

Сравнительный анализ различных стратегий оптимизации аналоговых цепей

А.М. Земляк

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина, Киев

Автономный университет Пуэбла, Мексика, Пуэбла, azemliak@yahoo.com

Аннотация — Исследован процесс оптимизации аналоговых цепей на основе ранее разработанной обобщенной теории, приводящей к появлению множества различных стратегий оптимизации, имеющих различное процессорное время. Для поиска стратегии, имеющей наименьшее процессорное время используется ранее развитая концепция функции Ляпунова процесса оптимизации. На основе этой функции построена новая специальная функция, поведение которой тесно связано с процессорным временем процесса оптимизации. Подтверждена гипотеза о сильной корреляции между поведением функции Ляпунова для любой стратегии оптимизации и полным процессорным временем. Это позволяет сравнивать различные стратегии оптимизации на начальном этапе процесса и выбирать наилучшую стратегию, обладающую минимальным процессорным временем без необходимости проведения оптимизации по каждой из них. Численные результаты подтверждают возможность выбора наилучшей, в смысле быстродействия, стратегии оптимизации, позволяющей решить задачу проектирования в сотни раз быстрее традиционного подхода.

Ключевые слова — оптимальное проектирование цепей, множество стратегий оптимизации, теория управления, функция Ляпунова.

I. ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем проектирования электронных систем связана с сокращением чрезвычайно большого процессорного времени, необходимого для достижения точки минимума целевой функции процесса оптимизации.

Известны традиционные подходы сокращения необходимого времени анализа системы. Благодаря разреженной структуре матрицы проводимости электронной схемы многие идеи для работы с разреженными матрицами успешно реализованы [1]-[3]. Иной путь уменьшения числа операций для анализа электронных схем связан с идеей декомпозиции [4]-[6]. Переформулировка задачи оптимизации схемы без точного соблюдения законов Кирхгофа была уже предложена в работах [7]-[9]. Более общая постановка задачи проектирования аналоговых цепей была дана в работах [10]-[11] на

основе теории оптимального управления. Было показано, что такой подход позволяет обобщить формулировку задачи проектирования электронной цепи и получить множество различных стратегий оптимизации. Проблема ускорения процесса оптимизации цепи формулируется как задача поиска наилучшей, в смысле быстродействия, стратегии среди всех стратегий данного множества.

Традиционная стратегия оптимизации цепи (ТСО), включающая анализ цепи на каждом шаге процедуры оптимизации, не является оптимальной по времени, и выигрыш во времени для некоторой оптимальной стратегии по сравнению с ТСО возрастает при возрастании размеров и сложности проектируемой цепи, что было показано в [10]-[11]. Разработка алгоритма для наилучшей стратегии оптимизации является важнейшей задачей при реализации преимуществ такого подхода. В то же время требуется выработать косвенный критерий, позволяющий сравнивать различные стратегии оптимизации цепей с точки зрения числа операций или процессорного времени без расчета самого времени.

Поскольку, в соответствии с предложенной методологией, процесс оптимизации электронной цепи определен как динамическая управляемая система [11], оказалось полезным введение понятия функции Ляпунова процесса оптимизации. Была выявлена определенная корреляция между поведением функции Ляпунова для некоторой стратегии и ее полным процессорным временем [12]. В настоящей работе проводится дальнейшее исследование возможности использования функции Ляпунова для сравнения различных стратегий оптимизации и выбора наилучшей из них, не прибегая к полному расчету для каждой из возможных стратегий. Это стало возможным благодаря введению новой функции, связанной с относительной производной по времени от функции Ляпунова интегральным соотношением. Постулируется следующая гипотеза: *существует сильная взаимосвязь между поведением функции Ляпунова процесса оптимизации цепи и полным процессорным временем, необходимым для оптимизации.*

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Процесс оптимизации электронной цепи определен как динамическая управляемая система [12], которая определяется дифференциальными или разностными уравнениями для переменных состояния, и системой ограничений, в качестве которых выступает математическая модель самой электронной цепи.

В случае применения разностной модели система уравнений для переменных состояния может быть записана в виде:

$$x_i^{s+1} = x_i^s + t_s \cdot f_i(X, U), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

В случае применения дифференциальной модели эта система принимает вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(X, U), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Система ограничений, являющаяся математической моделью электронной цепи, может быть определена следующими уравнениями:

$$(1 - u_j) g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (3)$$

Структура функций $f_i(X, U)$ определяется методом оптимизации и, например, для градиентного метода оптимизации, функции $f_i(X, U)$ принимают вид:

$$f_i(X, U) = -\frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U), \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (4)$$

$$f_i(X, U) = -u_{i-K} \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U) + \frac{(1 - u_{i-K})}{dt} [-x_i + \eta_i(X)], \quad (4)$$

$i = K + 1, K + 2, \dots, N,$

где M - есть число зависимых переменных электронной цепи, K - число независимых переменных, N - общее число переменных ($N = K + M$) и t_s - итерационный параметр. Функция $F(X, U)$ является обобщенной целевой функцией процесса проектирования и может быть определена, например, следующим аддитивным выражением:

$$F(X, U) = C(X) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^M u_j g_j^2(X), \quad (5)$$

где $C(X)$ - есть целевая функция (неотрицательно определенная) процесса проектирования, а второй член формулы представляет собой дополнительную штрафную функцию. Функция $\eta_i(X)$, записанная в неявном виде, определяет текущее значение переменной x_i^{s+1} ($x_i^{s+1} = \eta_i(X)$), которое находится в результате решения системы (3). Вектор

управляющих функций $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $u_j \in \Omega$; $\Omega = \{0, 1\}$, является основным инструментом описанной методологии и управляет динамическим процессом приведения целевой функции $C(X)$ к минимуму за возможно минимальное процессорное время. При этом каждое новое значение вектора U определяет новую стратегию проектирования и соответствующую ей траекторию в пространстве параметров. Число возможных стратегий оптимизации цепи, определяемое зависящим от времени управляющим вектором $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, бесконечно, однако множество стратегий, определяющих структурный базис проектирования при векторе U , неизменном в течение процесса проектирования, конечно и равно 2^M . Эти стратегии имеют различное число операций и различное процессорное время. Требуется выработать четкий критерий, связанный с процессорным временем и позволяющий сравнивать различные стратегии оптимизации.

III. ФУНКЦИЯ ЛЯПУНОВА И ПРОИЗВОДНЫЕ ОТ НЕЁ

В работе [12] было введено понятие функции Ляпунова процесса оптимизации электронной цепи. Следуя [12], определим функцию Ляпунова формулой:

$$V(X, U) = [F(X, U)]^r, \quad (6)$$

где $F(X, U)$ - есть обобщенная целевая функция процесса проектирования и степень $r > 0$. Формула определяет функцию Ляпунова со стандартными свойствами в достаточно большой окрестности стационарной точки A , являющейся решением задачи оптимизации.

В качестве критерия, позволяющего сравнивать различные стратегии, использовалась относительная

производная по времени функции Ляпунова $W = \dot{V}/V$, где $\dot{V} = dV/dt$. Было показано [12], что поведение относительной временной производной функции Ляпунова W на начальном этапе процесса может в среднем прогнозировать полное относительное процессорное время той или иной стратегии оптимизации. Это означает, что для сравнения полного процессорного времени проектирования для различных стратегий нет необходимости проводить проектирование до конца. В этом случае достаточно сравнить поведение функции $W(t)$ на начальном этапе процесса оптимизации, чтобы определить стратегии, имеющие наименьшее процессорное время. При этом большая абсолютная величина функции $W(t)$ приводит к меньшему полному процессорному времени.

В то же время, как было показано в [12], поведение этой функции для различных стратегий носит немонотонный характер, и наблюдается довольно много пересечений между функциями $W(t)$, относящимися к различным стратегиям. Это

затрудняет однозначную идентификацию лучших и худших стратегий. В один момент времени одна из стратегий может быть идентифицирована как наилучшая, в другой – иная. В то же время, можно предположить, что площадь под кривой $W(t)$ может наилучшим образом прогнозировать процессорное время, так как важно поведение этой функции на определенном временном интервале, а не в отдельно взятой точке. В этом случае имеет смысл ввести новую функцию, определяемую интегралом от функции $W(t)$, которая будет служить критерием для анализа динамических свойств функции Ляпунова.

Определим функцию $S(t)$, являющуюся интегралом от функции $-W(t)$:

$$S(t) = -\int_0^t W(t) dt = -\int_0^t \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{V} dt = -\int_{V(0)}^{V(t)} \frac{dV}{V} = -\ln \left| \frac{V(t)}{V(0)} \right|. \quad (7)$$

Как видно из приведенной формулы, интеграл не зависит от производной по времени функции Ляпунова, а определяется только самой функцией Ляпунова в текущий момент $V(t)$ и в начальной точке процесса $V(0)$. Поскольку $V(t) < V(0)$ и функция $V(t)$ уменьшается со временем, функция $S(t)$ возрастает и в соответствии с формулой (7), и как площадь под кривой.

Можно отметить положительное свойство функции $S(t)$, состоящее в том, что она не зависит от расчета производных, а значит менее подвержена численным ошибкам, всегда возникающим при расчетах производных.

IV. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В соответствии с теорией прямого метода Ляпунова, информация об устойчивости траектории и процессорное время связаны с производной по времени от функции Ляпунова [13]-[14]. В работе [12] показано, что функция Ляпунова процесса проектирования вместе со своей производной может служить достаточно информативным источником для поиска перспективных, с точки зрения минимального процессорного времени, стратегий проектирования.

С точки зрения теории управления задача конструирования минимального по времени алгоритма проектирования может быть сформулирована как задача поиска переходного процесса с минимальным временем установления. Основным инструментом при этом поиске служит управляющий вектор U , позволяющий изменять структуру функций $f_i(X, U)$ и, в соответствии с этим, изменять время переходного процесса динамической системы. Для этого необходимо обеспечить максимальную скорость убывания функции Ляпунова, т.е. максимальное

абсолютное значение производной $\dot{V} = dV/dt$. Обычно эта производная не положительна для устойчивого процесса. Как показано в [12], можно констатировать тесную взаимосвязь между

процессорным временем проектирования и свойствами функции Ляпунова процесса проектирования.

Разобранные ниже примеры были проанализированы на основе непрерывной формы формулировки процесса проектирования (2). Примеры анализа поведения функции $S(t)$ приведены как для пассивных, так и для активных нелинейных цепей с транзисторами.

A. Пример 1

На рис. 1 приведена нелинейная цепь с тремя узлами, четырьмя независимыми переменными (проводимостями), y_1, y_2, y_3, y_4 , ($K=4$), тремя зависимыми переменными (узловыми напряжениями) V_1, V_2, V_3 ($M=3$) и двумя нелинейными элементами. Начальное приближение для переменных следующее: $x_{i0} = 1$, и $x_{i0} = 2$, $i = 2, 3, \dots, 7$.

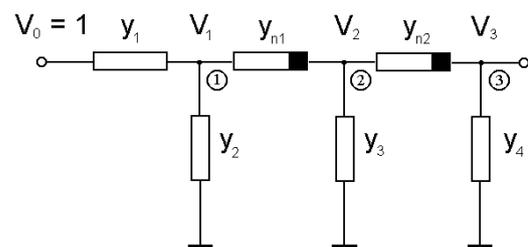


Рис. 1. Нелинейная цепь с тремя узлами

Нелинейные элементы определены следующим образом: $y_{n1} = a_{n1} + b_{n1}V_1^2$, $y_{n2} = a_{n2} + b_{n2}V_2^2$. Параметры нелинейности b_{n1}, b_{n2} равны 1. Компоненты вектора X определены формулами: $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$, $x_3^2 = y_3$, $x_4^2 = y_4$, $x_5 = V_1$, $x_6 = V_2$, $x_7 = V_3$. Цепь представляет собой делитель напряжения. Целевая функция определена как квадрат разности текущего выходного напряжения и напряжения заданного априори. Определение компонент x_1, x_2, x_3, x_4 формулами, предложенными выше, автоматически приводит к положительным значениям проводимостей, что снимает проблему положительной определенности сопротивлений и проводимостей и позволяет проводить оптимизацию во всем пространстве значений этих переменных без каких-либо ограничений. В этом случае мы имеем систему семи уравнений, определяющих алгоритм оптимизации (2), в то время как модель электронной цепи (3) определяется тремя нелинейными уравнениями.

Система оптимизации:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (8)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = -u_{i-4} \cdot \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U) + \frac{(1-u_{i-4})}{dt} \{-x_i(t-dt) + \eta_i(X)\}, \quad i = 5, 6, 7,$$

где $F(X, U) = C(X) + \sum_{j=1}^3 u_j g_j^2(X)$,

Модель цепи:

$$g_1(X) \equiv (x_1^2 + x_2^2 + a_{n1} + b_{n1}x_6^2)x_5 - (a_{n1} + b_{n1}x_6^2)x_6 - x_1^2 = 0,$$

$$g_2(X) \equiv -(a_{n1} + b_{n1}x_6^2)x_5 + (x_3^2 + a_{n1} + b_{n1}x_6^2 + a_{n2} + b_{n2}x_7^2)x_6 - (a_{n2} + b_{n2}x_7^2)x_7 = 0$$

(9)

$$g_3(X) \equiv -(a_{n2} + b_{n2}x_7^2)x_6 + (x_4^2 + a_{n2} + b_{n2}x_7^2)x_7 = 0.$$

Эта последняя система уравнений трансформируется в следующую систему вида (3)

$$(1-u_j)g_j(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

В данном случае структурный базис состоит из 8 стратегий. Результаты процесса проектирования для полного структурного базиса приведены в табл. 1.

Таблица 1

Полный структурный базис стратегий оптимизации

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, с
1	(0 0 0)	198989	10,61
2	(0 0 1)	586750	10,71
3	(0 1 0)	272611	5,87
4	(0 1 1)	541099	6,11
5	(1 0 0)	118901	2,64
6	(1 0 1)	278663	4,72
7	(1 1 0)	198162	3,35
8	(1 1 1)	274751	2,14

Результаты анализа полного структурного базиса различных стратегий оптимизации, соответствующие табл. 1, представлены на рис. 2 нормированными зависимостями функций $W(t)$ и $S(t)$ от процессорного времени в течение процесса проектирования.

Имеется вполне определенное соответствие между временем проектирования, представленным в табл. 1 и зависимостями $S(t)$ на рис. 2. Чем меньше время имеет некая стратегия, тем выше проходит график функции $S(t)$. Это наблюдается с самого начала процесса проектирования. Можно отметить также важное отличие в поведении функций $S(t)$ и $W(t)$.

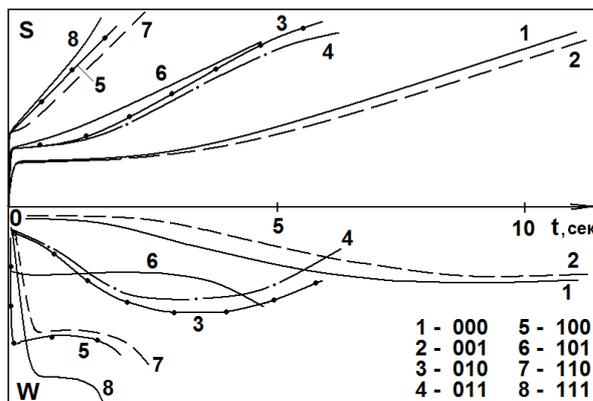


Рис. 2. Поведение функций $W(t)$ и $S(t)$ в течение процесса проектирования для полного структурного базиса

Зависимости относительной производной $W(t)$, соответствующие разным стратегиям, имеют взаимопересечения, что препятствует однозначному определению лучшей стратегии. В то же время, зависимости $S(t)$ таких пересечений не имеют, что позволяет однозначно идентифицировать лучшие стратегии оптимизации.

В. Пример 2

Этот пример соответствует проектированию однокаскадного транзисторного усилителя, представленного на рис. 3.

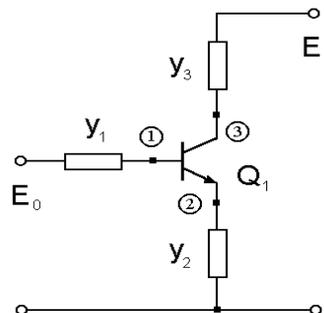


Рис. 3. Однокаскадный транзисторный усилитель

В качестве модели транзистора использовалась статическая модель Эберса-Молла, реализуемая в системе SPICE [15]. Целевая функция определена как сумма квадратов разностей между заранее заданными и текущими значениями напряжений на переходах транзисторов. Модель цепи (3) состоит из трех уравнений и система уравнений оптимизации (1) состоит из шести уравнений.

Начальные значения вектора X равны $x_1 = 0,074, x_2 = 0,224, x_3 = 0,316, x_4 = 1, x_5 = 2, x_6 = 4$. Результаты процесса проектирования для всех стратегий полного структурного базиса для однокаскадного транзисторного усилителя приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты анализа стратегий проектирования из структурного базиса для однокаскадного усилителя

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, с
1	(0 0 0)	418791	26,97
2	(0 0 1)	95396	5,05
3	(0 1 0)	615254	39,72
4	(0 1 1)	53218	2,58
5	(1 0 0)	393730	22,31
6	(1 0 1)	56821	2,91
7	(1 1 0)	292356	14,83
8	(1 1 1)	7234	0,11

Соответствующие зависимости функции $S(t)$ в течение процесса проектирования представлены на рис. 4.

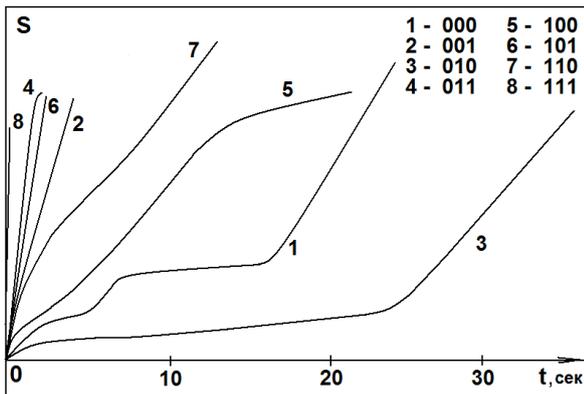


Рис. 4. Поведение функций $S(t)$ в течение процесса проектирования для полного структурного базиса стратегий

Наблюдается четкая корреляция между процессорным временем, приведенным в табл. 2 и скоростью роста функции $S(t)$ для разных стратегий структурного базиса. Анализируя зависимости рис. 4, можно с полным основанием утверждать, что стратегия, соответствующая более быстрому росту функции $S(t)$, является лучшей в смысле быстродействия.

С. Пример 3

Этот пример соответствует проектированию двухкаскадного транзисторного усилителя, представленного на рис. 5.

Результаты процесса проектирования для некоторых стратегий из полного структурного базиса приведены в табл. 3. Соответствующие зависимости функции $S(t)$ в течение процесса проектирования представлены на рис. 6.

Сравнивая поведение кривых, соответствующих функции $S(t)$ на этом рисунке с данными табл. 3, можно констатировать весьма точную верификацию по

машинному времени различных стратегий оптимизации на основе функции $S(t)$.

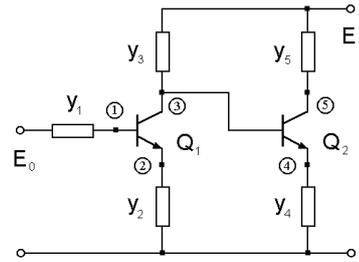


Рис. 5. Двухкаскадный транзисторный усилитель

Таблица 3

Результаты анализа стратегий проектирования из структурного базиса для двухкаскадного усилителя

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, с
1	(0 0 0 0 0)	165962	107,87
2	(0 0 0 0 1)	337487	263,48
3	(0 0 1 0 0)	44118	24,61
4	(0 0 1 0 1)	14941	6,54
5	(0 0 1 1 1)	21971	7,36
6	(0 1 1 0 1)	4544	1,54
7	(1 0 1 0 1)	2485	0,59
8	(1 0 1 1 1)	7106	1,21
9	(1 1 1 0 1)	2668	0,44
10	(1 1 1 1 1)	79330	3,41

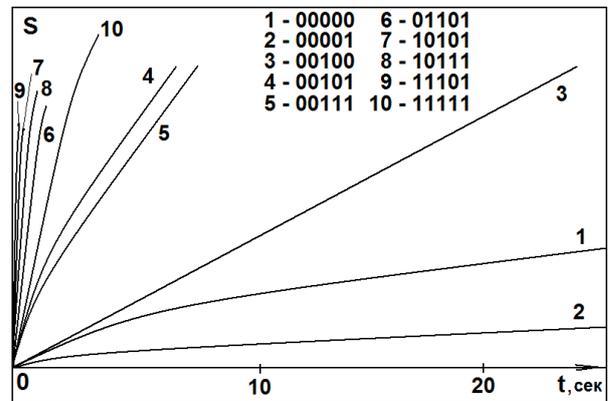


Рис. 6. Поведение функций $S(t)$ в течение процесса проектирования для некоторых стратегий

D. Пример 4

Этот пример соответствует проектированию трехкаскадного транзисторного усилителя, представленного на рис. 7.

Результаты процесса проектирования для некоторых стратегий из полного структурного базиса приведены в табл. 4. Соответствующие зависимости функции $S(t)$ в течение процесса проектирования представлены на рис. 8.

Этот пример, так же как и все предыдущие, показывает однозначную корреляцию между поведением функции $S(t)$ и полным процессорным

временем, необходимым для оптимизации цепи. При этом наблюдается очень хорошее разделение кривых, что существенным образом облегчает верификацию.

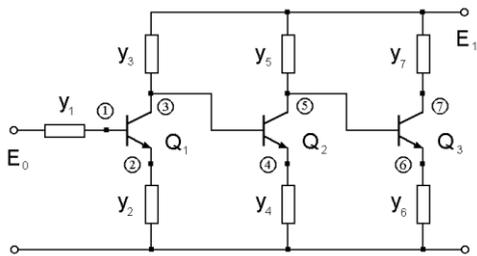


Рис. 7. Трехкаскадный транзисторный усилитель

Таблица 4

Результаты анализа стратегий проектирования из структурного базиса для трехкаскадного усилителя

N	Управляющий вектор	Число итераций	Процессорное время, (сек)
1	(0 0 0 0 0 0 0)	2161512	3019,47
2	(0 0 1 0 1 0 1)	275580	314,94
3	(0 1 1 1 0 0 0)	1075433	1042,05
4	(1 0 1 0 1 0 1)	102510	50,54
5	(1 0 1 1 1 0 1)	107541	43,66
6	(1 0 1 1 1 1 1)	38751	12,81
7	(1 1 1 0 1 1 1)	43387	13,91
8	(1 1 1 1 1 0 0)	160900	97,32
9	(1 1 1 1 1 1 0)	117828	83,72
10	(1 1 1 1 1 1 1)	52651	4,61

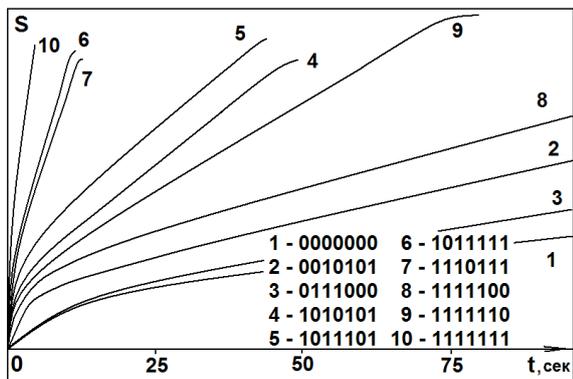


Рис. 8. Поведение функций $S(t)$ в течение процесса проектирования для некоторых стратегий полного структурного базиса

Обобщая полученные результаты можно утверждать, что гипотеза, сформулированная во введении, подтверждается в полной мере. Поведение функции, производной от функции Ляпунова процесса оптимизации и рассчитываемой как логарифм от функции Ляпунова, связано с полным процессорным временем, необходимым для оптимизации цепи. Сравнивая поведение этой функции для различных стратегий оптимизации на начальном этапе процесса, мы можем идентифицировать наилучшую стратегию и использовать именно ее для проектирования цепи. При

этом выявляется большой выигрыш в процессорном времени. Из таблиц 1 – 4 видно, что отношение времени ТСО с управляющим вектором $U = (0,0,\dots,0)$ к времени наилучшей стратегии для каждого примера составляет 5, 245, 245 и 655 раз, соответственно. Это и есть выигрыш процессорного времени, получаемый при выборе наилучшей стратегии оптимизации цепи.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют утверждать, что характеристики функции Ляпунова процесса оптимизации цепи связаны с процессорным временем, и знание поведения функции Ляпунова на начальном этапе оптимизации позволяет оценить полное процессорное время проектирования электронной системы и выбрать наилучшую стратегию оптимизации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bunch J.R., Rose D.J. Eds. Sparse matrix computations. - N.Y.: Acad. Press, 1976.
- [2] Osterby O., Zlatev Z. Direct methods for sparse matrices. - N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
- [3] George A. On block elimination for sparse linear systems // SIAM J. Numer. Anal. - 1984. - V. 11. - № 3. - P. 585 – 603.
- [4] Wu F.F. Solution of large-scale networks by tearing // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1976. - V. 23. - № 12. - P. 706 – 713.
- [5] Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.K., Chua L.O. An efficient cluster algorithm for tearing large-scale networks // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1977. - V. 24. - № 12. - P. 709 – 717.
- [6] Ruehli A., Sangiovanni-Vincentelli A., Rabbat G. Time analysis of large-scale circuits containing one-way macromodels // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1982. - V. 29. - № 3. - P. 185 – 191.
- [7] Каширский И.С., Трохименко Я.К. Обобщенная оптимизация электронных схем. - Киев: Техника, 1979.
- [8] Rizzoli V., Costanzo A., Cecchetti C. Numerical optimization of broadband nonlinear microwave circuits // IEEE MTT-S Int. Symp. - 1990. - V. 1. - P. 335 – 338.
- [9] Ochotta E.S., Rutenbar R.A., Carley L.R. Synthesis of high-performance analog circuits in ASTRX/OBLX // IEEE Trans. on CAD. - 1996. - V. 15. - № 3. - P. 273 – 294.
- [10] Zemliak A.M. Analog system design problem formulation by optimum control theory // IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences. - 2001. - V. E84A. - № 8. - P. 2029 – 2041.
- [11] Земляк А.М., Проектирование аналоговых цепей методами теории управления // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. - 2004. - Т. 47. - № 5. - С. 18 – 28.
- [12] Земляк А.М. Анализ динамических характеристик процесса проектирования аналоговых цепей. // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. - 2007. - Т. 50. - № 11. - С. 26 – 35.
- [13] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. - 223 с.
- [14] Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. – N.Y.: Springer-Verlag. – 1977.
- [15] Massobrio G., P. Antognetti P. Semiconductor device Modeling with SPICE. - N.Y.: Mc. Graw-Hill, Inc., 1993.