразуем ее в эквивалентную систему с невырожденной матрицей при $\Delta\omega = 0$.

Умножая систему (23) на левый собственный вектор V и учитывая (21), можно получить новое уравнение

$$V^T C \Delta X = \frac{V_{kl}}{j\Delta\omega} \qquad (24)$$

Теперь заменим уравнение в системе (23), соответствующее ненулевой компоненте вектора возбуждения, на полученное уравнение (24). Предполагая для упрощения обозначений, что заменяемое уравнение является последним в системе (23), получим преобразованную систему

$$\begin{bmatrix} \bar{J}(\Delta\omega) \\ V^T C \end{bmatrix} \Delta X = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{V_{kl}}{j\Delta\omega} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

Здесь $\bar{J}(\Delta\omega)$ - прямоугольная матрица, которая содержит все строки $J(\Delta\omega)$ кроме последней.

Можно показать, что в общем случае матрица (25) не вырождена при $\Delta\omega = 0$.

Таким образом, найденное эквивалентное преобразование системы позволяет исключить сингулярность матрицы при нулевых смещениях частоты и соответственно устранить вычислительные трудности при расчетах вблизи частоты колебаний.

Для определения передаточной функции система (25) решается многократно для каждой выходной гармоники m и каждого источника шума. Тогда компонент m-того вектора решения системы (25) определяет коэффициент передачи от входного сигнала частоты $k\omega_0 + \Delta\omega$ к выходному сигналу на частоте $m\omega_0 + \Delta\omega$. Полагая, что источник шума, присоединенный к узлу l, модулирован периодическим сигналом, передаточная функция имеет вид свертки

$$H^{(m)}_{kl}(\Delta\omega) = \sum_i M_{i-k} \Delta X^{(m)}_{il}(\Delta\omega) \quad , \qquad (26)$$

где M_i - Фурье коэффициенты периодической модуляции источника шума.

В случае, если при расчете можно ограничиться СПМ шума только в одном узле и для одной гармоники, то возможен более эффективный метод, использующий решение сопряженной системы уравнений [8].

C. *Фазовая передаточная функция*

В работе [9] показано, что формула (25) позволяет получить выражение для отклика на синусоидальное возмущение $A\exp(j(k\omega_0 + \Delta\omega)t)$ во временной области в виде

$$\Delta x(t) = A\frac{V_{kl}}{j\Delta\omega}\dot{x}(t)\exp(j\Delta\omega t) \qquad (27)$$

Рассматривая установившееся периодическое решение и вводя медленно меняющуюся фазовую переменную

$$\phi(t) = \Phi\exp(j\Delta\omega t) \qquad (28)$$

можно записать

$$x(t + \phi(t)/\omega_0) \approx x(t) + \dot{x}(t)(\phi(t)/\omega_0) \qquad (29)$$

откуда

$$\Delta x(t) = \dot{x}(t)(\phi(t)/\omega_0) = \dot{x}(t)\frac{\Phi}{\omega_0}\exp(j\Delta\omega t) \qquad (30)$$

Из сравнения выражений (27) и (30) имеем

$$\Phi = A\frac{\omega_0}{j\Delta\omega}V_{kl} \qquad (31)$$

Таким образом, малое синусоидальное возмущение амплитуды A приводит к модуляции фазы (28) и следовательно фазовая передаточная функция может быть определена следующим образом

$$H^{\phi}_{kl} = \frac{\Phi}{A} = \frac{\omega_0}{j\Delta\omega}V_{kl} \qquad (32)$$

Для заданного узла l H^{ϕ}_{kl} определяет передачу от боковой полосы k-й гармоники $k\omega_0 + \Delta\omega$ в спектре входного сигнала генератора к основной полосе $\Delta\omega$ в спектре фазовой модуляции. Тогда, применяя общую формулу для СПМ шума на выходе линейной системы мы можем получить выражение для СПМ фазового шума в зависимости от СПМ входного источника шума, подключенного к l-му узлу генераторной схемы

$$S_{\phi}(\Delta\omega) = (\omega_0^2/\Delta\omega^2)\sum_k |V_{kl}|^2 S_l(k\omega_0 + \Delta\omega), \qquad (33)$$

В частности, для источника белого шума выражение (33) принимает вид $S_{\phi}(\omega) = \omega_0^2 c S_l/\Delta\omega^2$, $c = \sum_k |V_{kl}|^2$

V. Заключение

Рассмотрены достоинства и недостатки различных подходов и моделей для расчета фазового шума в автогенераторах. В рамках периодически нестационарной модели предложен метод расчета фазового шума, который основан на решении эквивалентной системы уравнений малосигнального гармонического баланса. Метод позволяет исключить сингулярность матрицы при нулевых смещениях частоты и соответственно устранить вычислительные трудности при расчетах вблизи частоты колебаний. В отличии от методов теории возмущений предложенный метод позволяет определять шум и для достаточно больших смещений, так как влияние амплитудных отклонений учитывается. Полученное выражение для фазовой передаточной функции позволяет реализовать вычисление фазового шума в виде СПМ фазы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-07-00029а

Литература

[1] Малахов А.Н. Флуктуации в автоколебательных системах. - М.: Наука, 1967. - 662 с.

[2] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I Случайные процессы. - М.: Наука, 1976. - 496 с.

[3] Актуальные проблемы моделирования в системах автоматизации схемотехнического проектирования/ под ред. А.Л. Стемпковского – М.: Наука, 2003.-430 с.

[4] Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1961. - 558 с.

[5] Demir A., Mehrotra A., and Roychowdhury J. Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization // *IEEE Trans. on Circuits and Systems* - I. - 2000. - Vol. 47. - PP. 655-674.

[6] Demir A. Phase Noise and Timing Jitter in Oscillators with Colored-Noise Sources. // *IEEE Trans. on Circuits and Systems* - I. - 2002. - Vol. 49. - N 12. - PP. 1782-1791.

[7] Demir A. Computing Timing Jitter From Phase Noise Spectra for Oscillators and Phase-Locked Loops With White and 1/f Noise. // *IEEE Trans. on Circuits and Systems* - I. - 2006. - Vol. 53. - N 9. - PP. 1869-1884.

[8] New Numerical Technique for Cyclostationary Noise Analysis of Oscillators / M. M. Gourary, S. G. Rusakov, S. L. Ulyanov, M. M. Zharov, et al. // *Proc. of 37th European Microwave Conf.* - 2007. - PP. 1173-1176.

[9] Evaluation of Oscillator Phase and Frequency Transfer Functions. / Gourary M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L., Zharov M.M., et al. // In: Scientific Computing in Electrical Engineering, Book series: Mathematics in Industry, 14, Springer, 2010. - PP. 183-190.

[10] Gray P., Meyer R. *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*. - John Wiley & Sons, 1984.

[11] Kaertner, F.X. Determination of the correlation spectrum of oscillators with low noise // *IEEE Trans. Microwave Theory Tech*. - 1989. - Vol. 37. - PP. 90-101.

[12] Kaertner, F.X. Analysis of white and f^{-a} noise in electrical oscillators // I*nt. J. Circ. Theory Appl*. - 1990. - Vol. 18. - PP. 485-519.

[13] Kundert K.S. Introduction to RF Simulation and Its Application // *J. of Solid-State Circuits*. - 1999. - Vol. 34. - N 9. - PP. 1298-1319.

[14] Leeson D. A simple model of feedback oscillator noise spectrum // *Proc. IEEE*. - 1966. - Vol. 54. - PP. 329–330.