

Исследование устойчивости процесса оптимизации аналоговых цепей

А.М. Земляк^{1,2}, Т.М. Маркина¹

¹Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина, Киев

²Автономный университет Пуэбла, Мексика, Пуэбла, azemliak@yahoo.com

Аннотация — Процесс оптимизации аналоговых цепей сформулирован в терминах теории управления. При этом возникает множество возможных стратегий оптимизации. Для анализа, сравнения и выбора наилучших стратегий из этого множества предложено использовать концепцию функции Ляпунова динамической системы. Анализ поведения производной функции Ляпунова в окрестности решения задачи проектирования позволил установить значительную корреляцию между свойствами этой функции и процессорным временем проектирования цепи для каждой возможной стратегии.

Ключевые слова — оптимальное проектирование цепей, теория управления, множество стратегий оптимизации.

I. ВВЕДЕНИЕ

Одной из важных задач проектирования аналоговых систем является сокращение процессорного времени, требуемого для оптимизации цепей. Известны два основных подхода к сокращению необходимого времени анализа системы. Благодаря разреженной структуре матрицы проводимости электронной схемы многие идеи для работы с разреженными матрицами успешно реализованы [1]-[3]. Иной путь уменьшения числа операций для анализа электронных схем связан с идеей декомпозиции, т.е. разбиения большой системы на ряд подсистем с дальнейшим анализом этих подсистем и сшиванием результатов для получения полного решения [4]-[5]. Расширение методов прямого решения было получено также на основе иерархической декомпозиции и представления макромоделей [6]-[7]. Эти подходы соответствуют традиционной стратегии проектирования, так как анализ цепи, основанный на соблюдении законов Кирхгофа, осуществляется на каждом шаге процедуры оптимизации.

Переформулировка задачи оптимизации схемы без точного соблюдения законов Кирхгофа была предложена в работе [8]. Этот процесс был основан на идее игнорирования законов Кирхгофа для всей схемы или для ее части. В этом случае требовалось, помимо минимизации ранее определенной целевой функции, минимизировать также невязку системы уравнений

модели схемы. В своем крайнем случае, когда в невязку включались все уравнения математической модели схемы, эта идея была практически реализована в двух системах проектирования [9]-[11]. Авторы этих работ утверждают, что общее время проектирования было значительно сокращено. Эту последнюю идею можно определить как традиционную модифицированную стратегию проектирования. При этом стратегия оптимизации цепи вообще не включает анализ модели цепи в процессе оптимизации. Все параметры процесса оптимизации при этом являются независимыми.

Задачу проектирования электронной системы можно переформулировать, обобщив её и формализовав на основе теории управления для получения множества различных стратегий проектирования [12]-[13]. Это множество появляется вследствие введения специального управляющего вектора, позволяющего перераспределять затраты машинного времени между блоком анализа цепи и блоком параметрической оптимизации. При этом можно поставить задачу выбора из этого множества одной стратегии, наилучшей в некотором смысле, например, в смысле быстродействия. С точки зрения процессорного времени наилучшая стратегия оптимизации цепи может быть определена как стратегия, которая достигает оптимальную точку целевой функции процесса оптимизации за минимальное время. Один из главных вопросов в таком определении есть вопрос о том, какие именно условия необходимо выполнить для построения оптимального или квазиоптимального по времени алгоритма. Ответ на этот вопрос позволит существенно сократить затраты необходимого компьютерного времени для целей оптимизации.

В данной работе анализируются различные стратегии оптимизации цепи из полного структурного базиса стратегий, появляющихся на основе обобщенной теории, разработанной ранее. Поскольку задача оптимизации цепи сформулирована как динамическая управляемая система, для адекватного анализа поведения траекторий оптимизации вводится понятие функции Ляпунова процесса оптимизации.

II. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В соответствии с разработанной методологией, процесс оптимизации электронной цепи определен как динамическая управляемая система. Эта система определяется дифференциальными или разностными уравнениями для переменных состояния и системой ограничений, в качестве которых выступает математическая модель электронной цепи. Разностные уравнения для переменных системы в процедуре оптимизации могут быть записаны в виде:

$$x_i^{s+1} = x_i^s + t_s \cdot f_i(X, U), \quad (1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N.$$

Система ограничений может быть определена следующими уравнениями:

$$(1 - u_j) g_j(X) = 0, \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, M.$$

Структура функций $f_i(X, U)$ определяется методом оптимизации и, например, для градиентного метода, имеет вид:

$$f_i(X, U) = -\frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U), \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, K$$

$$f_i(X, U) = -u_{i-K} \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U) + \frac{(1-u_{i-K})}{dt} [-x_i' + \eta_i(X)], \quad (3')$$

$$i = K+1, K+2, \dots, N,$$

где M - есть число зависимых переменных электронной цепи, K - число независимых переменных, N - общее число переменных ($N=K+M$) и t_s итерационный параметр. Функция $F(X, U)$ является обобщенной целевой функцией процесса оптимизации цепи и может быть определена, например, следующим аддитивным выражением:

$$F(X, U) = C(X) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^M u_j g_j^2(X), \quad (4)$$

где $C(X)$ - есть целевая функция (не отрицательно определенная) процесса проектирования, а второй член формулы представляет собой дополнительную штрафную функцию. Функция $\eta_i(X)$, записанная в неявном виде, определяет текущее значение переменной x_i^{s+1} ($x_i^{s+1} = \eta_i(X)$), которое находится в результате решения системы (2). Вектор

управляющих функций $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $u_j \in \Omega$; $\Omega = \{0; 1\}$, является основным инструментом описанной методологии и управляет динамическим процессом приведения целевой функции $C(X)$ к минимуму за возможно минимальное время проектирования. При этом каждое новое значение вектора U определяет новую стратегию проектирования и соответствующую ей траекторию. Понятно, что число возможных стратегий проектирования, определяемое зависящим от времени управляющим вектором U бесконечно, однако множество стратегий определяющих структурный базис проектирования при векторе U , неизменном в течение процесса проектирования, конечно и равно 2^M .

Исходя из опыта, можно констатировать, что время оптимизации для каждой стратегии обусловлено свойствами сходимости и устойчивости траектории, соответствующей данной стратегии. Один из наиболее общих подходов к анализу устойчивости динамических систем основан на прямом методе Ляпунова [14-15]. Мы определили алгоритм оптимизации системы как динамический управляемый процесс. В этом случае основная цель управления может быть определена как задача минимизации переходного времени этого процесса. При этом возможен анализ устойчивости каждой траектории и характеристик переходного процесса, каковым является процесс оптимизации цепи, на основе прямого метода Ляпунова. Предлагается использовать понятие функции Ляпунова процесса проектирования для анализа устойчивости и поиска оптимальной структуры управляющего вектора.

Существует определенная свобода в выборе функции Ляпунова вследствие неединственности ее формы. Определим функцию Ляпунова процесса проектирования (1)-(3) следующей формулой:

$$V(X) = \sum_i (x_i - a_i)^2, \quad (5)$$

где a_i - есть стационарное значение координаты x_i . По своему смыслу множество всех коэффициентов a_i является основным результатом процесса проектирования, т.к. при этих значениях параметров системы достигается минимум целевой функции $C(X)$, т.е. достигаются все цели проектирования. Ясно, что эти коэффициенты становятся определенными лишь в конце проектирования. Неудобство формулы (5) заключается в том, что точка $a = (a_1, a_2, \dots, a_N)$ неизвестна, т.к. она может быть получена только в конце процесса проектирования. То есть, возможность анализировать устойчивость различных стратегий проектирования на основе формулы (5) появляется в

том случае, если решение задачи, т.е. точка a , уже найдено каким-либо способом. С другой стороны, представляет интерес проанализировать устойчивость процесса в течение процедуры оптимизации. В этом случае требуется определить другую форму функции Ляпунова, которая бы не зависела от конечной стационарной точки a .

Определим функцию Ляпунова следующей формулой:

$$V(X, U) = [F(X, U)]^r, \quad (6)$$

где $F(X, U)$ - есть обобщенная целевая функция процесса проектирования и степень $r > 0$. В дальнейшем, для примеров, степень r равна 0,5. Формула (6), при некоторых дополнительных условиях, определяет функцию Ляпунова в достаточно большой окрестности стационарной точки.

В соответствии с методом Ляпунова информация об устойчивости траектории связана с производной по времени от функции Ляпунова. Прямой расчет

производной по времени от функции Ляпунова \dot{V} позволяет судить об устойчивости динамической системы. Процесс проектирования и соответствующая траектория являются устойчивыми, если эта производная является отрицательной. С другой стороны, прямой метод Ляпунова, как известно, дает достаточные условия устойчивости, а не необходимые. Это означает, что процесс теряет устойчивость или не теряет его в случае положительной производной. Если в отдельных

точках траектории проектирования производная \dot{V} становится положительной, это еще не означает появление неустойчивости траектории проектирования в этих точках. Лишь в случае

появления положительной производной \dot{V} на множестве положительной меры можно констатировать появление неустойчивости, что проявляется в нарастании, хотя возможно и небольшом, функции Ляпунова. При этом можно констатировать, что, начиная с этого момента, целевая функция процесса проектирования не уменьшается, а возрастает. Если такое поведение наблюдается далеко от стационарной точки, то это означает, что процесс проектирования не сходится, то есть решение не может быть получено на этой траектории. В этом случае нужно менять или исходную точку процесса проектирования, или саму стратегию проектирования.

В случае появления положительной производной \dot{V} в конце процесса проектирования, недалеко от стационарной точки, можно говорить о значительном замедлении процесса проектирования. Данная стратегия проектирования начинает «топтаться на месте» и не может обеспечить требуемую точность, что выливается в существенное возрастание времени

проектирования, а в некоторых случаях не приводит к решению задачи.

III. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера анализа устойчивости различных стратегий оптимизации рассмотрим задачу проектирования на постоянном токе двухкаскадного транзисторного усилителя, изображенного на рис. 1. В качестве модели транзистора использовалась статическая модель Эберса-Молла, реализуемая в системе SPICE [16]. Целевая функция процедуры оптимизации определена как сумма квадратов разностей между заранее заданными и текущими значениями напряжений на переходах транзисторов.

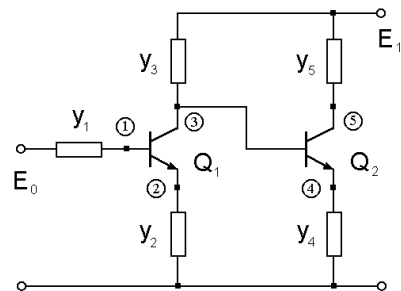


Рис. 1. Двухкаскадный транзисторный усилитель

Имеется пять независимых переменных y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 ($K=5$) и пять зависимых переменных V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 ($M=5$). Вектор X включает десять компонент: $x_1^2 = y_1, x_2^2 = y_2, x_3^2 = y_3, x_4^2 = y_4, x_5^2 = y_5, x_6 = V_1, x_7 = V_2, x_8 = V_3, x_9 = V_4, x_{10} = V_5$. Алгоритм оптимизации включает систему десяти уравнений, а модель схемы определяется пятью нелинейными уравнениями. Структурный базис стратегий оптимизации содержит 32 различные стратегии.

Прямой расчет производной по времени от функции Ляпунова \dot{V} , определяемой формулой (6) при $r = 0,5$ показал, что она является отрицательной в начальной точке процесса проектирования для всех траекторий, т.е. все возможные стратегии проектирования и их траектории вначале являются устойчивыми, при условии достаточно малого шага интегрирования системы (1). В то же время, при достижении текущей точкой траектории некоторой ε -окрестности стационарной точки (a_1, a_2, \dots, a_N) , данная стратегия проектирования теряет устойчивость, т.к. производная функции Ляпунова становится положительной. Это означает, что эта стратегия не гарантирует сходимости траекторий к стационарной

точке (a_1, a_2, \dots, a_N) , начиная с некоторой ε -окрестности, т.е. не гарантируется достижение минимума целевой функции $F(X, U)$, а значит и функции $C(X)$ с точностью выше значения ε . В действительности каждая траектория имеет свою собственную ε -окрестность, начиная с которой возникают проблемы сходимости, и эта окрестность определяет максимально достижимую точность для данной стратегии. В табл. 1 представлена информация о результатах оптимизации усилителя, изображенного на рис. 1. Оптимизация осуществлялась посредством различных стратегий, входящих в структурный базис и определяемых управляющим вектором U .

Окончание процесса проектирования определялось достижением производной \dot{V} положительных значений на положительной мере. Следует отметить, что оптимизация осуществлялась на основе формулы (1) и градиентного метода с переменным оптимальным шагом t_s , вследствие чего оптимальный шаг t_s мог быть как малым, так и большим. Последствием этого явились резкие

изменения в значении производной \dot{V} от одного шага к другому. Для сглаживания производной \dot{V} производилось усреднение ее значений на интервале в 30 шагов.

Анализ результатов табл. 1 позволил выявить некоторые существенные закономерности. Во-первых, можно констатировать сильную корреляцию между процессорным временем проектирования и критическим значением ε -окрестности, после достижения которой значение производной \dot{V} остается положительным. Как правило, чем меньше достижимое значение ε -окрестности, тем меньше процессорное время. Можно упорядочить все стратегии табл. 1 в порядке нарастания процессорного времени от стратегии 16, имеющей время 0,38 сек. до стратегии 6, имеющей время 76,89 сек. С другой стороны, можно упорядочить эти стратегии в порядке возрастания критического значения ε -окрестности. Результат такого упорядочивания при сравнении различных стратегий представлен в табл. 2.

Таблица 1

Результаты оптимизации двухкаскадного усилителя для некоторых стратегий структурного базиса

N	Вектор управляющих функций $U(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$	Число итераций	Процессорное время (сек)	Критическое значение ε -окрестности
1	(0 0 0 0 0)	3177	7,25	2,78E-08
2	(0 0 0 0 1)	3074	8,02	3,36E-07
3	(0 0 0 1 1)	11438	26,36	8,18E-07
4	(0 0 1 0 1)	799	1,16	9,38E-09
5	(0 0 1 1 0)	1798	2,6	1,61E-08
6	(0 1 0 1 1)	43431	76,89	3,16E-05
7	(0 1 1 0 0)	1378	2,25	1,67E-08
8	(0 1 1 0 1)	571	0,72	6,83E-09
9	(0 1 1 1 0)	1542	2,03	2,05E-08
10	(1 0 0 1 1)	11839	21,37	1,68E-05
11	(1 0 1 0 0)	2097	3,57	5,47E-07
12	(1 0 1 1 0)	6026	8,31	4,94E-07
13	(1 1 1 0 0)	6602	8,84	7,41E-07
14	(1 1 1 0 1)	935	0,71	1,33E-08
15	(1 1 1 1 0)	2340	2,31	1,62E-07
16	(1 1 1 1 1)	1502	0,38	1,09E-08

Таблица 2

Упорядоченность стратегий оптимизации двухкаскадного усилителя

Номер по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номера стратегий упорядоченных по процессорному времени	16	14	8	4	9	7	15	5	11	1	2	12	13	10	3	6
Номера стратегий упорядоченных по значению ε -окрестности	8	4	16	14	5	15	7	9	1	2	12	11	13	3	10	6

Место, которое занимает любая стратегия в этой таблице, определяемое двумя различными способами упорядочивания, отличается весьма незначительно. Для двух стратегий (13 и 6) это место совпадает. В семи случаях наблюдается отличие на одно место, в четырех случаях – на два места, и в трех – на три. Усредненное значение этого отличия равно 1,5. Учитывая то, что критические значения ε -окрестности получены приближенно путем усреднения в процессе интегрирования системы (1) можно считать, что соответствие между процессорным временем и значением ε -окрестности вполне приемлемое. С другой стороны, параметры ε -окрестности получены на основе анализа функции Ляпунова и ее производной, и, следовательно, можно констатировать тесную взаимосвязь между процессорным временем проектирования и свойствами функции Ляпунова процесса проектирования.

Анализ процесса проектирования для второй цепи, представленной на рис. 2, позволяет сделать аналогичные выводы. Вектор X включает четырнадцать компонент: $x_1^2 = y_1$, $x_2^2 = y_2$, $x_3^2 = y_3$, $x_4^2 = y_4$, $x_5^2 = y_5$, $x_6^2 = y_6$, $x_7^2 = y_7$, $x_8 = V_1$, $x_9 = V_2$, $x_{10} = V_3$, $x_{11} = V_4$, $x_{12} = V_5$, $x_{13} = V_6$, $x_{14} = V_7$. Модель цепи (2) включает семь уравнений ($M=7$), процедура оптимизации (1) включает четырнадцать уравнений.

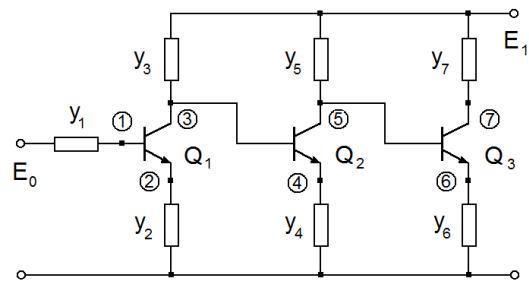


Рис. 2. Трехкаскадный транзисторный усилитель

Управляющий вектор состоит из семи компонент $U = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$, структурный базис включает 128 различных стратегий.

В табл. 3 представлена информация о результатах проектирования этой цепи посредством различных стратегий проектирования, входящих в структурный базис.

Как и в предыдущем примере, в этом случае можно сформулировать правило: чем меньше достижимое значение ε -окрестности, тем меньше процессорное время для данной стратегии. Упорядочивание этих стратегий по нарастанию процессорного времени и по возрастанию критического значения ε -окрестности представлено в табл. 4.

Таблица 3

Результаты оптимизации трехкаскадного усилителя для некоторых стратегий структурного базиса

N	Вектор управляющих функций $U(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7)$	Число итераций	Процессорное время (сек)	Критическое значение ε -окрестности
1	(0 0 0 0 0 0 0)	9106	45,75	7,27E-07
2	(0 0 1 0 1 1 0)	1844	8,63	1,91E-07
3	(0 0 1 1 1 0 0)	3067	15,65	6,77E-07
4	(0 0 1 1 1 1 1)	647	1,87	4,73E-09
5	(0 1 1 0 1 0 1)	627	1,42	4,69E-09
6	(0 1 1 0 1 1 0)	1513	4,01	5,62E-07
7	(0 1 1 0 1 1 1)	643	1,21	9,07E-09
8	(0 1 1 1 1 1 0)	3229	7,30	7,54E-07
9	(1 0 1 0 1 0 1)	2069	4,06	1,43E-07
10	(1 0 1 1 1 0 1)	1657	2,53	2,13E-07
11	(1 1 1 0 1 0 1)	1477	2,09	1,33E-07
12	(1 1 1 0 1 1 0)	3931	6,48	9,21E-07
13	(1 1 1 1 1 0 0)	3626	7,85	6,25E-07
14	(1 1 1 1 1 0 1)	1793	2,03	2,12E-07
15	(1 1 1 1 1 1 0)	2345	3,51	2,08E-07
16	(1 1 1 1 1 1 1)	2149	0,61	7,59E-08

Таблица 4

Упорядоченность стратегий оптимизации трехкаскадного усилителя

Номер по порядку	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Номера стратегий, упорядоченных по процессорному времени	16	7	5	4	14	11	10	15	6	9	12	8	13	2	3	1
Номера стратегий, упорядоченных по значению ε -окрестности	5	4	7	16	11	9	2	15	14	10	6	13	3	1	8	12

Место, занимаемое любой стратегией в этой таблице, определяется упорядочиванием по времени и по значению ε -окрестности. Разница в порядковом месте для двух способов упорядочивания в этом примере несколько больше, чем в первом. Однако, значение этой разницы, усредненное по всем стратегиям, равно 2,6. Исходя из проведенного анализа, можно сделать вывод, что существует определенная корреляция между характеристиками функции Ляпунова процесса проектирования и процессорным временем для выбранной стратегии. Функция Ляпунова процесса проектирования вместе со своей производной может служить достаточно информативным источником для поиска перспективных, с точки зрения минимального процессорного времени, стратегий проектирования.

Полученные результаты проясняют известные факты задачи практической оптимизации цепей в традиционном подходе, когда процесс оптимизации закикливается до момента достижения необходимой точности решения. При использовании традиционного подхода, в нашей формулировке при $U = (0,0,\dots,0)$ имеется лишь одна стратегия проектирования и, в случае закикливания, приходится заново решать задачу, исходя из нового начального условия. Сейчас стало понятным, что это закикливание связано с потерей устойчивости соответствующей траектории оптимизации. Для его преодоления предлагается использовать иные стратегии оптимизации, обладающие большим запасом устойчивости. Результаты также показывают взаимосвязь между устойчивостью траектории для определенной стратегии оптимизации и процессорным временем. Чем выше устойчивость, тем меньше процессорное время. Полученные теоретические результаты являются следующим шагом на пути исследования характеристик наилучших стратегий оптимизации цепей, ведущим к построению оптимального алгоритма проектирования.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из фундаментальных характеристик, позволяющей анализировать поведение динамической системы, является функция Ляпунова. Поскольку процесс оптимизации цепи формулируется как динамическая управляемая система, постольку введение понятия функции Ляпунова процесса оптимизации явилось естественным шагом. Оказалось удобным использовать различные формы функции Ляпунова для изучения свойств процесса проектирования. В этом случае, опираясь на характеристики функции Ляпунова, можно провести детальный анализ свойств различных стратегий оптимизации электронных цепей.

Показано, что задача анализа временных характеристик различных стратегий проектирования связана с более общей задачей устойчивости и

сходимости стратегий оптимизации. Оказалось, что стратегии, обладающие большим запасом устойчивости, имеют меньшее процессорное время оптимизации цепи. Увеличение процессорного времени при реализации той или иной стратегии связано, в первую очередь, с потерей устойчивости данной стратегии, проявляющейся в изменении знака производной по времени от функции Ляпунова при приближении к стационарной точке, т.е. к решению задачи проектирования. При этом анализ был проведен на основе прямого метода Ляпунова путем изучения поведения функции Ляпунова и её производной в течение всего процесса оптимизации цепи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bunch J.R., Rose D.J. Eds. Sparse matrix computations. - N.Y.: Acad. Press, 1976.
- [2] Osterby O., Zlatev Z. Direct methods for sparse matrices. - N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
- [3] George A. On block elimination for sparse linear systems // SIAM J. Numer. Anal. - 1984. - V. 11. - № 3. - P. 585 – 603.
- [4] Wu F.F. Solution of large-scale networks by tearing // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1976. - V. 23. - № 12. - P. 706 – 713.
- [5] Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.K., Chua L.O. An efficient cluster algorithm for tearing large-scale networks // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1977. - V. 24. - № 12. - P. 709 – 717.
- [6] Ruehli A., Sangiovanni-Vincentelli A., Rabbat G. Time analysis of large-scale circuits containing one-way macromodels // IEEE Trans. Circuits Syst. - 1982. - V. 29. - № 3. - P. 185 – 191.
- [7] N. Rabat, A.E. Ruehli, G.W. Mahoney, and J.J. Coleman, A Survey of Macromodeling, IEEE Int. Symp. Circuits Systems, April 1985. - P. 139-143.
- [8] Каширский И.С., Трохименко Я.К. Обобщенная оптимизация электронных схем. - Киев: Техника, 1979.
- [9] Rizzoli V., Costanzo A., Cecchetti C. Numerical optimization of broadband nonlinear microwave circuits // IEEE MTT-S Int. Symp. - 1990. - V. 1. - P. 335 – 338.
- [10] Ochotta E.S., Carley L.R., Rutenbar R.A. Analog circuit synthesis for large, realistic cells: Designing a pipelined A/D converter with ASTRX/OBLX // Custom Integrated Circuits Conf. - 1994. - V. 15. - № 4. - P. 1 – 4.
- [11] Ochotta E.S., Rutenbar R.A., Carley L.R. Synthesis of high-performance analog circuits in ASTRX/OBLX // IEEE Trans. on CAD. - 1996. - V. 15. - № 3. - P. 273 – 294.
- [12] Zemliak A.M. Analog system design problem formulation by optimum control theory // IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences. - 2001. - V. E84A. - № 8. - P. 2029 – 2041.
- [13] Земляк А.М. Проектирование аналоговых цепей методами теории управления // Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. - 2004. - Т. 47. - № 5. - С. 18 – 28.
- [14] Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. - 223 с.
- [15] Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. – N.Y.: Springer-Verlag. – 1977.
- [16] Massobrio G., P. Antognetti P. Semiconductor device Modeling with SPICE. - N.Y.: Mc. Graw-Hill, Inc., 1993.