УДК 621.38+621.373.1

Разработка методов анализа режима взаимной синхронизации автогенераторов в интегральных схемах

М.М. Гурарий, С.Г. Русаков, С.Л. Ульянов

Учреждение Российской академии наук
Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, ippm@ippm.ru

***Аннотация* — Предложена модель взаимной синхронизации произвольных автогенераторов, паразитные связи которых заданы частотно-зависимыми матрицами проводимостей. Для слабых взаимодействий получена система нелинейных алгебраических уравнений относительно фаз генераторов и общей частоты синхронизации. Представлено решение системы для двух генераторов и его применение в ряде частных случаев. Приведено обобщение полученных результатов на генераторы с дробным соотношением частот.**

***Ключевые слова* — автогенераторы, взаимная синхронизация, паразитные связи, радиотехнические интегральные схемы, системы на кристалле.**

I. Введение

При проектировании автогенераторов в радиотехнических интегральных схемах (ИС) важное место занимает оценка возмущений, вызываемых взаимодействием рассматриваемого генератора с другими блоками ИС через паразитные связи. В частности, взаимодействие с другими генераторами может приводить к возникновению режима взаимной синхронизации [1, 2] с общей частотой, отличной от собственных частот генераторов. Целью данной работы является разработка методов и алгоритмов анализа паразитной синхронизации автогенераторов для их использования в САПР радиотехнических ИС. В результате такого анализа должны быть определены:

- возможность возникновения режима взаимной синхронизации заданной группы автогенераторов;
- значение общей частоты синхронизации при возникновении указанного режима и ее отклонения от собственных частот взаимодействующих генераторов.

К наиболее эффективным методам решения этой задачи следует отнести формирование фазовых алгебраических уравнений, соответствующих стационарному режиму взаимной синхронизации [3, 4]. В рамках таких методов можно получить многие результаты в виде явных аналитических выражений, что является их существенным преимуществом над методами решения дифференциальных уравнений на основе нелинейной фазовой макромодели автогенератора [5, 6].

Известные варианты применения такого подхода имеют ряд ограничений с точки зрения его использования для решения задач паразитной синхронизации. К наиболее существенным относятся следующие:

1. <u>Ограничения на типы взаимодействующих генераторов.</u> В опубликованных работах рассматриваются генераторы синусоидальных колебаний и/или слабо-нелинейные генераторы. На практике паразитное взаимодействие может возникать между генераторами произвольных типов.
2. <u>Ограничения на типы связей между генераторами.</u> Взаимодействие пары генераторов задается, как правило, скалярным коэффициентом передачи от выхода одного генератора на вход другого. В реальных ИС паразитные связи определяются такими элементами как взаимные емкости и индуктивности, цепи питания/подложки и т. д., которые характеризуются комплексными частотно-зависимыми передаточными функциями.
3. <u>Ограничения на соотношение частот генераторов.</u> Известно, что режим взаимной синхронизации может возникать не только между генераторами с близкими собственными частотами, но также между генераторами, соотношения частот которых близки к рациональным дробям [1]. Этот случай не представлен в известных публикациях.

В данной статье предлагается метод анализа паразитной синхронизации автогенераторов, снимающий указанные ограничения.

II. Предварительные замечания

Анализ взаимной синхронизации мы будем проводить на основе уравнения для режима внешней синхронизации произвольного автогенератора с собственной частотой ω_0 и частотой внешнего возбуждения $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, которое имеет вид [7]

$$(\omega - \omega_0)/\omega_0 = W(\mathbf{B}, \phi), \qquad (1)$$

где функция $W(B, \phi)$ определяется как

$$W(\mathbf{B}, \phi) \equiv \sum_{k,l} \mathbf{B}_{kl}\mathbf{V}_{kl}\exp(-jk\phi). \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{B}$ - вектор гармоник возбуждения, $\mathbf{V}$ - вектор проекции возмущений (ВПВ) рассматриваемого генератора. ВПВ характеризует чувствительность фазы генератора к сигналу возбуждения; его определение было впервые приведено в [8], алгоритм расчета можно найти в [9]. Вектора $\mathbf{B}$, $\mathbf{V}$ являются векторами метода гармонического баланса (ГБ) [10], компоненты которых характеризуются двумя индексами - индексом гармоники k и индексом узла схемы l. Мы используем комплексную форму векторов ГБ, что соответствует двустороннему ряду Фурье, поэтому в сумме (2) индекс k принимает и отрицательные значения. При этом W является действительной функцией благодаря комплексной сопряженности соответствующих компонент. Неизвестной величиной в (1) является фаза ϕ.

Уравнение (1) было получено с помощью линеаризации полной системы уравнений генератора, поэтому его погрешность определяется величиной второго порядка по отношению к норме входного сигнала:

$$\Delta\omega / \omega_0 - W(\mathbf{B}, \phi) = O(\|\mathbf{B}\|^2), \quad (3)$$

Из этого следует, что порядок точности не изменится при преобразованиях правой или левой части (1) с погрешностью аналогичного порядка. Например, знаменатель ω_0 в левой части (1) можно заменить на значение внешней частоты $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, так как

$$\Delta\omega / (\omega_0 + \Delta\omega) = \Delta\omega / \omega_0 + O(\Delta\omega^2), \quad (4)$$

а из (1) можно получить оценку $O(\Delta\omega^2) = O(\|\mathbf{B}\|^2)$.

Мы предполагаем, что взаимодействие генераторов осуществляется через паразитные связи, которые характеризуются матрицами комплексных проводимостей $\mathbf{Y}(\omega)$ между узлами генераторов. Величины элементов этих матриц предполагаются достаточно малыми с точки зрения следующих критериев:

1) они обеспечивают достаточно малый сигнал на входных узлах генераторов, позволяющий использовать линеаризованное уравнение (1);

2) они намного меньше входных и выходных проводимостей генераторов, что позволяет пренебречь последними при описании взаимодействия.

Формирование уравнений взаимодействия на основе $\mathbf{Y}(\omega)$ рассмотрим на примере анализа поведения свободного генератора после подключения к нему малых проводимостей с матрицей $\mathbf{Y}(\omega)$. Тогда паразитное периодическое воздействие на генератор будет определяться вектором гармоник $\mathbf{B}^{\mathrm{Y}}(\omega)$ с компонентами

$$\mathbf{B}^{\mathrm{Y}}_{kl}(\omega) = \sum_m \mathbf{Y}_{lm}(k\omega)\mathbf{X}_{km}, \quad (5)$$

где $\mathbf{X}$ - вектор гармоник периодического решения генераторной схемы. Выражение (5) можно записать в матричном виде аналогично выражениям ГБ для токов линейных компонент схемы [10]

$$\mathbf{B}^{\mathrm{Y}}(\omega) = \tilde{\mathbf{Y}}(\omega)\mathbf{X},$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)$ - блочно-диагональная матрица с блоками $\mathbf{Y}(k\omega)$ на главной диагонали.

При достаточно малой матрице проводимостей полная схема сохраняет автогенераторные свойства, но формально ее можно рассматривать как исходный автогенератор, синхронизированный внешним сигналом $\mathbf{B}^{\mathrm{Y}}(\omega)$ (явление самосинхронизации). При этом следует учесть, что фазовый сдвиг сигналов исходного генератора ($\mathbf{X}$) вызывает такой же сдвиг гармоник $\mathbf{B}^{\mathrm{Y}}(\omega)$, поэтому уравнение синхронизации будет выполняться для любой величины сдвига, если оно выполняется для нулевого сдвига, то есть (1) можно записать в векторном виде как

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = W(\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0 + \Delta\omega)\mathbf{X}, 0) = \mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0 + \Delta\omega)\mathbf{X}, \quad (6)$$

где верхний индекс T означает транспонирование.

Это нелинейное уравнение относительно отклонения частоты $\Delta\omega$ можно упростить, если линеаризовать $\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)$ в точке ω_0

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0 + \Delta\omega) = \tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0) + \tilde{\mathbf{Y}}'(\omega_0) \cdot \Delta\omega, \quad (7)$$

где $\tilde{\mathbf{Y}}'(\omega_0) = \left.\frac{d}{d\omega}\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)\right|_{\omega = \omega_0}$ - это производная по частоте от расширенной матрицы проводимостей $\tilde{\mathbf{Y}}(\omega)$.

После подстановки (7) в (6) и решения полученного линейного уравнения найдем

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0)\mathbf{X}}{1 + \omega_0\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{Y}}'(\omega_0)\mathbf{X}}, \quad (8)$$

Вводя естественное предположение, что производная от матрицы проводимостей имеет тот же порядок, что и сама матрица, найдем, что пренебрежение малым членом в знаменателе (8) приводит к ошибке второго порядка по отношению к входному сигналу

$$\Delta\omega = \omega_0\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0)\mathbf{X} + O(\|\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0)\mathbf{X}\|^2), \quad (9)$$

Как было указано выше, такая ошибка соответствует погрешности исходного уравнения (3) и ею можно пренебречь. Отклонение частоты генератора в результате подключения к нему малых проводимостей $\mathbf{Y}(\omega)$ можно назвать поправкой на самосинхронизацию $\Delta\omega^{\mathrm{self}}$, которая в соответствии с (9) определится как

$$\Delta\omega^{\mathrm{self}} = \omega_0\mathbf{V}^T\tilde{\mathbf{Y}}(\omega_0)\mathbf{X}, \quad (10)$$

Например, с помощью (10) можно определить отклонение частоты генератора при подключении малой емкости c_l к его l-му узлу. При этом единственным ненулевым элементом матрицы проводимостей является $\mathbf{Y}_{ll}(\omega) = j\omega c_l$, что приводит (10) к виду

$$\Delta\omega^{\text{self}} = 2c_l Re \sum_{k>0} k\mathbf{V}_{kl}\mathbf{X}_{kl}.$$

III. Система фазовых уравнений для взаимно-синхронизированных автогенераторов

Пусть имеется n автогенераторов с близкими частотами ω_i, и воздействие сигналов $\mathbf{X}^j$ j-го генератора на входные токи i-го генератора описывается передаточными матрицами $\mathbf{Y}^{ij}(\omega)$. Тогда в режиме синхронизации с общей частотой ω и фазами ϕ_i уравнение (1) для i-го генератора запишется в виде

$$\frac{\omega - \omega_i}{\omega_i} = \sum_{j=1}^{n} W^i(\tilde{\mathbf{Y}}^{ij}(\omega)\mathbf{X}^j, \phi_i - \phi_j), \tag{11}$$

где W^i - это функция (2), соответствующая ВПВ i-го генератора $\mathbf{V}^i$.

Множество уравнений (11) для всех генераторов образует алгебраическую систему n уравнений относительно n+1 неизвестных: фаз $\phi_1, \ldots, \phi_n$ и общей частоты ω. Учитывая, что совокупность взаимно синхронизированных генераторов эквивалентна одному генератору свободных колебаний, определенных с точностью до некоторой постоянной фазы, мы можем зафиксировать значение одной из фаз, например $\phi_n = 0$. В результате (11) становится системой n уравнений относительно n неизвестных $\omega, \phi_1, \ldots, \phi_{n-1}$.

Аналогично приведенному выше анализу точности для случая самосинхронизации (9) можно показать, что порядок точности (11) не изменится, если в правой части (11) заменить неизвестную частоту синхронизации ω на любую из собственных частот генераторов ω_i или на некоторое усредненное значение $\bar{\omega}$, например $\bar{\omega} = \Sigma_i \omega_i / n$. Тогда вектор воздействия j-го генератора на i-й генератор ($\mathbf{B}^{ij}$) не зависит от ω и может быть представлен как

$$\mathbf{B}^{ij} = \tilde{\mathbf{Y}}^{ij}(\bar{\omega}) \cdot \mathbf{X}^j. \tag{12}$$

Также с учетом (4) можно без потери порядка точности заменить ω_i на $\bar{\omega}$ в знаменателе левой части (11). После таких изменений система (11) с подстановкой выражения (12) принимает вид

$$\frac{\omega - \omega_i}{\bar{\omega}} = \sum_j W^i(\mathbf{B}^{ij}, \phi_i - \phi_j). \tag{13}$$

Можно избавиться от диагональных членов (i=j) в (13), учтя поправку на самосинхронизацию (10) в виде

$$\Delta\omega_i^{\text{self}} = \bar{\omega} \cdot (\tilde{\mathbf{Y}}^{ii}(\bar{\omega}) \cdot \mathbf{X}^i)^T \cdot \mathbf{V}^i \tag{14}$$

для модификации значений собственных частот генераторов

$$\bar{\omega}_i = \omega_i + \Delta\omega_i^{\text{self}}. \tag{15}$$

В результате получим систему уравнений

$$\frac{\omega - \bar{\omega}_i}{\bar{\omega}} = \sum_{j \neq i} W^i(\mathbf{B}^{ij}, \phi_i - \phi_j), \tag{16}$$

Все уравнения (16) линейно зависят от неизвестной частоты синхронизации ω. Поэтому мы можем исключить ее из системы, вычитая n-е уравнение из остальных уравнений. В результате получим систему из n-1 уравнения относительно n-1 неизвестных фаз ϕ_i. Такая нелинейная система с немонотонными зависимостями уравнений от неизвестных может как иметь несколько решений, так и вообще не иметь решений. В общем случае, определение условий существования решений такой системы (т.е. условий синхронизации) и нахождение самих решений требует разработки достаточно сложного алгоритма, что выходит за рамки данной работы. Ниже мы рассмотрим случай взаимной синхронизации двух генераторов, для которого такие условия могут быть легко определены.

Для двух связанных генераторов (16) принимает вид

$$\begin{aligned} (\omega - \bar{\omega}_1)/\bar{\omega} &= W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) \\ (\omega - \bar{\omega}_2)/\bar{\omega} &= W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi) \end{aligned}, \tag{17}$$

Здесь $\phi = \phi_1$, $\phi_2 = 0$, а $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$, определены из (14, 15). Вычитая второе уравнение из первого, получим уравнение относительно фазы первого генератора

$$\frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}} = W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) - W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi). \tag{18}$$

После определения фазы ϕ из (18) мы можем найти значение частоты синхронизации из любого уравнения системы (17)

$$\omega = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega} W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) \tag{19}$$

$$\text{или } \omega = \bar{\omega}_2 + \bar{\omega} W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi), \tag{20}$$

Решение уравнения (18) существует, если разность собственных частот генераторов находится в области значений правой части (18), то есть

$$\min_{\phi}(W^{\text{diff}}(\phi)) \le \frac{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}{\bar{\omega}} \le \max_{\phi}(W^{\text{diff}}(\phi)), \qquad (21)$$

где $W^{\text{diff}}(\phi) = W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) - W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi)$. (22)

Неравенство (21) определяет условия синхронизации (диапазон захвата) двух заданных генераторов.

Решение уравнения (18) и определение диапазона захвата (21-22) могут быть получены алгоритмом сканирования значений фазы на достаточно плотном множестве точек в интервале $0 \le \phi < 2\pi$.

IV. Важные частные случаи

А. Генераторы с равными собственными частотами

Пусть $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}$. Тогда (18, 19) имеют вид

$$W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) - W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi) = 0, \qquad (23)$$

$$\omega = \bar{\omega}(1 - W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi)), \qquad (24)$$

Из (23, 24) видно, что частота синхронизации совпадает с частотой генераторов ($\omega = \bar{\omega}$), при условии $W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) = W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi) = 0$. Это условие выполняется в симметричном случае, когда взаимодействие двух идентичных генераторов удовлетворяет принципу взаимности $\tilde{\mathbf{Y}}^{1,2} = \tilde{\mathbf{Y}}^{2,1}$, то есть $\mathbf{B}^{1,2} = \mathbf{B}^{2,1}$. При этом (23) имеет решения $\phi = 0$ и $\phi = \pi$. Совпадение частот имеет место для $\phi = 0$.

Отметим, что в общем случае частота синхронизации двух произвольных генераторов отличается от общего значения их собственных частот, то есть частота генератора может измениться в результате паразитной связи с генератором с такой же частотой.

Б. Влияние паразитной обратной связи при внешней синхронизации генератора

Стандартный режим внешней синхронизации генератора (1) предполагает одностороннюю связь между синхронизируемым генератором и генератором синхронизирующего сигнала. Такой режим можно рассматривать как частный случай (17) при $\mathbf{Y}^{2,1}(\omega) = 0$, что влечет за собой $\mathbf{B}^{2,1} = 0$. В этом случае (18) принимает вид, аналогичный (1)

$$(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)/\bar{\omega} = W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi), \qquad (25)$$

а из (19) получаем естественный результат $\omega = \bar{\omega}_2$, то есть, при односторонней связи общая частота совпадает с частотой синхронизирующего генератора.

Рассмотрим теперь случай когда, помимо прямого воздействия второго генератора на первый, имеется намного более слабое воздействие первого генератора на второй $|W^2(\mathbf{B}^{2,1}, \phi)| \ll |W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi)|$. Тогда решение (17) можно искать в виде $\phi = \phi_0 + \Delta\phi$ с малым $\Delta\phi$, где ϕ_0 - решение (25). После такой подстановки и линеаризации полученного уравнения относительно $\Delta\phi$ получим $D \cdot \Delta\phi = W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0)$, или

$$\Delta\phi = W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0)/D, \qquad (26)$$

где $D = \left.\frac{d}{d\phi}(W^1(\mathbf{B}^{1,2}, \phi) - W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi))\right|_{\phi = \phi_0}$

Приняв $\bar{\omega} = \bar{\omega}_2$, запишем (20) в виде

$$\omega = \bar{\omega}_2(1 - W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0 - \Delta\phi)). \qquad (27)$$

Из (26) следует, что $\Delta\phi = O(|W^2|) = O(\|\mathbf{B}^{2,1}\|)$, поэтому линеаризация $W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0 - \Delta\phi)$ относительно $\Delta\phi$ приводит к оценке

$$W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0 - \Delta\phi) = W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0) + O(\|\mathbf{B}^{2,1}\|^2),$$

то есть величиной $\Delta\phi$ в (27) можно пренебречь, после чего получить значение отклонения от частоты синхронизирующего генератора ($\Delta\omega = \bar{\omega}_2 - \omega$) в виде

$$\Delta\omega = \bar{\omega}_2 W^2(\mathbf{B}^{2,1}, -\phi_0). \qquad (28)$$

Отклонение $\Delta\omega$ - это результат действия паразитной обратной связи. Из (28) видно, что эта величина не зависит от собственной частоты синхронизируемого генератора, и при равенстве собственных частот генераторов она, вообще говоря, ненулевая. То есть, как и в общем случае, возмущение частоты возможно и при совпадении частот генераторов.

В. Зависимости от коэффициента взаимодействия

Рассмотрим часто встречающийся на практике случай, когда степень взаимодействия генераторов линейно зависит от одного параметра - коэффициента взаимодействия генераторов γ:

$$\mathbf{Y}^{ij}(\bar{\omega}) = \gamma \cdot \mathbf{y}^{ij}(\bar{\omega}), \qquad (29)$$

где $\mathbf{y}^{ij}(\bar{\omega})$ - матрица взаимных проводимостей при единичном значении коэффициента взаимодействия.

Например, коэффициентом взаимодействия может быть величина емкости, соединяющей генераторы, величина взаимной индуктивности между контурами генераторов, общая величина сопротивления заземления генераторов и т. д.

Учитывая линейную зависимость функций W от гармоник сигналов (2), из (29) получим

$$W(\mathbf{B}, \phi) = \gamma \cdot W(\mathbf{b}, \phi),$$

где $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{y}}(\bar{\omega}) \cdot \mathbf{X}$ - вектор токов взаимодействия при единичном значении коэффициента.

Тогда, в случае одного генератора, поправка частоты на самосинхронизацию (10) запишется в виде линейной зависимости от коэффициента взаимодействия

$$\Delta\omega^{\text{self}} = \gamma \cdot \delta\omega^{\text{self}}, \qquad (30)$$

где $\delta\omega^{\mathbf{self}} = \bar{\omega} \cdot \mathbf{b}^T \mathbf{V}$,

В случае двух генераторов фазовое уравнение (18) преобразуется к виду

$$(\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1)/\bar{\omega} = \gamma \cdot w^{\text{diff}}(\phi), \qquad (31)$$

где $w^{\text{diff}}(\phi) = W^{(1)}(\mathbf{b}^{1,2}, \phi) - W^{(2)}(\mathbf{b}^{2,1}, -\phi)$.

Диапазон захвата (21) также линейно зависит от коэффициента взаимодействия

$$\gamma \cdot \max_{\phi}(w^{\text{diff}}(\phi)) \le \frac{\omega_1 - \omega_2}{\bar{\omega}} \le \gamma \cdot \min_{\phi}(w^{\text{diff}}(\phi)), \qquad (32)$$

В границах диапазона захвата решение уравнения (31) определяет неявную зависимость фазы от коэффициента взаимодействия и разности собственных частот генераторов $\phi(\gamma, \Delta\omega)$.

После подстановки $\phi(\gamma, \Delta\omega)$ в (24) можно легко определить общий вид зависимости частоты синхронизации от коэффициента взаимодействия и разности собственных частот $\omega(\gamma, \Delta\omega)$

$$\frac{\bar{\omega} - \omega(\gamma, \Delta\omega)}{\bar{\omega}} = \gamma \cdot W^1(\mathbf{b}^{1,2}, \phi(\gamma, \Delta\omega)), \qquad (33)$$

При равных собственных частотах генераторов фаза не зависит от коэффициента взаимодействия, то есть $\phi(\gamma, 0) = \phi_0$, где ϕ_0 определяется из решения (31) с нулевой левой частью: $w^{diff}(\phi_0) = 0$, а отклонение частоты синхронизации от общей частоты генераторов пропорционально коэффициенту взаимодействия

$$\frac{\bar{\omega} - \omega(\gamma, \Delta\omega)}{\bar{\omega}} = \gamma \cdot W^1(\mathbf{b}^{1,2}, \phi_0), \qquad (34)$$

Выражение для отклонения частоты синхронизированного генератора под влиянием паразитной обратной связи (28) можно записать также в виде линейной зависимости от коэффициента взаимодействия

$$\Delta\omega = \gamma\bar{\omega}_2 W^2(\mathbf{b}^{2,1}, -\phi_0). \qquad (35)$$

V. Взаимная синхронизация автогенераторов при рациональном соотношении частот.

Эффект синхронизации может возникать не только при взаимодействии генераторов с близкими частотами, но и в случае, когда отношение частот генераторов близко к рациональной дроби [2]. В этом разделе мы рассмотрим этот случай, начиная с генератора, находящегося под внешним возбуждением (1). Пусть соотношение частоты возбуждения ω и собственной частоты генератора ω_0 определяется как $\omega \approx (p/q)\omega_0$, где p, q - взаимно простые целые числа. Разделив это выражение на p получим

$$\omega/p \approx \omega_0/q. \qquad (36)$$

Учтем, что любой периодический процесс с периодом Т (и круговой частотой $\omega = 2\pi/T$) можно также рассматривать как процесс с периодом $T' = kT$ (и частотой $\omega' = \omega/k$). При этом ненулевые гармоники нового процесса - это $A'_{ki} = A_i$ ($i = 0, \pm1, \pm2, \dots$). Например, при $k = 2$ новые гармоники имеют вид

$$A' = [A'_1, A'_2, A'_3, \dots] = [0, A_1, 0, A_2, 0, A_3 \dots] \qquad (37)$$

Поэтому мы можем рассматривать случай (36) как генератор с собственной частотой $\omega'_0 = \omega_0/q$ под воздействием возбуждения с частотой $\omega' = \omega/p$, что соответствует задаче (1). Тогда, подставив новые разреженные вектора $\mathbf{B}'$, $\mathbf{V}'$ в (2) и отбросив нулевые члены, можно получить

$$W(\mathbf{B}', \phi') = \sum_{k,l} \mathbf{B}_{q\cdot kl} \mathbf{V}_{p\cdot kl} \exp(-jp \cdot q \cdot k\phi'). \qquad (38)$$

В этом выражении ϕ' представляет собой фазу генератора, рассматриваемого как источник колебаний с частотой $\omega'_0 = \omega_0/q$. Если же рассматривать сигналы генератора с их естественной частотой ω_0, то их фаза будет в q раз меньше - $\phi = \phi'/q$, и (38) запишется как

$$W(\mathbf{B}', \phi) = \sum_{k,l} \mathbf{B}_{q\cdot k,l} \mathbf{V}_{p\cdot k,l} \exp(-jp \cdot k\phi). \qquad (39)$$

Тогда (1) в случае (36) можно представить в виде

$$\frac{q\omega - p\omega_0}{p\omega_0} = W_{p,q}(\mathbf{B}, p \cdot \phi). \qquad (40)$$

$$\text{где } W_{p,q}(\mathbf{B}, \phi) \equiv \sum_{k,l} \mathbf{B}_{q\cdot k,l} \mathbf{V}_{p\cdot k,l} \exp(-jk\phi) \qquad (41)$$

Здесь мы ввели два индекса в функцию W. "Старое" определение (2) соответствует единичным значениям индексов - $W(\mathbf{B}, \phi) \equiv W_{1,1}(\mathbf{B}, \phi)$.

Рассмотрим теперь общий случай синхронизации взаимосвязанных генераторов, соотношения частот которых близки к рациональным дробям. При этом достаточно определить отношения частоты одного из генераторов к частотам остальных генераторов

$$\omega_1/\omega_i \approx p_i/q_i \ \ (p_1 = q_1 = 1)\,. \qquad (42)$$

Тогда (42) обеспечивает рациональные отношения частот любых двух генераторов

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{\omega_1/\omega_j}{\omega_1/\omega_i} \approx \frac{p_i/q_j}{p_j/q_i} = \frac{p_i q_j}{p_j q_i}, \qquad (43)$$

Обозначив, m_1 как наименьшее общее кратное величин $p_1,...,p_n$, а $m_i = (m_1/p_i)\cdot q_i$, получим из (43)

$$\omega_1/m_1 \approx \omega_i/m_i \ \ (i = 2, \ldots, n) \qquad (44)$$

После записи (16) относительно общей частоты ω' и частот генераторов ω_i/m_i преобразования, аналогичные (37-40) приводят к системе

$$\frac{\omega' - \bar{\omega}_i/m_i}{\bar{\omega}'} = \sum_{j \neq i} W^i_{r_{ij}r_{ji}}(\mathbf{B}^{i,j}, p_{ij}\phi_i - p_{ji}\phi_j) \qquad (45)$$

Здесь $\bar{\omega}' = \Sigma_i(\bar{\omega}_i/m_i)/n$, $\mathbf{B}^{(i,j)} = \tilde{\mathbf{Y}}^{(i,j)}(m_i\bar{\omega}')\mathbf{X}^{(j)}$, где $\bar{\omega}_i$ определены в (15). В (45) используются функции (41), индексы которых представляют сокращенные дроби (43), т.е. r_{ij}, r_{ji} это взаимно простые целые числа, для которых $r_{ij}/r_{ji} = p_i q_j/p_j q_i$,

В случае синхронизации двух взаимосвязанных генераторов с соотношением частот $\omega_1/\omega_2 \approx p/q$ система (45) принимает вид аналогичный (17)

$$\begin{aligned} \frac{\omega' - \bar{\omega}_1/p}{\bar{\omega}'} &= W^1_{pq}(\mathbf{B}^{1,2}, p\phi) \\ \frac{\omega' - \bar{\omega}_2/q}{\bar{\omega}'} &= W^2_{qp}(\mathbf{B}^{2,1}, -q\phi) \end{aligned}, \qquad (46)$$

Исключив ω' из (46), получим фазовое уравнение

$$\frac{p\bar{\omega}_2 - q\bar{\omega}_1}{pq\bar{\omega}'} = W^1_{pq}(\mathbf{B}^{1,2}, p\phi) - W^2_{qp}(\mathbf{B}^{2,1}, -q\phi), \quad (47)$$

после решения которого можно найти общую частоту

$$\omega' = \bar{\omega}_1/p + \bar{\omega}' W^1_{pq}(\mathbf{B}^{1,2}, p\phi)\,, \qquad (48)$$

а затем частоты генераторов в режиме синхронизации

$$\omega_1^{\text{lock}} = p\omega'\,,\ \omega_2^{\text{lock}} = q\omega'\,. \qquad (49)$$

Из (47-49) можно получить зависимости от коэффициента взаимодействия аналогичные (31-35).

VI. Заключение

В работе получена система алгебраических уравнений для режима взаимной синхронизации произвольных автогенераторов при описании их связей комплексными частотно-зависимыми матрицами проводимостей. Выполнен анализ случая дробного соотношения частот генераторов. Для двух генераторов получен алгоритм проверки условий и определения общей частоты синхронизации. Получено выражение для отклонения частоты в режиме внешней синхронизации при наличии паразитной обратной связи между синхронизируемым и синхронизирующим генераторами. Основные выражения представлены также в форме зависимостей от коэффициента взаимодействия генераторов. Предложенные модельные уравнения расширяют возможности программного обеспечения цикла анализа автогенераторных схем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-07-00029-а.

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. - М.: Наука, 1974. - 408 с.

[2] Стратонович Р.Л.. Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. - М.: Сов. радио, 1961. - 558 с.

[3] York R.A. Injection- and Phase-Locking Techniques for Beam Control // IEEE Trans. Microw. Theory Tech. - 1998. - V. 46. - № 11. - P. 1920-1929.

[4] Razavi B. Mutual Injection Pulling Between Oscillators // IEEE Custom Intergrated Circuits Conference (CICC). - 2006. - P. 675-678.

[5] Lai X., Roychowdhury J. Fast and accurate simulation of coupled oscillators using nonlinear phase macromodels // IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. digest. - 2005. - P. 871–874.

[6] Harutyunyan D. Rommes J., ter Maten J., Schilders W. Simulation of mutually coupled oscillators using nonlinear phase macromodels // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. - 2009. - V. 28 - № 10. - P. 1456-1466.

[7] Гурарий М.М., Ульянов С.Л. Анализ условий синхронизации автогенераторов // Известия вузов. ЭЛЕКТРОНИКА. 2009. - № 5(79). - С. 57-65.

[8] Demir A., Mehrotra A., Roychowdhury J. Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization // IEEE Trans. Circuits Systems - I. - 2000. - V. 47. - № 5. - P. 655-674.

[9] Demir A., Long D. Roychowdhury J. Computing phase noise eigenfunctions directly from steady-state Jacobian matrices // Proc. Int. Conf. on Computer-Aided Design. - 2000. - P. 283-288.

[10] Kundert K.S., White J., Sangiovanni-Vincentelli A. Steady-State Methods for Simulating Analog and Microwave Circuits. - Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990. - 247 p.