

Влияние квантования по уровню на точность алгоритма быстрого преобразования Фурье

Г.С. Ханян

ФГУП Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова,
khanian@mail.ru

Аннотация — Работа продолжает исследование, начатое в [1], и посвящена вопросу о влиянии числа уровней квантования на точность прямого и быстрого методов вычисления дискретного преобразования Фурье. Проводится математическое моделирование квантования по уровню отсчетов гармонического сигнала и преобразующих его отсчетов базисных функций ДПФ и БПФ. Строятся характеристики – графики изменения частоты, амплитуды и начальной фазы сигнала в зависимости от числа уровней квантования. Сравнение результатов численных экспериментов свидетельствует о необходимости учета погрешности, вносимой быстрыми алгоритмами цифровой обработки сигналов, реализуемыми на измерительно-вычислительных устройствах микроэлектроники с малым числом разрядов памяти.

Ключевые слова — квантование по уровню; аналого-цифровое преобразование; дискретное и быстрое преобразование Фурье; погрешность спектральной оценки.

I. ВВЕДЕНИЕ

Важным с точки зрения метрологии разрабатываемых измерительно-вычислительных устройств современной микроэлектроники является вопрос о влиянии квантования по уровню на точность оценивания амплитудно-фазо-частотных характеристик физических процессов различной природы по результатам цифровой обработки сигналов (ЦОС), проводимой одним из наиболее широко применяемых методов – спектральным анализом, основанным на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ).

Исследование, проведенное в работе [1], показало, что квантование сигнала по уровню, имеющее место в процессе аналого-цифрового преобразования, вносит незначительные погрешности в оценку амплитуд гармоник процесса при числе уровней квантования $L > 8$ и в оценку начальных фаз гармоник при числе уровней $L > 64$. Что касается частот, то они оцениваются с точностью до спектрального разрешения начинающая уже с $L=3$ уровней квантования.

Однако на практике квантованными по уровню оказываются не только отсчеты цифровой реализации сигнала, но и преобразующие их отсчеты базисных функций ДПФ (синусов и косинусов) – из-за ко-

нечного числа разрядов ячеек памяти и регистров процессора вычислительного устройства.

Последняя проблема осложняется еще и тем, что ДПФ вычисляется весьма сложным в математическом описании методом быстрого преобразования Фурье (БПФ), имеющим многочисленные версии реализующих его алгоритмов [2]. Эти версии (прореживание данных по частоте или по времени с их предварительной или постсортировкой и т.п.) по-разному "тасут" промежуточные результаты, не коммутуруя в конечном итоге вычисления с операцией квантования по уровню.

Поэтому актуальным является вопрос о влиянии эффектов квантования на сравнительные характеристики "эталонного" – прямого способа вычисления ДПФ, и его "рабочего" – быстрого метода БПФ.

Ответ на этот вопрос позволит производителям и заказчикам микроэлектронной техники точнее согласовывать реальные функциональные возможности того или иного изделия данной отрасли с возможностями, заявленными при его проектировании.

Настоящая работа имеет целью если не исчерпывающее решение, то предложение направления исследования данной проблемы, занимающей свое место среди прочих проблем квантования по уровню, освещаемых в литературе (см. [3]-[9] и др.).

II. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Рассматривается аналоговый сигнал $s(t)$ длительностью T сек и его цифровая реализация

$s_n = s(t_n)$; $hT - T/2 \leq t_n < hT + T/2$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ длиной N отсчетов в окне времени с индексом h .

При равномерной дискретизации сигнала с частотой F Гц отсчеты времени t_n задаются формулой

$$t_n = (n + \eta - [-hN + N/2 + \eta]) / F; \quad 0 \leq \eta < 1,$$

учитывающей в общем случае смещение начального момента безразмерного времени Ft на величину η [1].

Дискретное преобразование Фурье

$$S_m = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-i2\pi mn/N}; \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

вычисляет спектральную функцию S_m от целочисленной частотной переменной (бина) m . Первая половина отсчетов S_m (эрмитово-сопряженная со второй) служит для определения спектра амплитуд A_m и спектра начальных фаз Φ_m цифровой реализации сигнала:

$$A_m = 2|S_m|, \quad \Phi_m = \arg S_m; \quad m = 0, 1, \dots, N/2. \quad (2)$$

Квантование по уровню как отсчетов цифровой реализации s_n , так и отсчетов базисных функций ДПФ и БПФ (синусов $\sin 2\pi mn/N$ и косинусов $\cos 2\pi mn/N$) можно описать с помощью формулы

$$s' = \begin{cases} \frac{2B}{L-1} \left[\frac{(L-1)s/B+L}{2} \right] - B, & |s| \leq B \\ B \operatorname{sgn} s, & |s| > B, \end{cases} \quad (3)$$

преобразующей аналоговое (континуально подробное) число s в его квантованное значение s' .

Параметрами в формуле (3) являются число уровней квантования $L \geq 2$ и порог срезания $B > 0$, определяющий область значений $-B \leq s' \leq B$ функции (3).

III. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Эксперименты по определению влияния квантования по уровню на точность результатов спектрального анализа проводились с помощью программы цифровой обработки сигналов динамических измерений *quatrix.exe*[®] [10], в которую была внедрена процедура квантования, описанная формулой (3).

За модель исходного физического процесса принимался аналоговый гармонический сигнал с частотой f_0 , амплитудой a_0 и начальной фазой φ_0 , наблюдаемый в окне времени с индексом $h=0$:

$$s(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0); \quad -T/2 \leq t < T/2. \quad (4)$$

В силу принципа суперпозиции (линейности преобразования Фурье) полученные при исследовании этой модели результаты можно распространить на сложные физические процессы, имеющие полигармонический характер и происходящие в действительности.

Эффект квантования по уровню оценивался путем сравнения измеренных в эксперименте параметров сигнала – частоты f , амплитуды a и фазы φ с программно-заданными значениями f_0 , a_0 , φ_0 модели (4).

Частота сигнала измерялась с точностью до спектрального разрешения как $f = M/T$, где M – адрес максимального пика A_m в спектре амплитуд (2), поиск которого осуществлялся перебором и сравнением между собой компонент массива чисел A_m . Точное значение частоты, вообще говоря, равно $(M+\mu)/T$, где дробный добавок $-1/2 < \mu \leq 1/2$ определяет размеры известного эффекта – спектрального просачивания, искажающего кроме частоты, амплитуду и фазу гармонической компоненты любого процесса [6, 11].

Амплитуда a определялась методом фокусировки – как квадратичная сумма спектра A_m в ближайшей окрестности пика A_m . За начальную фазу φ принималось

значение Φ_m альтернированного спектра фаз цифровой реализации сигнала. Оба метода обработки спектров (2) разработаны для сглаживания упомянутого эффекта просачивания и подробно изложены в [11].

Цифровые реализации сигнала (4) длительностью $T=1$ сек и длиной $N=512$ отсчетов формировались с частотой дискретизации $F=N/T=512$ Гц (со смещением начального момента времени $\eta=0$). Для учета эффекта просачивания безразмерная частота задавалась целой: $f_0 T = 64$ (просачивание минимально) и полуцелой: $f_0 T = 64,5$ (просачивание максимально). Начальная фаза принимала также два значения: $\varphi_0=0$ и $\varphi_0=45^\circ$.

Исследовались и сравнивались между собой три ситуации, связанные с квантованием по уровню. В первой из них квантованию подвергались отсчеты сигнала (4) с амплитудой $a_0=100$, равной пороговой константе $B=100$ (что обеспечивает отсутствие срезания сигнала). Вторая ситуация создавалась квантованием базисных отсчетов ДПФ (1) – при прохождении циклов по m и n в процессе их прямого вычисления, третья – квантованием элементов таблицы синусов и косинусов БПФ в процессе их предварительного вычисления. Квантование в обеих последних ситуациях проводилось с порогом $B=1$ (без срезания по уровню).

Цель каждого эксперимента заключалась в построении характеристики – графика исследуемого параметра гармонического сигнала при его заданном постоянном значении в модели (4) в зависимости от числа уровней квантования либо самого сигнала, либо базисных функций ДПФ или БПФ.

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Результаты исследований эффектов квантования приведены ниже на рис. 1-9.

A. Внешний вид осциллограмм и спектрограмм

На рис. 1 точками изображена первая половина осциллограммы, сплошной линией – спектр амплитуд гармонического сигнала с полуцелой безразмерной частотой 64,5 при числе уровней квантования $L=4096$, присущем часто применяемому на практике 12-ти разрядному аналого-цифровому преобразователю. При таком, принятом за "бесконечность" числе уровней, отсчеты сигнала, как показано в [1], можно считать континуальными, а методы прямого и быстрого вычислений преобразования Фурье – идентичными.

Этот же сигнал, квантованный с небольшим числом уровней $L=8$, показан на рис. 2. Из сравнения этих иллюстраций видно, насколько слабо отражается на виде спектра амплитуд сигнала сильное изменение вида осциллограммы сигнала.

На рис. 3 сигнал практически континуален – имеет $L=4096$ уровней, квантованию же с числом уровней $L=8$ подвергаются базисные отсчеты ДПФ и БПФ.

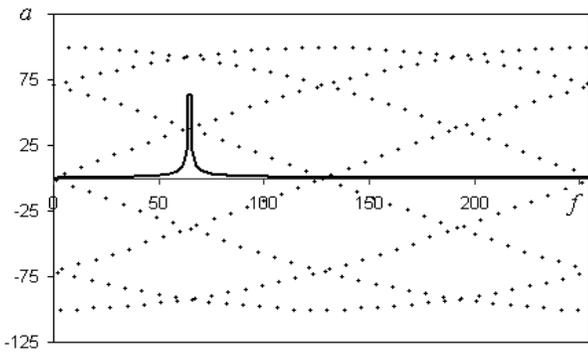


Рис. 1. Осциллограмма и спектр амплитуд синусоиды с большим числом уровней квантования $L=4096$

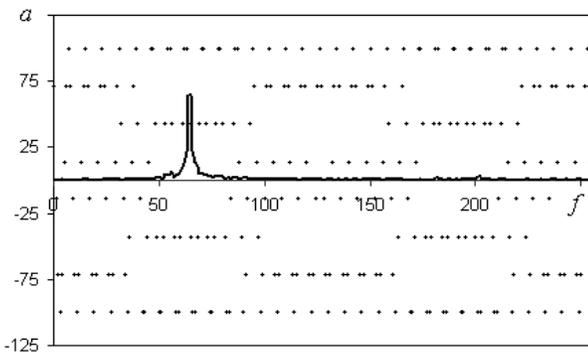


Рис. 2. Осциллограмма и спектр амплитуд синусоиды с малым числом уровней квантования $L=8$

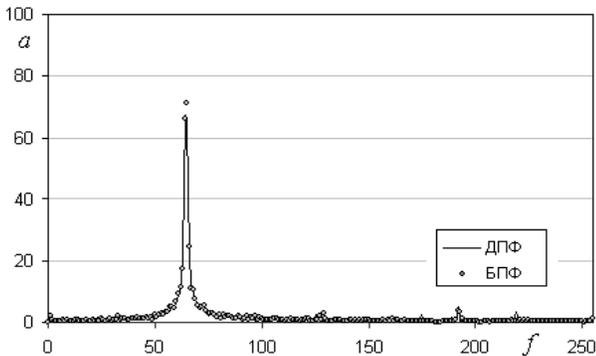


Рис. 3. Спектры амплитуд синусоиды с $L=8$ уровнями квантования базисных функций ДПФ и БПФ

Видно слабое в целом, но заметное на пике амплитуды различие спектров ДПФ и БПФ друг от друга, что уже говорит о необходимости метрологической аттестации быстрых вычислительных алгоритмов.

Б. Частотные характеристики квантования

На рис. 4 и 5 приведены частотные характеристики, снятые в отсутствии и при максимальном эффекте просачивания, соответственно.

В первом случае, при $f_0T=64$, начиная с числа уровней квантования $L=3$ (как отсчетов сигнала, так и базисных функций преобразования Фурье) получается идеальный результат измерения: $f=f_0$. Во втором

случае ($f_0T=64,5$) значение fT колеблется между ближайшими бинами 64 и 65, отдавая им "равное предпочтение" при прямом методе вычисления спектральной функции (1), что является более правдоподобным результатом по сравнению с быстрым методом.

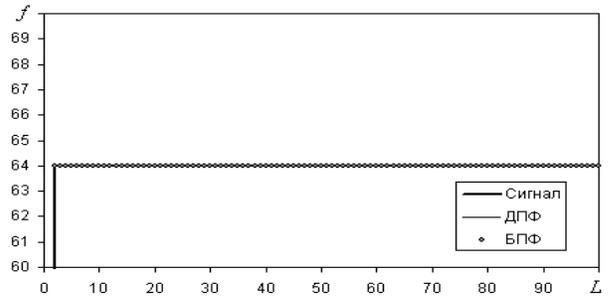


Рис. 4. Результаты измерения целой частоты синусоиды в зависимости от числа уровней квантования сигнала и базисных функций ДПФ и БПФ

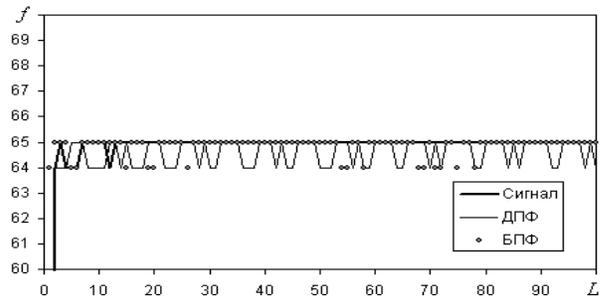


Рис. 5. Результаты измерения полуцелой частоты синусоиды в зависимости от числа уровней квантования сигнала и базисных функций ДПФ и БПФ

В. Амплитудные характеристики квантования

На рис. 6 и 7 приведены амплитудные характеристики, снятые при $\varphi_0=45^\circ$ на целой и полуцелой частоте сигнала, соответственно.

Видно, что поведение кривых во всех трех способах квантования существенно зависит от эффекта просачивания. Более близкие между собой результаты дают квантование отсчетов сигнала и базисных отсчетов ДПФ. Квантование же базисных отсчетов БПФ увеличивает имеющуюся погрешность амплитуды a .

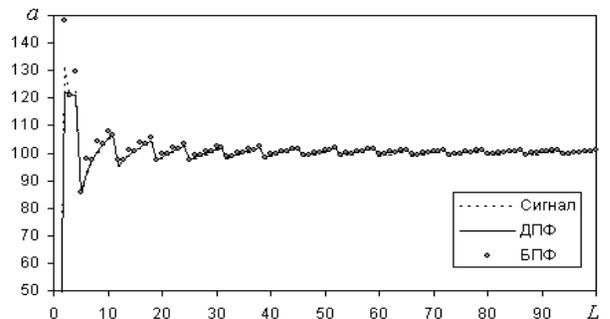


Рис. 6. Амплитуда синусоиды на целой частоте в зависимости от числа уровней квантования сигнала и базисных функций ДПФ и БПФ

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании проведенного исследования можно сделать вывод о том, что квантование по уровню базисных отсчетов быстрого метода вычисления преобразования Фурье дает по сравнению с прямым методом вычисления заметно большую погрешность спектральной оценки параметров гармонических составляющих переменных процессов.

Поэтому БПФ и другие быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов, реализуемые на устройствах микроэлектроники с малым числом разрядов памяти, должны проходить метрологическую аттестацию как средства измерения параметров процессов.

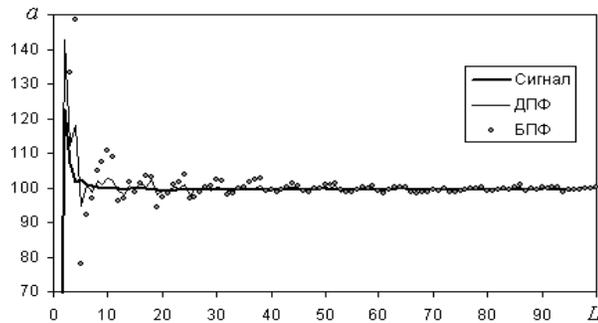


Рис. 7. Амплитуда синусоиды на полудельной частоте в зависимости от числа уровней квантования сигнала и базисных функций ДПФ и БПФ

Г. Фазовые характеристики квантования

На рис. 8 и 9 приведены результаты измерения нулевой начальной фазы сигнала $\varphi_0=0$, полученные в отсутствие и при максимальном эффекте просачивания, соответственно.

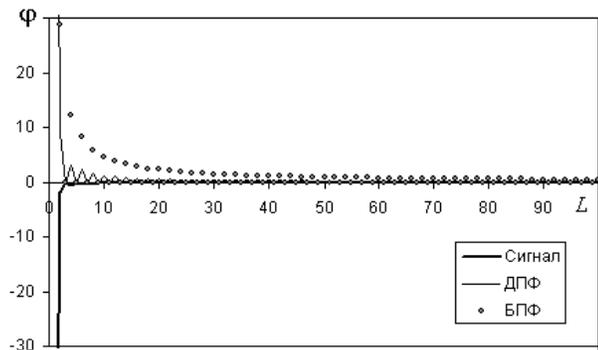


Рис. 8. Измерения нулевой фазы синусоиды с целой частотой в зависимости от числа уровней квантования сигнала и базисных функций ДПФ и БПФ

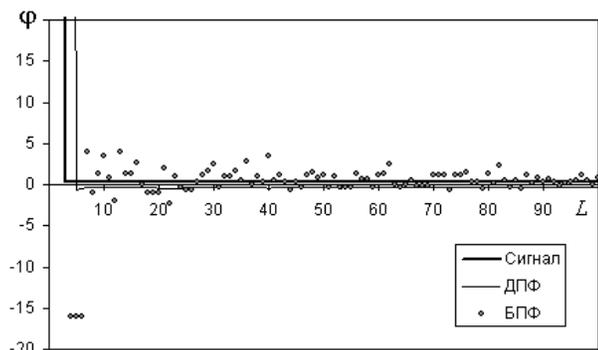


Рис. 9. Измерения нулевой фазы синусоиды с полудельной частотой в зависимости от числа уровней квантования сигнала и базисных функций ДПФ и БПФ

Так же, как и при измерении амплитуды, близкие между собой результаты дают квантование отсчетов сигнала и базисных отсчетов ДПФ. Однако квантование базисных отсчетов БПФ существенно увеличивает погрешность фазы φ , что говорит об издержках применения быстрых алгоритмов при небольших L .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ханян Г.С. Эффекты квантования сигнала в спектральном анализе, основанном на дискретном преобразовании Фурье // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2008. Сборник научных трудов / под общ. ред. А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2008. С. 490-495.
- [2] Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
- [3] Брюханов Ю.А. Эффекты квантования и переполнения в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка, использующих дополнительный код с усечением и сумматор с пилообразной характеристикой, при постоянном воздействии // 8-я междунар. конф. "Цифровая обработка сигналов и ее применение". Докл. Вып. 1 / Тр. РНТОРЭС им. А.С. Попова. – М.: Инсвязьиздат, 2006. – С. 191-194.
- [4] Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
- [5] Ратхор Т.С. Цифровые измерения. Методы и схемотехника. М.: Техносфера, 2004. 376 с.
- [6] Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006. 856 с.
- [7] Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Советское радио, 1977. 608 с.
- [8] Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы: Учеб. Пособие / В.В. Солодовников, В.Г. Коньков, В.А. Суханов, О.В. Шемяков; Под ред. В.В. Солодовникова. – М.: Высшая школа, 1991. 255 с.
- [9] Бесекерский В. А. Цифровые автоматические системы. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1976.
- [10] Ханян Г.С., Шеина Н.В. Система цифровой обработки сигналов для информационного обеспечения стендовых испытаний ГТД // "Научный вклад в создание авиационных двигателей". Сборник трудов ЦИАМ им. П.И. Баранова / под ред. В.А. Скибина и В.И. Солонина. – Кн. 2. – М.: Машиностроение, 2000. С. 534-536.
- [11] Ханян Г.С. Метрологические проблемы спектрального оценивания параметров переменных процессов и методы их решения с помощью современных средств вычислительной техники // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2008. Сборник научных трудов / под общ. ред. А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2008. С. 496-503.