

Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров

В.А. Лесников, Т.В. Наумович, А.В. Частиков

Вятский государственный университет,
leslex.vlad@gmail.com, ntv_new@mail.ru, alchast@mail.ru

Аннотация — Предлагается новая методика проектирования рекурсивных цифровых фильтров. Она основана на применении теоретико-числовых и алгебраических аспектов синтеза на функциональном и структурном уровнях. Этот подход ориентирован на реализацию цифровых фильтров на ПЛИС и заказных СБИС.

Ключевые слова — Рекурсивные цифровые фильтры, проектирование, передаточная функция, нули, полюсы, дискретизация z-плоскости, рациональные числа, алгебраические числа, структурный синтез.

I. ВВЕДЕНИЕ

Традиционный подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров (ЦФ) включает следующие этапы [1] – [3].

1. **Вычисление передаточной функции рекурсивного ЦФ n -го порядка.**

Частотная характеристика такого ЦФ должна удовлетворять заданным требованиям. При этом конечность длины разрядной сетки не принимается во внимание. Коэффициенты передаточной функции

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}, \quad b_0 = 1 \quad (1)$$

удовлетворяют условию

$$a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где where \mathbb{R} - множество вещественных чисел. Нули z_{zj} и полюсы z_{pi} передаточной функции $H(z)$ удовлетворяют условию

$$z_{zj}, z_{pi} \in \mathbb{C}, \quad i = 1 \dots n, \quad (3)$$

где $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ - множество комплексных чисел.

2. **Выбор структурной схемы Str_k для реализации рекурсивного ЦФ.**

Параметрами структурной схемы являются коэффициенты цифрового фильтра

$$c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1 \dots n_{mpy}. \quad (4)$$

В этом случае количество коэффициентов n_{mpy} определяется типом структурной схемы. На этом этапе рассматриваются структурные схемы Str_k из некоторого подмножества $\tilde{\mathcal{S}}$ бесконечного множества возможных структурных схем \mathcal{S}

$$Str_k \in \tilde{\mathcal{S}} \subset \mathcal{S}. \quad (5)$$

В широко применяемых на практике системах проектирования ЦФ мощность подмножества \mathcal{S} очень мала. Например, в системе Матлаб используются только следующие структуры [1] – [3]:

- прямая форма;
- последовательное соединение звеньев второго порядка, реализованных в прямой форме;
- транспонированная прямая форма;
- последовательное соединение звеньев второго порядка, реализованных по транспонированной прямой форме;
- каноническая форма;
- последовательное соединение звеньев второго порядка, реализованных по канонической форме;
- транспонированная каноническая форма;
- последовательное соединение звеньев второго порядка, реализованных по транспонированной канонической форме;
- последовательное соединение всепропускающих звеньев с минимальным числом умножителей;
- последовательное соединение всепропускающих волновых фильтров.

3. **Квантование коэффициентов ЦФ.**

Вследствие ограничения длины разрядной сетки коэффициенты передаточной функции, рассчитанной на этапе 1, представляются с ошибкой. В результате этого

с ошибкой реализуются и нули, и полюсы цифрового фильтра. Частотная характеристика ЦФ может выйти за пределы установленных допусков.

4. Анализ характеристик ЦФ с коэффициентами с ограниченной разрядностью.

На этом этапе оцениваются частотная характеристика, шумы округления, обнаруживается наличие предельных циклов. По результатам анализа принимается решение либо об увеличении длины разрядной сетки, либо о возврате на предыдущие этапы, либо об удовлетворительности результатов синтеза.

Этап 1 соответствует функциональному уровню описания оператора цифровой фильтрации, а этапы 2 – 4 – структурному.

Оставшиеся этапы проектирования в данной работе не рассматриваются.

Рассмотренный подход к проектированию ЦФ является несовершенным и приводит к неэффективной практической реализации ЦФ. Во первых, не учитываются фундаментальные особенности рекурсивных ЦФ, описанных в работах авторов [5] – [7]. Во-вторых, рассматривается слишком малое число структур. В-третьих, результаты структурного синтеза искажают результаты функционального синтеза.

Цель данной работы – внести вклад в устранение указанных недостатков.

II. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫЕ АСПЕКТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ЦФ НА ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРОВНЕ

На функциональном уровне предлагаемый подход предполагает окончательное определение передаточной функции с учетом ограниченной длины разрядной сетки коэффициентов ЦФ.

Вследствие конечной разрядности коэффициентов ЦФ и использования позиционной системы счисления как коэффициенты ЦФ c_j , так и коэффициенты передаточной функции a_i, b_i являются рациональными числами

$$c_j, a_i, b_i \in \mathbb{Q}, \quad j = 1 \dots n_{mpy}, \quad i = 1 \dots n. \quad (6)$$

С учетом конкретной разрядности коэффициентов соотношение (6) может быть преобразовано следующим образом

$$c_j \in \mathbb{Q}_{fc}, \quad j = 1 \dots n_{mpy}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{Q}_{fi}, \quad i = 1 \dots n, \quad (7)$$

$$\mathbb{Q}_{fc} \subset \mathbb{Q}_{fi} \subset \mathbb{Q},$$

где $fc \in \mathbb{Z}$ – длина дробной части коэффициентов ЦФ c_j (длина мантиссы коэффициентов c_j), $fi \in \mathbb{Z}$ – длина мантиссы коэффициентов передаточной функции a_i, b_i , \mathbb{Q}_f – множество двоичных рациональных чисел с длиной мантиссы, равной f , $f = fc$ или $f = fi$.

Корни полиномов, коэффициенты которых – рациональные числа, являются элементами множества алгебраических чисел \mathbb{K} [4]. Поэтому нули и полюсы ЦФ – алгебраические числа

$$z_{zi}, z_{pi} \in \mathbb{K}. \quad (8)$$

Теоретико-числовые аспекты проектирования ЦФ подробно описаны в работах авторов [5] – [7].

При практической реализации ЦФ высоких порядков обычно применяется каскадное соединение звеньев первого и второго порядка [1] – [3]. Такая реализация основана на декомпозиции

$$H(z) = \prod_{i=1}^{n1} H_{i1}^{[1]}(z) \prod_{i2=1}^{n2} H_{i2}^{[2]}, \quad (9)$$

где $n1$ и $n2$ – число звеньев первого и второго порядка соответственно, $n1 + 2n2 = n$, $H_i^{[j]}(z)$ – передаточная функция звена j -го порядка. Однако, такая декомпозиция справедлива только для полиномов с коэффициентами, принадлежащими множеству алгебраических чисел, а не множеству рациональных чисел. Например,

$$x^4 + \frac{29}{16}x^2 + 1 = \left(x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x + 1\right) \left(x^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}x + 1\right).$$

В этом примере

$$1 \in \mathbb{Q}, \quad \frac{29}{16} \in \mathbb{Q}, \quad \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \in \mathbb{K}, \quad \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \notin \mathbb{Q}.$$

Это обстоятельство приводит к заключению о том, что каскадная реализация ЦФ высоких порядков приводит к уменьшению мощности множества возможных значений нулей и полюсов (рис. 1).

На рис. 1(а) показана топография возможных нулей и полюсов z_e в первом квадранте z -плоскости. z_e являются элементами подмножества алгебраических чисел второй степени при условии, что длина мантиссы коэффициентов передаточной функции равна 2 ($z_e \in \mathbb{K}_2^{[2]}$). На рис. 1(б) – топография алгебраических чисел четвертой степени с такой же длиной мантиссы коэффициентов передаточной функции ($z_e \in \mathbb{K}_2^{[4]}$). На рис. 1(в) и 1(г) – топография для $z_e \in \mathbb{K}_3^{[2]}$ и $z_e \in \mathbb{K}_3^{[2]}$ соответственно.

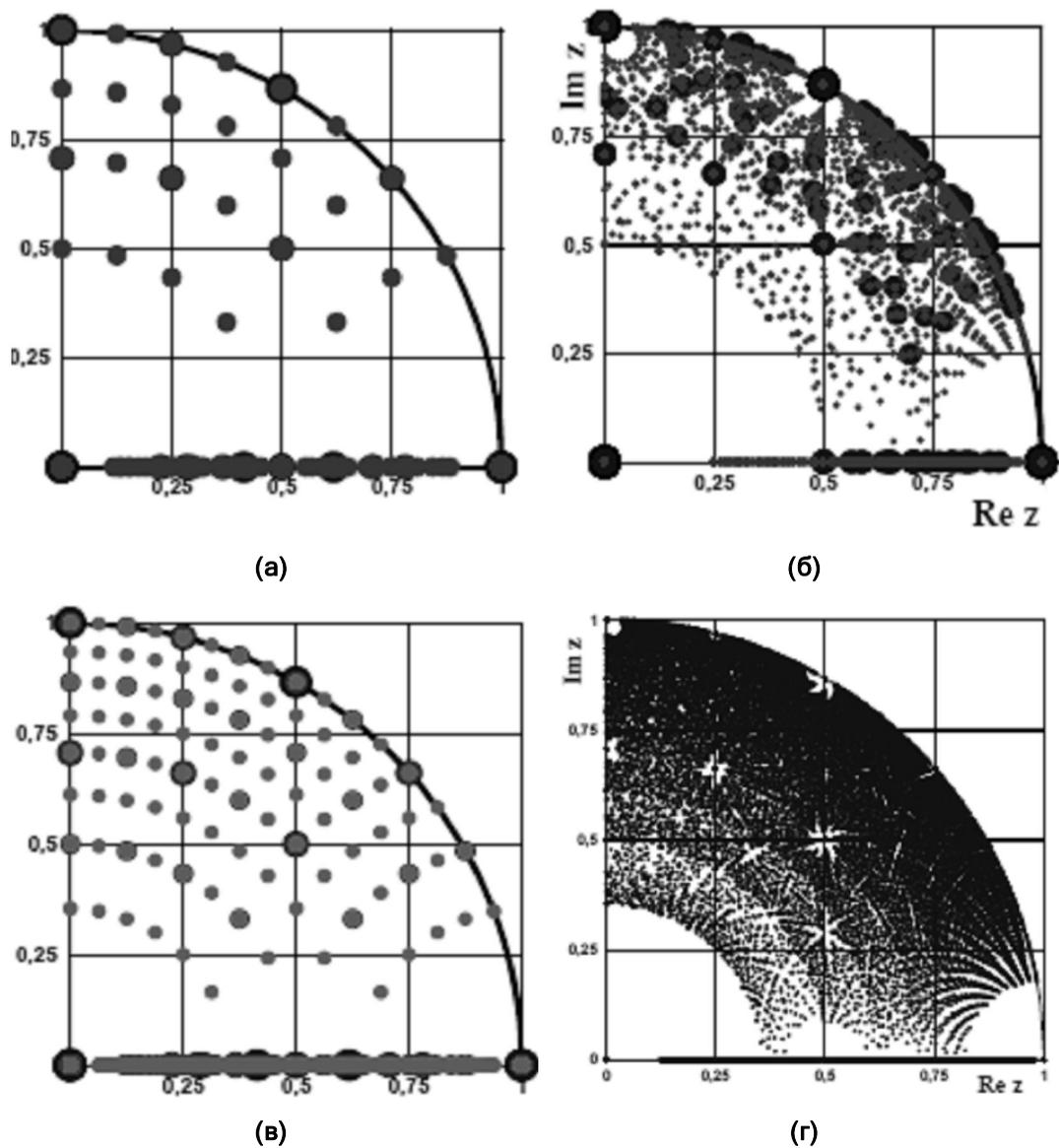


Рис. 1. Возможные положения нулей и полюсов для звеньев второго (а), (в) и четвертого (б), (г) порядков в первом квадранте z -плоскости

Анализ рис. 1 показывает, что мощность множества возможных значений нулей или полюсов $z_e \in \mathbb{K}_{fc}^{[ni]}$ может быть увеличена либо за счет увеличения длины мантиссы коэффициентов (f_i), либо за счет увеличения степени алгебраических чисел (ni).

III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕКУРСИВНЫХ ЦФ НА СТРУКТУРНОМ УРОВНЕ

Как отмечалось выше, при традиционном подходе проектирование на структурном уровне основано на выборе из небольшого числа структурных схем ЦФ [1]

– [3]. Однако, известно гораздо большее число структур [8], [9]. Очевидно, что множество \mathcal{S} всех возможных структур бесконечно.

Для усовершенствования процедуры проектирования ЦФ на структурном уровне необходима разработка алгоритма генерации структур ЦФ. Известны алгоритмы представления ЦФ в пространстве состояний [10] – [13]. Однако, между множеством структур и множеством описаний структур в пространстве состояний отсутствует взаимно-однозначное соответствие.

В работах [14] – [15] для генерации структур используется подход, основанный на непосредственном матричном описании структуры и алгебраических преобразованиях этих матриц. Однако, этот подход с одной стороны избыточен, а с другой не позволяет генерировать все возможные структуры.

В работах [5] - [7], [16] – [18] авторы данного доклада предложили подход к проектированию ЦФ на структурном уровне, обеспечивающий генерацию всех возможных структур. Этот подход позволяет также осуществить перенумерацию сгенерированных структур, определять свойства структур по их описанию. Предложенный подход основан на теории дискретных цепей, описанной в [19].

При этом подходе структура ЦФ описывается топологической матрицей – квадратной матрицей, элементы которой являются коэффициентами передачи между узлами структурной схемы. Топологическая матрица физически реализуемых (вычислимых) структур ЦФ (отсутствуют контуры без элементов задержки) сводится к форме [19], которую назовем канонической. В такой форме все элементы, отличные от нуля и z^{-1} , расположены ниже главной диагонали. Генерация структур ЦФ сводится к генерации топологических матриц.

Степень алгебраических чисел, являющихся нулями или полюсами, показатели сложности и точности являются свойствами структур, определяемыми их обозначением.

Изучение тонкой структуры топологической матрицы позволяет выполнить перенумерацию всех возможных структур ЦФ. Предложена методика назначения каждой структуре идентификатора. Идентификаторы содержат большой объем информации. Идентификатор можно использовать для извлечения информации о свойствах ЦФ с данной структурой. По идентификатору можно восстановить топологическую матрицу.

Предложенная методика позволяет осуществить выбор структуры ЦФ с заданной точностью и сложностью.

Выбор структуры ЦФ определяет структуру его коэффициентов. Для определения структуры коэффициентов необходимо выразить коэффициенты передаточной функции (a_i, b_i) через коэффициенты ЦФ (c_i) . Структура коэффициентов различна для различных структур ЦФ и может быть определена по идентификатору структуры ЦФ.

IV. АЛГОРИТМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ

На рис. 2 представлена схема алгоритма проектирования на функциональном уровне, соответствующая предлагаемому подходу.



Рис. 2. Функциональный уровень проектирования

На функциональном уровне сначала задаются степень алгебраических чисел (ni) и длина мантиссы коэффициентов (fc). После этого выполняется поиск нулей и полюсов на множестве $\mathbb{K}_{fc}^{[ni]}$. При отрицательном результате при неизменяемом ni увеличивают fc или, при неизменяемом fc , увеличивают ni .

Поиск нулей и полюсов (блок 8.б алгоритма, представленного на рис. 2) на настоящий момент формализован только для случая алгебраических чисел второй степени [6]. Для алгебраических чисел более высокой степени приходится осуществлять поиск в пространстве коэффициентов соответствующей канонической формы [7] (блок 8.а алгоритма, представленного на рис. 2). Эти два подхода эквивалентны, однако, если в пространстве полюсов проверка на устойчивость фильтра осуществляется просто (модули всех полюсов должны быть меньше единицы), то в пространстве коэффициентов эта проверка осуществляется гораздо сложнее. Для ЦФ второго порядка условие устойчивости заключается в том, что коэффициенты должны находиться в так называемом «треугольнике устойчивости» [8]. В работе авторов данного доклада [20] введено понятие «тело устойчивости в n -мерном пространстве» для ЦФ n -го порядка. Коэффициенты устойчивого ЦФ должны находиться внутри этого тела. Другой подход к проверке устойчивости основан на вычислении полюсов по коэффициентам ЦФ.

Выбор альтернатив по блокам 4 и 10 на настоящее время не формализован.

На рис. 3 представлена схема алгоритма проектирования на структурном уровне, соответствующая предлагаемому подходу.

На структурном уровне, по требованиям к точности и к сложности структуры ЦФ, устанавливаются требования к структуре коэффициентов. Структура коэффициентов используется для выбора структуры ЦФ. Точные значения нулей и полюсов, вычисленные на функциональном уровне, используются для параметрического синтеза – расчета коэффициентов фильтра. После анализа шумов округления, наличия предельных циклов изменяется или структура коэффициентов, или структура ЦФ. Понятие структура коэффициентов введено в работах [7] и [20] авторов настоящего доклада. Коэффициенты передаточной функции фильтра, выраженные через коэффициенты структурной схемы ЦФ, представляют собой сумму произведений коэффициентов ЦФ. Структура коэффициентов – это максимальное число сомножителей в этих произведениях. Этот пара-

метр определяет точность и сложность соответствующей структуры [7], [20].

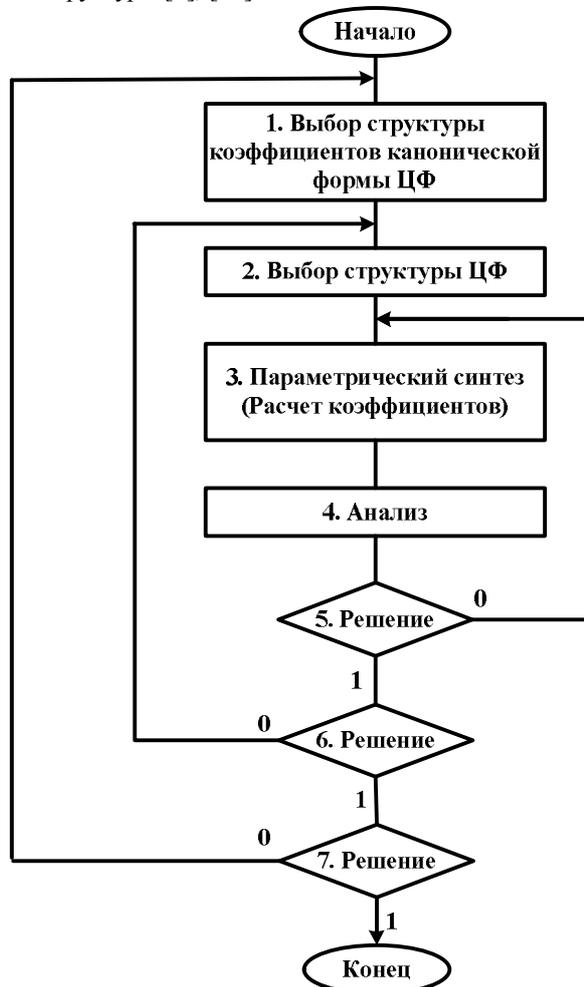


Рис. 3. Структурный уровень проектирования

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в докладе представлена новая парадигма проектирования рекурсивных ЦФ. Данный подход позволяет более корректно учитывать ограниченную длину слова ЦФ. Более высокая точность достигается при приемлемых затратах вычислительных ресурсов. Это особенно важно при проектировании ЦФ с жесткими требованиями к точности реализации характеристик. В данной работе вопросы, связанные с оценкой уровня шумов округления и предельных циклов не рассматриваются. Предполагается, что эти оценки выполняются известными методами, описанными, например, в [9].

Предложенный подход наиболее подходит для проектирования ЦФ для аппаратной реализации на ПЛИС (FPGA), заказных СБИС (ASIC) и программной многопроцессорной реализации на графических процессорах видеоадаптеров (GPGPU).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, проект 10-07-00528-а, «Теоретико-числовые и алгебраические аспекты структурного синтеза линейных цифровых систем обработки сигналов»).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Filter Design Toolbox™ 4.5. Reference Guide / The MathWorks, Inc., 2009. - 1432 p.
- [2] Signal Processing Blockset™ 6.9 Reference Guide / The MathWorks, Inc., 2009. - 1579 p.
- [3] Yang, W. Y. Signals and Systems with MATLAB / W. Y., Yang. - Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. - 476 p.
- [4] Hilbert, D. The Theory of Algebraic Number Fields / D. Hilbert. - Berlin – Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1998. - 359 p.
- [5] Lesnikov, V. Explanation of Effect of Low Sensitivity of Digital Filters with Some Structures / V. Lesnikov, T. Naumovich // GSPx-2004, The International Embedded Solutions Event, (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, September 27 - 30, 2004 (paper number: 1270).
- [6] Lesnikov, V. Number-Theoretic and Algebraic Aspects of Structural Synthesis of Digital Filters / V. Lesnikov, T. Naumovich // GSPx-2004, The International Embedded Solutions Event (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, September 27 - 30, 2004 (paper number: 1374).
- [7] Lesnikov, V. Interrelation between Coefficients of Transfer Function, Form of a Topological Matrix and Complexity of the IIR Digital Filter with Any Structure / V. Lesnikov, T. Naumovich, A. Chastikov, S. Armishev // GSPx-2006, Multicore Applications (The International Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, October 30 – November 2, 2006 (ISBN 0-9728718-3-7, paper number: 3139).
- [8] Antoniou, A. Digital Signal Processing. Signals, Systems and Filters / A. Antoniou. - McGraw-Hill, 2005. - 965 p.
- [9] Ritzerfeld, J. H. F. Noise Gain Expressions for Low Noise Second-Order Digital Filter Structures / J. H. F. Ritzerfeld // IEEE Trans. Circuits Syst. II - Analog Digit. Signal Process. – 2005. – V. CAS-52 (4). - P. 223-227.
- [10] Thiele, L. Design of sensitivity and round-off noise optimal state-space discrete systems / L. Thiele // International Journal on Circuit Theory Applications. – 1984. – V. 12 (1). - P. 39 – 46.
- [11] Barnes, C. W. A Parametric Approach to the Realization of Second-Order Digital Filter Sections // C. W. Barnes // IEEE Trans. Circuits Syst. – 1985. - V. CAS-32 - № 6 (June). - P. 530 - 539.
- [12] Bomar, B. W. On the Design of Second-Order State-Space Digital Filter Sections / B. W. Bomar // IEEE Trans. Circuits Syst. – 1989. - V. CAS-36 – April. - P. 542 - 552.
- [13] Psenicka, B. Analysis and Synthesis of Digital Structure by Matrix Method, / B. Psenicka, R. Bustamante Bello, M. A. Rodriguez // Informatics in Control, Automation and Robotics II. – Springer. – 2007. - P. 199 – 206.
- [14] Haug, K. Ein Verfahren zur Ermittlung aller aquivalenten Strukturen digitaler Filter / K. Haug. - Universitat Stuttgart. - 1978. - 251 p.
- [15] Lanfer, H. Strukturen und Kettenschaltungen digitaler Filter mit minimalem Rundungsrauschen / H. Lanfer. – Freiburg. - 1980. - 213 p.
- [16] Lesnikov, V. Structural Synthesis of Multiplierless Digital Filters / V. Lesnikov, T. Naumovich // GSPx-2005, Pervasive Signal Processing (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, October 24 - 27, 2005 (ISBN 0-9728718-2-9, paper number: 1818).
- [17] Lesnikov, V. Generation and Enumeration of Structures of IIR Digital Filters / V. Lesnikov, T. Naumovich // GSPx-2005, Pervasive Signal Processing (The Embedded Signal Processing Conference), Santa Clara, Ca, USA, October 24 - 27, 2005 (ISBN 0-9728718-2-9, paper number: 1837).
- [18] Lesnikov, V. Synthesis of New Canonic Structures for a Second-Order IIR Digital Filters / V. Lesnikov, T. Naumovich, A. Chastikov // The International Conference IEEE Eurocon 2009, Saint-Petersburg, May 18 – 21, 2009.
- [19] Crochier, R. E. The Analysis of Linear Digital Circuits / R. E. Crochier, A. V. Oppenheim // Proceedings of IEEE. – 1975. – V. 63 (4). - P. 581 – 595.
- [20] Лесников В. А. Структурный синтез цифровых фильтров: Учебное пособие / В. А. Лесников, Т. В. Наумович. – Киров: О-краткое, 2008. – 160 с.