

Универсальная методика оценивания шумов округления в рекурсивных цифровых фильтрах, описываемых топологическими матрицами

В.А. Лесников¹, Т.В. Наумович², А.В. Частиков³

Вятский государственный университет

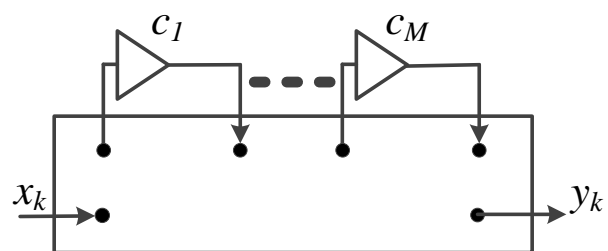
¹lesnlex@mail.ru, ²ntv_new@mail.ru, ³alchast@mail.ru

Аннотация — Для адекватного описания произвольной структуры цифровых фильтров удобно применять так называемые топологические матрицы, элементами которых являются коэффициенты передачи между узлами структурной схемы. Известны методы оценивания уровня шумов округления в цифровых фильтрах, основанные на описании их структуры в пространстве состояний. В данном докладе предлагается методика оценивания уровня шумов округления в цифровом фильтре по его топологической матрице.

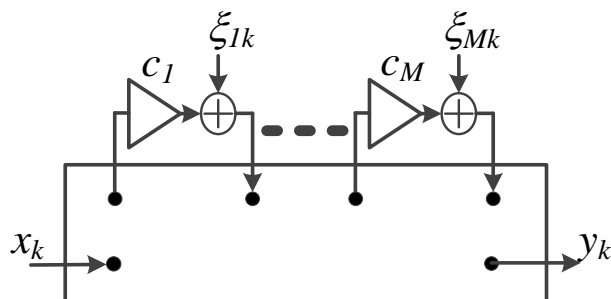
Ключевые слова — рекурсивные цифровые фильтры, шумов округления, пространство состояний, топологические матрицы, структурный синтез.

I. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе для оценивания уровня шумов округления результатов арифметических операций используется стандартная линейная шумовая модель [3], основанная на добавлении после каждого множителя источника равномерно распределенного некоррелированного шума с нулевым средним значением и дисперсией, равной $q^2/12$, где q^2 - шаг квантования (рис. 1). В принципе эта задача не представляет особых трудностей. Для любой структурной схемы можно вывести соответствующие формулы и провести соответствующие расчеты. Однако вывод будет уникальным для каждой конкретной структуры. Новая парадигма синтеза цифровых фильтров (ЦФ), разрабатываемая авторами [1, 2], предполагает генерацию различных структур ЦФ и последующий анализ их шумовых свойств. Поэтому актуальной задачей является разработка универсальной методики оценивания шума округления для ЦФ с произвольной структурой.



а



б

Рис. 1. ЦФ с произвольной структурой с M множителями.

а – исходная структура, б – шумовая модель

II. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Удобный инструмент для оценивания шумов округления ЦФ дается описанием его работы в пространстве состояний [4, 5]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{k+1} \\ y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_k \\ x_k \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где:

\mathbf{s}_k - n -мерный вектор-столбец состояний ЦФ в k -й момент времени – вектор состояния (состояниями ЦФ

полагаем значения отсчетов на выходах n блоков задержки);

x_k - отсчеты входного сигнала;

y_k - отсчеты выходного сигнала;

\mathbf{A} - квадратная матрица коэффициентов передачи между выходами и входами блоков задержки размерностью $n \times n$ (матрица системы);

\mathbf{b} - n -мерный вектор-столбец коэффициентов передачи между входом ЦФ и входами блоков задержки (матрица управления);

\mathbf{c} - n -мерный вектор-строка коэффициентов передачи между выходами блоков задержки и выходом ЦФ (матрица выхода);

d - скалярная величина, равная коэффициенту передачи между входом и выходом ЦФ (матрица прямой связи).

На рис. 2 показано графическое представление уравнений состояния.

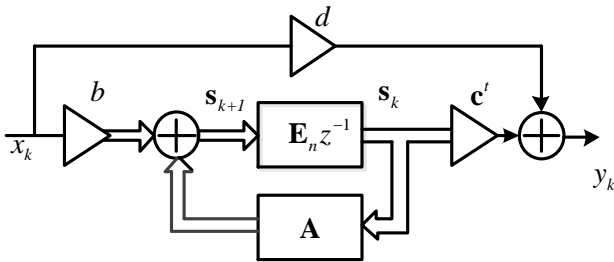


Рис. 2. Графическое изображение уравнений состояния

Уравнение (1) используется для определения матрицы наблюдаемости \mathbf{W} и матрицы управляемости \mathbf{K} . Для вычисления элементов матриц наблюдаемости и управляемости необходимо решить уравнения [4, 5]:

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^t \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{c}^t \mathbf{c} \quad (2)$$

и

$$\mathbf{K} = \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^t + \mathbf{b} \mathbf{b}^t. \quad (3)$$

Дисперсия шума округления на выходе ЦФ будет равна [4, 5]:

$$\sigma_{out}^2 = g \frac{q^2}{12}, \quad (4)$$

где:

$$g = k_{11} w_{11} + k_{22} w_{22}; \quad (5)$$

k_{ij} - элементы матрицы \mathbf{K} ;

w_{ij} - элементы матрицы \mathbf{W} .

III. ОПИСАНИЕ РАБОТЫ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Далее рассмотрим задачу формирования уравнения (1) по топологической матрице $\mathbf{T}(z^{-1})$.

Топологическая матрица ЦФ зависит от его структурной схемы и определяется как матрица коэффициентов передачи в z -области между узлами структурной схемы размерностью $N \times N$, где N - число узлов структурной схемы. Топологическую матрицу можно представить [6] в виде:

$$\mathbf{T}(z^{-1}) = \mathbf{T}_c + z^{-1} \mathbf{T}_d, \quad (6)$$

где:

\mathbf{T}_c - матрица, полученная из $\mathbf{T}(z^{-1})$ заменой нулями элементов, относящихся к блокам задержки;

\mathbf{T}_d - матрица, полученная из $\mathbf{T}(z^{-1})$ заменой нулями всех элементов, не равных z^{-1} и заменой единицами элементов, равных z^{-1} .

Работу ЦФ с произвольной структурой можно описать уравнением [6]:

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{T}_c \mathbf{Y}_k + \mathbf{T}_d \mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{E}_N x_k, \quad (7)$$

где:

\mathbf{Y}_k - вектор отсчетов, вычисляемых в узлах структурной схемы в k -й момент времени;

\mathbf{E}_N - единичная матрица размерностью $N \times N$.

Взяв от (7) z -преобразование, получим выражение:

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{T}_c \mathbf{Y}(z) + z^{-1} \mathbf{T}_d \mathbf{Y}(z) + \mathbf{E}_N X(z), \quad (8)$$

из которого получим матрицу передаточных функций:

$$\mathbf{H}(z^{-1}) = \frac{1}{X(z)} \mathbf{Y}(z) = (\mathbf{E}_N - \mathbf{T}_c - z^{-1} \mathbf{T}_d)^{-1}. \quad (9)$$

Матрица передаточных функций между узлами линейной системы, из которой удалены блоки задержки, равна:

$$\mathbf{H}_c = (\mathbf{E}_N - \mathbf{T}_c)^{-1}. \quad (10)$$

Вместо того, чтобы решать сложную задачу символического инвертирования матрицы, получим аналитические выражения для элементов матрицы $\hat{\mathbf{H}}_c$ произвольного порядка. При этом предполагается, что узлы структурной схемы пронумерованы таким образом, чтобы все отличные от нуля и от z^{-1} коэффициенты передачи схемы ЦФ находились ниже главной диагонали топологической матрицы (существование такой нумерации означает

вычислимость или, другими словами, физическую реализуемость ЦФ).

Для $N = 3$ справедливо соотношение

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{21}c_{32} + c_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Для $N = 4$

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 \\ c_{21}c_{32} + c_{31} & c_{32} & 1 & 0 \\ \left((c_{21}c_{32} + c_{31})c_{43} + \right. \\ \left. c_{21}c_{42} + c_{41} \right) & c_{32}c_{43} + c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

С учетом особенностей обращения треугольных матриц можно записать рекуррентные выражения для вычисления элементов $h_{c,ij}$ матрицы \mathbf{H}_c :

$$h_{c,i,j} = \begin{cases} 0, & i < j \\ 1, & i = j \\ \sum_{r=1}^{i-j} h_{c,i-r,j}, & i > j \end{cases} \quad (15)$$

IV. ПЕРЕХОД ОТ ОПИСАНИЯ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ К ОПИСАНИЮ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Матрица \mathbf{H}_c содержит все элементы \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} и d , фигурирующие в уравнении (1).

Элементы матрицы \mathbf{A} являются элементами матрицы \mathbf{H}_c , содержащимися в строках, номера которых равны номерам входных узлов блоков задержки, а номера столбцов – номера выходных узлов блоков задержки. Элементы вектора \mathbf{b} являются элементами матрицы \mathbf{H}_c , содержащимися в столбце, номер которого равен номеру входного узла ЦФ, и в строках, номера которых равны номерам входных узлов блоков задержки. Элементы вектора \mathbf{c} являются элементами матрицы \mathbf{H}_c , содержащимися в строке, номер которой равен номеру выходного узла ЦФ, и в столбцах, номера которых равны номерам выходных узлов блоков задержки. Элемент d является элементом матрицы \mathbf{H}_c , находящемся в строке, номер которой равен номеру выходного узла ЦФ, и в столбце, номер которого равен номеру входного узла ЦФ.

V. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МЕТОДИКИ ДЛЯ КОНКРЕТНОЙ СТРУКТУРЫ ЦФ

Продемонстрируем переход от описания ЦФ топологической матрицей к описанию в пространстве состояний на примере ЦФ, структурная схема которого (рис. 3) была сгенерирована при помощи методики, описанной в [7].

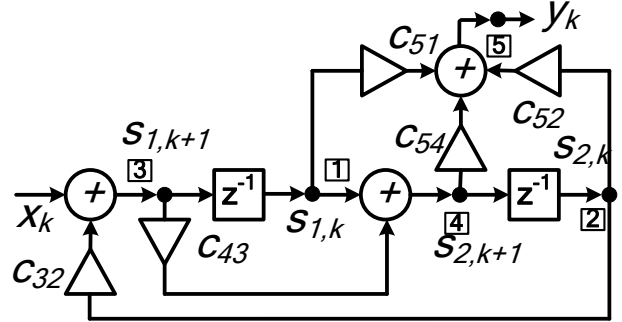


Рис. 3. Пример структуры ЦФ

Очевидно, что в пространстве состояний эта структура описывается уравнениями:

$$\begin{bmatrix} s_{1,k+1} \\ s_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{32} \\ 1 & c_{32}c_{43} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,k} \\ s_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ c_{43} \end{bmatrix} x_k, \quad (16)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} c_{51} + c_{54} & c_{32}c_{43}c_{54} + c_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{1,k} \\ s_{2,k} \end{bmatrix} + c_{43}c_{54}x_k \quad (17)$$

Данная структура описывается топологической матрицей:

$$\mathbf{T}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c_{41} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & 0 & c_{54} & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Матрица \mathbf{H}_c для этого ЦФ имеет вид:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{A} & 0 & \mathbf{b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & c_{32} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & & c_{32}c_{43} & c_{43} & 1 & 0 \\ c_{54} + c_{51} & & & c_{32}c_{43}c_{54} + c_{52} & c_{43}c_{54} & c_{54} & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Сравнивая уравнения состояния (11) и (12) с уравнением (14), убеждаемся в том, что предложенная методика позволяет получать представление произвольной структуры ЦФ в пространстве состояний. Представление же в пространстве состояний позволяет единообразно оценивать уровень шумов округления для любого ЦФ.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из путей решения задачи структурного синтеза рекурсивных цифровых фильтров является генерация структурных схем с последующей оценкой точности реализации частотных характеристик и анализом эффектов, связанных с конечной длиной слова. Известны методы генерации структурных схем на основе представления ЦФ в пространстве состояний. Однако данный подход ограничен тем, что отсутствует взаимно однозначное соответствие между структурной схемой и уравнениями состояния. Разрабатываемый авторами данного доклада подход, основанный на описании структуры топологическими матрицами, лишен данного недостатка. Этот подход учитывает только эффекты искажения частотных характеристик из-за неточности реализации коэффициентов ЦФ. Переход же от описания сгенерированной структуры топологической матрицей к описанию в пространстве состояний позволяет оценивать также уровень шумов округления.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ, грант 10-07-00528-а).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters //

- Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'09). 2009. P. 115-118. – URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5742083 (дата обращения 24.05.2012).
- [2] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'10). 2010. P. 156-159. – URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5742051 (дата обращения 24.05.2012).
- [3] Рабинер, Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 848 с.
- [4] Ritzerfeld J.H.F. Noise gain formulas for low noise second-order digital filter structures // Proc. ProRISC'99, 10th Annual Workshop on Circuits, Systems and Signal Processing. Mierlo, The Netherlands. 1999. P. 383-388. – URL: <http://www.sps.ele.tue.nl/members/J.H.F.Ritzerfeld/pdfs/proris99.pdf> (дата обращения 24.05.2012).
- [5] Ritzerfeld J.H.F. Noise gain expressions for low noise second-order digital filter structures // IEEE Trans. Circuits Syst. II - Analog and Digital Signal Processing. 2005. V. 52, № 4, P. 223-227. – URL: <http://www.sps.ele.tue.nl/members/J.H.F.Ritzerfeld/pdfs/ieecacas2.pdf> (дата обращения 24.05.2012).
- [6] Crochier R.F., Oppenheim A.V. Analysis of linear digital networks // Proceedings of IEEE. 1975. V. 63. № 4. P. 581-595. – URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=1451723 (дата обращения 24.05.2012).
- [7] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'11). 2011. P. 221-224. – URL: <http://ieeexplore.ieee.org/search/freesrabstract.jsp?tp=&arnumber=6116600> (дата обращения 24.05.2012).