

Анализ функции Ляпунова процесса проектирования аналоговых цепей

А.М. Земляк

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина, Киев

Автономный университет Пуэбла, Мексика, Пуэбла, azemliak@yahoo.com

Аннотация — Процесс проектирования аналоговых цепей определяется математически как динамическая управляемая система. В этом смысле задача минимизации процессорного времени проектирования может быть сформулирована как задача минимизации времени переходного процесса динамической системы. Для анализа свойств подобной системы предложено использовать концепцию функции Ляпунова динамической системы. На основе этой функции и ее временной производной построена специальная функция, позволяющая предсказывать полное процессорное время проектирования цепи по характеристикам начального периода проектирования. Численные результаты показывают возможность прогнозирования процессорного времени различных стратегий проектирования по поведению этой функции.

Ключевые слова — Оптимальное проектирование цепей, теория управления, функция Ляпунова.

I. ВВЕДЕНИЕ

Задача сокращения времени проектирования электронных цепей является одной из приоритетных задач повышения качества проектирования.

Традиционные методы сокращения необходимого времени проектирования системы сводятся к сокращению времени анализа и улучшению процедур оптимизации. Методы, использующие разреженность структуры матрицы проводимости электронной схемы [1]-[3] и методы декомпозиции [4]-[6] успешно используются для сокращения времени проектирования, но близки к исчерпанию своих возможностей. Иной путь был предложен в работах [7]-[9], позволяющий переформулировать задачу проектирования, отказавшись от соблюдения законов Кирхгофа в процессе оптимизации. Наиболее общая постановка задачи проектирования была дана в работах [10]-[11] на основе формулирования задачи проектировании аналоговых цепей в терминах теории управления. Такой подход позволяет искать, среди множества различных стратегий проектирования, одну или несколько стратегий, обладающих минимальным процессорным временем. Показано, что новый подход потенциально позволяет существенно уменьшить машинное время

проектирования цепей. Это качество появляется вследствие практически неограниченного числа различных стратегий проектирования, возникающих в рамках обобщенной методологии и появившейся возможности управлять процессом проектирования путем перераспределения машинных затрат между анализом цепи и процедурой параметрической оптимизации. Традиционная стратегия проектирования (ТСП), включающая анализ цепи на каждом шаге процедуры оптимизации, не является оптимальной по времени, и выигрыш во времени для некой оптимальной стратегии по сравнению с ТСП возрастает при возрастании размеров и сложности проектируемой цепи [10]. Разработка алгоритма для оптимальной стратегии проектирования (ОСП) является важнейшей задачей при реализации преимуществ такого подхода. При построении ОСП необходимо определить ее основные характеристики.

В соответствии с предложенной методологией, процесс проектирования электронной цепи определен как динамическая управляемая система. Эта система определяется дифференциальными или разностными уравнениями для переменных состояния и системой ограничений, в качестве которых выступает математическая модель электронной цепи.

II. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Процесс проектирования электронной цепи определяем в соответствии с [10] как задачу минимизации обобщенной целевой функции $F(X, U)$ на основе векторного уравнения (1):

$$X^{s+1} = X^s + t_s \cdot H^s \quad (1)$$

с ограничениями (2), в качестве которых выступает математическая модель электронной цепи:

$$(1 - u_j) g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где $X \in R^N$, $X = (X', X'')$, $X' \in R^K$ есть вектор независимых переменных и $X'' \in R^M$ есть вектор

зависимых переменных, M есть число зависимых переменных электронной цепи, K число независимых переменных, N общее число переменных ($N=K+M$) и t_s итерационный параметр. Функции $g_j(X)$ для всех j являются уравнениями модели цепи. Функция $H \equiv H(X, U)$ определяет направление уменьшения обобщенной целевой функции $F(X, U)$, U есть вектор управляющих функций $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $u_j \in \Omega$, $\Omega = \{0; 1\}$. Обобщенная целевая функция процесса проектирования $F(X, U)$ может быть определена следующим аддитивным выражением:

$$F(X, U) = C(X) + \psi(X, U), \quad (3)$$

где $C(X)$ есть не отрицательная функция цели и $\psi(X, U)$ есть дополнительная штрафная функция определяемая следующим выражением:

$$\psi(X, U) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^M u_j \cdot g_j^2(X). \quad (4)$$

Такая формулировка задачи проектирования позволяет перераспределять затраты машинного времени между решением задач (1) и (2). При этом вектор U является основным инструментом описанной методологии и управляет динамическим процессом приведения целевой функции $C(X)$ к минимуму за возможно минимальное время.

В непрерывной форме основное уравнение процедуры оптимизации может быть записано как следующая система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(X, U), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Эта система совместно с уравнениями (2), (3) и (4) задает непрерывную форму процесса проектирования. Структура функций $f_i(X, U)$ определяется методом оптимизации и, например для градиентного метода, имеет вид:

$$f_i(X, U) = - \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U), \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (6)$$

$$f_i(X, U) = -u_{i-K} \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U) + \frac{(1-u_{i-K})}{dt} [-x_i' + \eta_i(X)] \quad (6')$$

$$i = K + 1, K + 2, \dots, N$$

Основная проблема такой постановки задачи – это определение оптимального поведения управляющих функций u_j в течение процесса проектирования.

Функции $f_i(X, U)$ являются кусочно непрерывными, т.к. таковыми являются управляющие функции u_j . В этом случае наиболее адекватным методом для решения задачи построения оптимального управления является принцип максимума Понтрягина. К сожалению его применение ограничено линейными системами, а в случае нелинейных динамических систем, каковым является процесс проектирования, его применение ограничено задачами небольшой размерности. В связи с этим представляется наиболее перспективным подход, использующий понятие функции Ляпунова динамической системы.

III. Функция Ляпунова

Для получения оптимальной последовательности точек переключения в течение процесса проектирования необходимо выработать специальный критерий, зависящий от внутренних свойств стратегии проектирования. Задача поиска оптимальной по времени стратегии проектирования связана с более общей задачей сходимости и устойчивости каждой траектории проектирования. Исходя из опыта можно констатировать, что время проектирования для каждой стратегии обусловлено свойствами сходимости и устойчивости траектории, соответствующей данной стратегии. Один из наиболее общих подходов к анализу стабильности динамической системы основан на прямом методе Ляпунова [12]-[13]. Мы определили процедуру проектирования электронной цепи как динамическую управляемую систему. При этом процесс проектирования рассматривается как приведение этой системы в стационарное состояние. В этом случае, в стационарном состоянии, минимизируется функция цели $C(X)$, то есть достигаются все цели проектирования. Результатом же оптимального проектирования является минимизация функции цели за минимально возможное машинное время. В этом случае, основная цель оптимального управления может быть определена как задача минимизации переходного времени процесса приведения системы в стационарное состояние. Поскольку приведение системы в стационарное состояние, то есть осуществление процесса проектирования электронной цепи, возможно посредством различных стратегий, то необходимо найти стратегию и соответствующую ей траекторию, реализующие переходной процесс за минимально возможное время. Этот анализ возможно сделать на основе прямого метода Ляпунова. Предлагается ввести понятие функции Ляпунова процесса проектирования (т. е. динамической системы) и использовать ее для изучения свойств и структуры оптимального алгоритма проектирования и, в частности, для поиска оптимальных позиций точек переключения управляющего вектора U .

Можно отметить определенную свободу в выборе функции Ляпунова вследствие неединственности ее формы. Давайте определим функцию Ляпунова процесса проектирования следующей формулой:

$$V(X) = \sum_i (x_i - a_i)^2, \quad (7)$$

где a_i есть стационарное значение координаты x_i .

По своему смыслу множество всех коэффициентов a_i является основным результатом процесса проектирования, т.к. при этих значениях параметров системы достигается минимум целевой функции $C(X)$, т.е. достигаются все цели проектирования. Ясно, что эти коэффициенты становятся определенными лишь в конце проектирования. Вместо переменных x_i возможно определить другие переменные $y_i = x_i - a_i$. В этом случае формула (5.6) принимает иной вид:

$$V(Y) = \sum_i y_i^2, \quad (8)$$

где компоненты y_i составляют вектор Y .

Процесс проектирования (2)–(6) может быть записан с учетом новых переменных y_i в той же самой форме. Функция (8) удовлетворяет всем условиям стандартного определения функции Ляпунова. Неудобство формулы (7) заключается в том, что точка $A = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ неизвестна, т.к. она может быть получена только в конце процесса проектирования. То есть, возможность анализировать устойчивость различных стратегий проектирования на основе формулы (7) появляется в том случае, если решение задачи, т.е. точка A , уже найдено каким-либо способом. С другой стороны, представляет интерес контролировать устойчивость процесса в течение процедуры оптимизации. В этом случае требуется определить другую форму функции Ляпунова, которая бы не зависела от конечной точки A .

Давайте определим функцию Ляпунова следующими формулами:

$$V(X, U) = [F(X, U)]^r \quad (9)$$

$$V(X, U) = \sum_i \left(\frac{\partial F(X, U)}{\partial x_i} \right)^2, \quad (10)$$

где $F(X, U)$ есть обобщенная целевая функция процесса проектирования и степень $r > 0$. Обе формулы определяют функцию Ляпунова, имеющую свойства, аналогичные функции (8) в достаточно

большой окрестности стационарной точки, и при этом в обеих формулах появляется зависимость от управляющего вектора U .

В соответствии с методом Ляпунова, информация об устойчивости траектории системы связана с производной по времени от функции Ляпунова. Прямой расчет производной по времени от функции

Ляпунова $\dot{V} = dV/dt$ позволяет судить об устойчивости динамической системы. Процесс проектирования и соответствующая траектория являются устойчивыми, если эта производная является отрицательной. С другой стороны, прямой метод Ляпунова, как известно, дает достаточные условия устойчивости, но не необходимые. Это означает, что процесс теряет устойчивость или не теряет его в случае положительной производной. Если в отдельных точках траектории проектирования

производная \dot{V} становится положительной, это еще не означает появление неустойчивости траектории проектирования в этих точках. Лишь в случае

появления положительной производной \dot{V} на множестве положительной меры можно констатировать появление неустойчивости, что проявляется в нарастании функции Ляпунова. При этом можно констатировать, что, начиная с этого момента, целевая функция процесса проектирования не уменьшается, а возрастает. Если такое поведение наблюдается далеко от стационарной точки, то это означает, что процесс проектирования не сходится, то есть решение не может быть получено на этой траектории. В этом случае нужно менять или исходную точку процесса проектирования или саму стратегию проектирования. В случае появления

положительной производной \dot{V} в конце процесса проектирования, недалеко от стационарной точки, можно говорить о значительном замедлении процесса проектирования. Данная стратегия проектирования начинает «топтаться на месте» и не может обеспечить требуемую точность решения. Этот эффект хорошо известен в практическом проектировании. Если в этом случае точность является неприемлемой, то снова нужно менять стратегию проектирования или по крайней мере начальную точку. В традиционном проектировании меняется только начальная точка. Детальный анализ поведения функции Ляпунова и ее производной для различных стратегий проектирования позволяет выбрать перспективные стратегии и отбросить заведомо неудачные. Этот анализ также позволяет выявить, по крайней мере на качественном уровне, взаимосвязи между временем проектирования и, как мы сейчас определили, основными показателями процесса проектирования, каковыми являются функция Ляпунова и ее производная по времени.

IV. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В соответствии с теорией прямого метода Ляпунова, информация об устойчивости траектории и процессорное время связаны с производной по времени от функции Ляпунова. В работе [14] показано, что функция Ляпунова процесса проектирования вместе со своей производной может служить достаточно информативным источником для поиска перспективных, с точки зрения минимального процессорного времени, стратегий проектирования.

С точки зрения теории управления задача конструирования минимального по времени алгоритма проектирования может быть сформулирована как задача поиска переходного процесса с минимальным временем установления. Основным инструментом при этом поиске служит управляющий вектор U , позволяющий изменять структуру функций $f_i(X, U)$ и, в соответствии с этим, изменять время переходного процесса. Для этого необходимо обеспечить максимальную скорость убывания функции Ляпунова, т.е. максимальное

абсолютное значение производной $\dot{V} = dV/dt$. Обычно эта производная не положительна для устойчивого процесса. Как проказано в [14], можно констатировать тесную взаимосвязь между процессорным временем проектирования и свойствами функции Ляпунова процесса проектирования. Однако можно определить более информативную функцию, а именно, относительную временную производную функции Ляпунова $W = \dot{V}/V$. В этом случае мы можем сравнивать различные стратегии проектирования посредством поведения функции $W(t)$ и выбрать наиболее перспективные с точки зрения минимального процессорного времени.

Разобранные ниже примеры были проанализированы на основе непрерывной формы формулировки процесса проектирования (5). Примеры анализа поведения функции $W(t)$ приведены для пассивных и активных нелинейных цепей.

A. Пример 1

Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ для цепи изображенной на Рис. 1 приведено на Рис. 2.

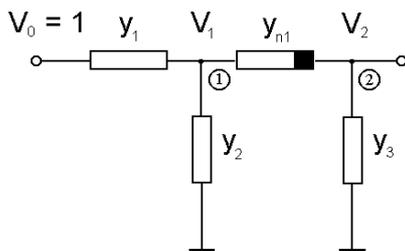


Рис. 1. Нелинейная цепь с двумя узлами

Нелинейный элемент для цепи на Рис.1 имеет следующую зависимость $y_{n1} = y_0 + b(V_1 - V_2)^2$.

Вектор X включает пять компонент: $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$, $x_3^2 = y_3$, $x_4 = V_1$, $x_5 = V_2$. Модель цепи (2) включает два уравнения ($M=2$) и оптимизационная процедура (5) включает пять уравнений. Функция цели определена как сумма квадратов разностей между заранее заданными и текущими значениями узловых напряжений. Управляющий вектор состоит из двух компонент: $U = (u_1, u_2)$.

Функции $V(t)$ и $W(t)$ являются основным объектом анализа и их поведение представлено на Рис. 2 для всех стратегий проектирования, представляющих собой полный структурный базис множества различных стратегий.

В данном случае, полный структурный базис различных стратегий состоит из четырех стратегий ($2^M = 4$), что соответствует следующим четырем управляющим векторам: (00), (01), (10), (11). Функция Ляпунова определялась формулой (9) для $r=0.5$. Как видно из Рис. 2 поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ дает исчерпывающее объяснение характеристикам процесса проектирования. Прежде всего, можно констатировать, что скорость уменьшения функции Ляпунова $W(t)$ обратно пропорциональна машинному времени. Минимальное значение функции Ляпунова, соответствующее максимально возможной точности при минимизации функции цели, примерно одинаково для всех четырех стратегий и равно $8.7 \cdot 10^{-6}$, $1.7 \cdot 10^{-5}$, $1.3 \cdot 10^{-5}$, $2.0 \cdot 10^{-5}$, соответственно, для стратегий с управляющим вектором (00), (01), (10), (11).

Относительное время проектирования этих четырех стратегий составляет 1, 0.44, 0.78 и 0.3 для стратегий (00), (01), (10), (11), соответственно. Полное время проектирования фиксировалось по достижении функцией Ляпунова своего минимального значения. Как видно из Рис. 2, большее абсолютное значение функции $W(t)$ соответствует более быстрому уменьшению функции Ляпунова и меньшему машинному времени.

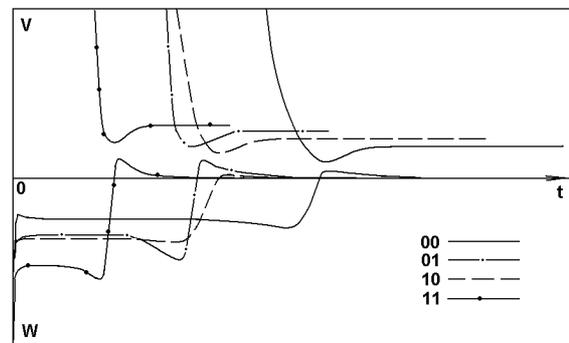


Рис. 2. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ в течение процесса проектирования для полного базиса стратегий

Анализ двух- и трехкаскадных транзисторных усилителей, соответствующих схеме на Рис. 3, дает подобные результаты.

Таблица 1

Стратегии проектирования из полного структурного базиса

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, с
1	(0 0 0 0 0)	165962	299,56
2	(0 0 0 0 1)	337487	737,55
3	(0 0 1 0 0)	44118	68,87
4	(0 0 1 0 1)	14941	19,06
5	(0 0 1 1 1)	21971	22,03
6	(0 1 1 0 1)	4544	4,56
7	(1 0 1 0 1)	2485	1,65
8	(1 0 1 1 1)	7106	3,57
9	(1 1 1 0 1)	2668	1,32
10	(1 1 1 1 1)	79330	10,11

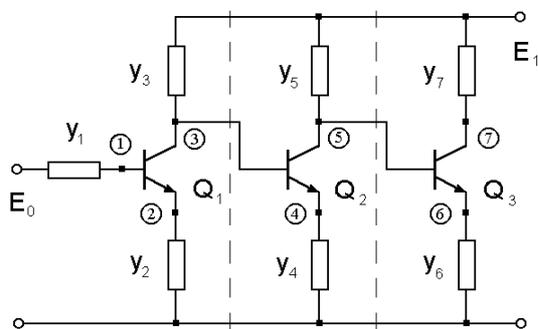


Рис. 3. Трехкаскадный транзисторный усилитель

В качестве модели транзистора использовалась статическая модель Эберса-Молла, реализуемая в системе SPICE [15]. Целевая функция определена как сумма квадратов разностей между заранее заданными и текущими значениями напряжений на переходах транзисторов.

Б. Пример 2

В случае двухкаскадного усилителя имеется пять независимых переменных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ($K=5$) и пять зависимых переменных V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ($M=5$). Алгоритм оптимизации включает систему десяти уравнений, а модель схемы определяется пятью нелинейными уравнениями. Базис стратегий проектирования содержит 32 различные стратегии. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ для некоторых стратегий этого базиса представлено на Рис. 4.

Результаты анализа этих стратегий представлены также в Таблице 1. Для этого примера, как и для первого, наблюдается строгая корреляция между поведением функции $W(t)$ на начальном периоде процесса проектирования и процессорным временем.

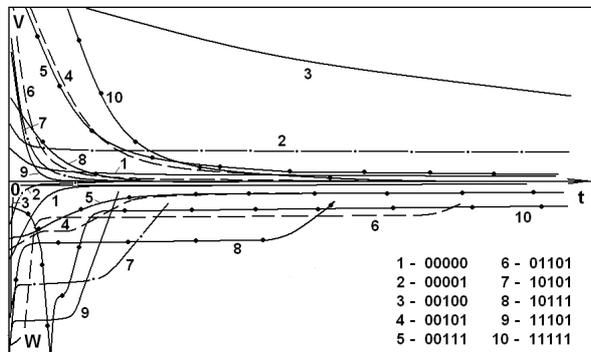


Рис. 4. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ в течение процесса проектирования для некоторых стратегий структурного базиса для двухкаскадного усилителя

В. Пример 3

Анализ трехкаскадного транзисторного усилителя, представленного на Рис. 3 подтверждает ранее полученные результаты. Полный структурный базис стратегий проектирования включает 128 различных стратегий в этом случае. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ для некоторых стратегий этого базиса представлено на Рис. 5.

Результаты анализа этих стратегий представлены также в Таблице 2.

Анализ этого примера подтверждает уже выявленную ранее закономерность между поведением функции $W(t)$ на начальном периоде процесса проектирования и полным процессорным временем проектирования. Наиболее быстрая стратегия 10, имеющая наименьшее процессорное время, соответствуют наибольшему значению функции $W(t)$ на начальном этапе проектирования, что видно из Рис. 5. Стратегии 6 и 7 соответствуют меньшим значениям функции $W(t)$ и большим значениям процессорного времени проектирования. Однако они значительно более оптимальные по времени нежели остальные стратегии.

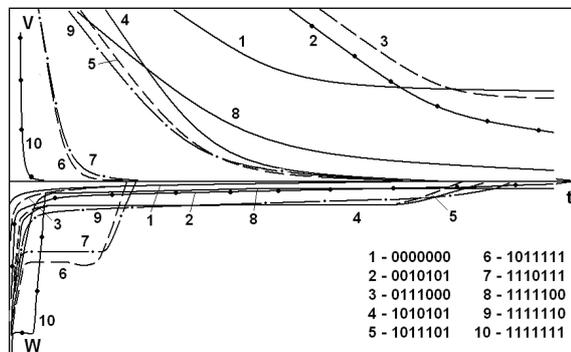


Рис. 5. Поведение функций $V(t)$ и $W(t)$ в течение процесса проектирования для некоторых стратегий структурного базиса для трехкаскадного усилителя

Таблица 2
Стратегии проектирования из полного структурного базиса

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, с
1	(0 0 0 0 0 0 0)	2161512	3019,47
2	(0 0 1 0 1 0 1)	275580	314,94
3	(0 1 1 1 0 0 0)	1075433	1042,05
4	(1 0 1 0 1 0 1)	102510	50,54
5	(1 0 1 1 1 0 1)	107541	43,66
6	(1 0 1 1 1 1 1)	38751	12,81
7	(1 1 1 0 1 1 1)	43387	13,91
8	(1 1 1 1 1 0 0)	160900	97,32
9	(1 1 1 1 1 1 0)	117828	53,72
10	(1 1 1 1 1 1 1)	52651	4,61

Следующими по степени убывания величины $W(t)$ (по степени возрастания процессорного времени) являются стратегии 4 и 5. Остальные стратегии, представленные в таблице отличаются малыми значениями функции $W(t)$ и еще бóльшим значениям времени проектирования. При этом, традиционная стратегия проектирования 1 в 655 раз более медленная нежели традиционная модифицированная стратегия 10.

Обобщая полученные результаты, можно сделать следующий вывод: поведение относительной временной производной функции Ляпунова процесса

проектирования $W = \dot{V}/V$ на начальном этапе процесса проектирования вполне может прогнозировать полное относительное процессорное время той или иной стратегии проектирования. Это означает, что для сравнения полного процессорного времени проектирования для различных стратегий нет необходимости проводить проектирование до конца. Достаточно сравнить поведение функции $W(t)$ на начальном этапе проектирования, чтобы определить стратегии с наименьшим процессорным временем. Бóльшая абсолютная величина функции W приводит к меньшему полному процессорному времени. Это свойство функции W позволяет сделать вывод, что структура оптимального по времени алгоритма проектирования должна базироваться на поведении этой функции.

Исходя из проведенного анализа, можно сделать вывод, что функция Ляпунова процесса проектирования и функции производные от нее, в частности, относительная производная по времени от функции Ляпунова, могут служить достаточно информативным источником для поиска стратегий, имеющих наименьшее процессорное время. Стратегии, имеющие наибольшее абсолютное значение относительной производной по времени функции Ляпунова на начальном участке траектории проектирования имеют также минимальное процессорное время. Это свойство может явиться

основой для конструирования оптимального по времени алгоритма проектирования.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщая полученные результаты можно утверждать, что характеристики функции Ляпунова процесса проектирования связаны с процессорным временем и знанием поведения функции Ляпунова на начальном этапе проектирования позволяет оценить полное процессорное время проектирования электронной системы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bunch J.R., Rose D.J. Eds. Sparse matrix computations. - N.Y.: Acad. Press, 1976.
- [2] Osterby O., Zlatev Z. Direct methods for sparse matrices. - N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
- [3] George A. On block elimination for sparse linear systems // SIAM J. Numer. Anal. - 1984. - V. 11. - № 3. - P. 585 – 603.
- [4] Wu F.F. Solution of large-scale networks by tearing // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1976. - V. 23. - № 12. - P. 706 – 713.
- [5] Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.K., Chua L.O. An efficient cluster algorithm for tearing large-scale networks // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1977. - V. 24. - № 12. - P. 709 – 717.
- [6] Ruehli A., Sangiovanni-Vincentelli A., Rabbat G. Time analysis of large-scale circuits containing one-way macromodels // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1982. - V. 29. - № 3. - P. 185 – 191.
- [7] Каширский И.С., Трохименко Я.К. Обобщенная оптимизация электронных схем. - Киев: Техника, 1979.
- [8] Rizzoli V., Costanzo A., Cecchetti C. Numerical optimization of broadband nonlinear microwave circuits // IEEE MTT-S Int. Symp. - 1990. - V. 1. - P. 335 – 338.
- [9] Ochotta E.S., Rutenbar R.A., Carley L.R. Synthesis of high-performance analog circuits in ASTRX/OBLX // IEEE Trans. on CAD. - 1996. - V. 15. - № 3. - P. 273 – 294.
- [10] Zemliak A.M. Analog system design problem formulation by optimum control theory // IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences. - 2001. - V. E84A. - № 8. - P. 2029 – 2041.
- [11] Земляк А.М., Проектирование аналоговых цепей методами теории управления // Изв. высш. учеб. заведений Радиоэлектроника. - 2004. - Т. 47. - № 5. - С. 18 – 28.
- [12] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости.–М.: Наука, 1967. - 223 с.
- [13] Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method.– N.Y.: Springer-Verlag. – 1977.
- [14] Земляк А.М. Анализ динамических характеристик процесса проектирования аналоговых цепей. // Изв. высш. учеб. заведений Радиоэлектроника. - 2007. - Т. 50. - № 11. - С. 26 – 35.
- [15] Massobrio G., P. Antognetti P. Semiconductor device Modeling with SPICE. - N.Y.: Mc. Graw-Hill, Inc., 1993.