

# Декомпозиция и минимизация диаграмм двоичного выбора для систем неполностью определенных булевых функций

П.Н. Бибило

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси,

bibilo@newman.bas-net.by

**Аннотация** — Предлагается метод декомпозиции системы неполностью определенных булевых функций, представленных в виде диаграммы двоичного выбора. Минимизация числа промежуточных функций при такой декомпозиции ориентирована на увеличение быстродействия логических схем из библиотечных элементов. Минимизация сложности диаграммы двоичного выбора сводится к поиску такого ее доопределения, при котором уменьшается число ее вершин.

**Ключевые слова** — булева функция, дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), диаграмма двоичного выбора, декомпозиция, раскраска графа, синтез логической схемы.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Диаграммы двоичного выбора (Binary Decision Diagram, BDD), называемые также диаграммами двоичных решений, явились конкретной формой задания граф-схем алгоритмов выбора решений применительно к булевым функциям. Представление полностью определенных булевых функций (и систем функций) в виде бинарных программ [1] и BDD – многоуровневых представлений на базе разложения Шеннона [2, 3] во многих случаях является гораздо более компактным, чем двухуровневые И/ИЛИ представления тех же функций в матричных формах, под которыми понимаются ДНФ и таблицы истинности. Кроме того, использование специальных структур данных при программной реализации алгоритмов получения и обработки BDD позволяет получать эффективные программы выполнения различных операций над BDD. Аппарат BDD широко используется при решении различных задач [4], возникающих при проектировании цифровых систем.

Декомпозиция (функциональное разделение) булевых функций по входным переменным изучалась давно и использовалась при синтезе комбинационных логических схем с различными целями. Для программируемых логических матриц (ПЛМ) декомпозиция является способом уменьшения числа входных переменных, либо площади ПЛМ [5]. Для синтеза структур FPGA (Field-Programmable Gate Array – программируемая пользователем вентильная матрица) декомпо-

зиция [6] стала одним из приемов технологического отображения в сеть настраиваемых элементов LUT (Look-Up Table - таблица, реализующая логическую функцию). При синтезе схем из библиотечных элементов декомпозиция может использоваться либо с целью разбиения функционального описания на меньшие по размерности блоки, для которых можно использовать более эффективные (и более трудоемкие) оптимизационные процедуры [5], либо с целью увеличения быстродействия схем [7]. В работе [8] рассматривались простые случаи декомпозиции булевой функции по представлению ее в виде BDD: декомпозиция с фиксированной выходной функцией (двухместными дизъюнкцией, конъюнкцией, суммой по модулю 2) и простая декомпозиция, т.е. декомпозиция с одной промежуточной переменной. Использование BDD-представлений для систем полностью определенных функций позволило более эффективно решать задачу выбора разбиения переменных, по которому проводится декомпозиция [5].

В данной работе рассматривается задача декомпозиции системы неполностью определенных (частичных) функций, заданных диаграммой двоичного выбора. Основное отличие метода декомпозиции BDD, задающей систему частичных функций, от декомпозиции BDD, задающей систему полностью определенных функций, – это сравнение коэффициентов разложения Шеннона на совместимость (возможность доопределения их до одной функции), при этом коэффициенты задаются подграфами BDD. Уменьшение числа промежуточных переменных при декомпозиции позволяет уменьшить число уровней BDD, что положительно сказывается на увеличении быстродействия схем, синтезированных по декомпозированным (разрезанным) BDD.

## II. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ BDD

Булева функция  $f$ , значения 0, 1 которой определены на всех элементах  $x^* \in V^x$ , называется *полностью определенной*,  $V^x$  – булево пространство над переменными вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Если же на не-

которых элементах  $\mathbf{x}^*$  значения функции  $f$  не определены, то такая функция называется неполностью определенной, или *частичной*. Частичная булева функция  $f$  принимает единичное значение на элементах  $\mathbf{x}^*$  подмножества  $M_f^1$  булева пространства  $V^x$  и нулевое значение на элементах подмножества  $M_f^0$ . На всех остальных элементах пространства  $V^x$ , образующих подмножество  $M_f^-$  пространства  $V^x$ , значение частичной функции не определено. Неопределённое значение функции обозначается символом «-». Частичные  $f^1$  и  $f^2$  равны, если и только если  $M_{f^1}^1 = M_{f^2}^1$ ,  $M_{f^1}^0 = M_{f^2}^0$ ,  $M_{f^1}^- = M_{f^2}^-$ . Чаще всего задают частичную булеву функцию  $f(\mathbf{x})$  множествами  $M_f^1$ ,  $M_f^0$ . Каждое из множеств  $M_f^1$ ,  $M_f^0$  можно задать в виде ДНФ  $D_1$ ,  $D_0$ , обладающих свойством ортогональности:  $D_1 D_0 = 0$ . Частичная функция  $g$  реализуется частичной функцией  $h$  (обозначается  $g \prec h$ ), если  $M_g^1 \subseteq M_h^1$ ,  $M_g^0 \subseteq M_h^0$ . Для полностью определенных булевых функций отношение реализации является отношением равенства.

Разложением Шеннона булевой функции  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$  по переменной  $x_i$  называется представление  $f(\mathbf{x})$  в виде

$$f(\mathbf{x}) = \bar{x}_i f_0 \vee x_i f_1. \quad (1)$$

Если исходная функция  $f(\mathbf{x})$  является частичной, то и коэффициенты  $f_0$ ,  $f_1$  разложения являются частичными функциями. Каждый из коэффициентов  $f_0 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ,  $f_1 = f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  может быть разложен по одной из переменных из множества  $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$ . Процесс разложения коэффициентов заканчивается, когда все  $n$  переменных будут использованы для разложения. В процессе разложения либо на последнем шаге разложения коэффициенты вырождаются до констант 0, 1, «-». На каждом шаге разложения выполняется сравнение на равенство полученных коэффициентов и из множества равных коэффициентов оставляется один. Последовательность проведенных разложений Шеннона будем задавать графом BDD и использовать для этого форму, предложенную в [5].

### III. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 1

Частичной *векторной* булевой функцией  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  будем называть упорядоченную систему частичных булевых функций  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$ . Пусть задано разбиение  $Y/Z$  множества  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  переменных частичной векторной булевой функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  на два непересекающиеся подмножества

$Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ ,  $Z = \{z_1, \dots, z_{n-r}\}$ . Обозначим через  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$  вектор, полученный упорядочением переменных из подмножества  $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ , а через  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-r})$  – вектор, полученный упорядочением переменных из подмножества  $Z = \{z_1, \dots, z_{n-r}\}$ . Пусть диаграмма двоичного выбора векторной функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  построена так, что начальные  $r$  переменных последовательности разложения Шеннона являются переменными подмножества  $Y$ .

**Задача 1.** Для частичной векторной булевой функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ , представленной в виде BDD, и заданного разбиения  $Y/Z$  множества переменных  $X$  построить функциональное разложение (провести декомпозицию) вида

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \prec \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{y}), \mathbf{z}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = (h_1(\mathbf{y}), \dots, h_p(\mathbf{y}))$ . При этом требуется минимизировать число  $p$  компонент векторной функции  $\mathbf{h}(\mathbf{y})$  и представить ее в виде системы ДНФ, а векторную функцию  $\mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{y}), \mathbf{z})$  представить в виде BDD.

Декомпозицию векторной функции будем также называть совместной декомпозицией, имея в виду то обстоятельство, что все компонентные функции  $f^j$  декомпозируемой векторной булевой функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f^1(\mathbf{x}), \dots, f^m(\mathbf{x}))$  имеют общие (совместно используемые) промежуточные подфункции. Выбор разбиений  $Y/Z$  множества переменных  $X$  декомпозиции может быть осуществлен с помощью алгоритмов [5], модифицированных на случай частичных функций.

### IV. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

Решение задачи 1 декомпозиции частичной векторной функций, заданной  $m$ -корневой BDD, предлагается осуществлять в шесть этапов.

**Этап 1.** Построение кратчайшего разложения Шеннона векторной функции по кратчайшим разложениям Шеннона компонентных функций.

Построим разложение Шеннона

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_r \mathbf{f}_{y_0^*}(\mathbf{z}) \vee \bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots y_r \mathbf{f}_{y_0^*}(\mathbf{z}) \vee \dots \vee y_1 y_2 \dots y_r \mathbf{f}_{y_{2^r-1}^*}(\mathbf{z}) \quad (3)$$

векторной функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  по подмножеству аргументов  $Y$ . Коэффициент разложения  $\mathbf{f}_{y_i^*}(\mathbf{z})$  – это векторная функция, полученная в результате подстановки в функцию  $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  вместо переменных  $\underline{y}$  вектора  $\mathbf{y}_i^*$ ,  $i=1, \dots, 2^r-1$ , их значений. Сгруппировав в один класс (множество) дизъюнктивных членов разложения (3) с одинаковыми коэффициентами  $\mathbf{f}(\mathbf{z})$ , получим разложение вида

$$f(y, z) = D^1 f_1(z) \vee D^2 f_2(z) \vee \dots \vee D^k f_k(z), \quad (4)$$

называемое *кратчайшим* (по числу дизъюнктивных членов) разложением Шеннона векторной функции. Так как по BDD легко строятся [5] кратчайшие разложения Шеннона компонентных функций

$$f^j(y, z) = Q_1^j f_1^j(z) \vee Q_2^j f_2^j(z) \vee \dots \vee Q_{k^j}^j f_{k^j}^j(z), \quad (5)$$

где  $j=1, \dots, m$ , то возникает задача построения кратчайшего разложения Шеннона (4) векторной функции по кратчайшим разложениям (5). Данная задача сводится к задаче нахождения минимального дизъюнктивного базиса для системы ДНФ  $S$ . Систему  $S$  образуют ДНФ  $Q_i^j(y)$ , входящие в кратчайшие разложения Шеннона компонентных функций  $f^j(x)$ , т.е.

$S = \bigcup_{j=1}^m (\bigcup_{i=1}^{k^j} Q_i^j(y))$ . Минимальным дизъюнктивным базисом  $B$  системы ДНФ  $S$  называется минимальная по мощности система попарно ортогональных ДНФ  $B = \{ D^1(y), \dots, D^k(y) \}$  такая, что каждая ДНФ  $Q_i^j(y) \in S$  равна дизъюнкции некоторого подмножества ДНФ системы  $B$ . По сравнению с задачей нахождения  $B$  для произвольной системы ДНФ  $S$ , при задании функций в виде BDD нахождение  $B$  значительно упрощается за счет того, что ДНФ  $Q_i^j(y)$  для каждой из функций  $f^j$  являются попарно ортогональными. Например, для пары функций ( $j=2$ ) нахождение  $B$  сводится к  $k_1, k_2$  умножениям одной ДНФ на другую: первая ДНФ берется из множества  $\{ Q_1^1(y), \dots, Q_{k_1}^1(y) \}$ , вторая ДНФ – из множества  $\{ Q_1^2(y), \dots, Q_{k_2}^2(y) \}$ .

**Этап 2.** Определение минимального числа промежуточных функций  $h$  и их построение.

Выполнение этого этапа сводится к построению графа  $G_f$  отношения несовместимости ДНФ  $D$  из формулы (4), раскраске вершин графа  $G_f$  в минимальное число цветов и кодированию подмножеств одноцветных вершин графа  $G_f$  ортогональными булевыми либо троичными векторами.

Две ДНФ  $D^i, D^j \in B$  являются несовместимыми тогда и только тогда, когда их множителями в разложении (4) являются несовместимые векторные частичные функции  $f_i(z), f_j(z)$ . Две частичные векторные функции  $f_i(z), f_j(z)$  назовем *несовместимыми* тогда и только тогда, когда несовместимой является хотя бы одна пара соответствующих компонент данных векторных функций. В противном случае векторные функции назовем *совместимыми*. Частичные функции  $f_a^j(z), f_b^j(z)$  называются *несовместимыми* тогда и только тогда, когда найдется хотя бы один набор  $z^*$

значений аргументов, для которого обе функции  $f_a^j(z), f_b^j(z)$  определены и не равны. В противном случае эти функции называются *совместимыми*. Легко видеть, что несовместимые векторные функции не могут быть доопределены до одной и той же векторной функции, а совместимые – могут. Если функции  $f_i(z), f_j(z)$  являются несовместимыми, то в графе  $G_f$  между вершинами  $D^i, D^j$  имеется ребро, если же данные функции являются совместимыми, то вершины  $D^i, D^j$  являются несмежными (не соединяются ребром). Для проверки несовместимости пары частичных функций, заданных BDD, обобщены алгоритмы, предложенные в [3] и основанные на операции слияния BDD, подробно описанной в [9].

Минимальное число  $p$  промежуточных функций  $h_1(y), \dots, h_p(y)$  в разложении (3) векторной функции определяется по формуле  $p = \lceil k \rceil$ , где  $k = \log_2 \chi(G_f)$ ,  $\chi(G_f)$  – хроматическое число графа  $G_f$ , через  $\lceil k \rceil$  обозначено ближайшее сверху целое число, большее либо равное  $k$ . Промежуточная векторная функция  $h(y) = (h_1(y), \dots, h_p(y))$  в (2) строится кодированием одноцветных (одинаково раскрашенных) ДНФ  $D^1(y), \dots, D^k(y)$  попарно ортогональными булевыми либо троичными векторами.

**Этап 3.** Построение выходной векторной функции  $g$  в виде системы ДНФ. Построение ДНФ выходной векторной функции осуществляется заменой ДНФ  $D^i$  соответствующими кодами.

**Этап 4.** Построение многоуровневых представлений векторной функции  $g$  путем разложения Шеннона по промежуточным переменным  $h$ .

**Этап 5.** Минимизация в классе ДНФ системы частичных функций  $h(y) = (h_1(y), \dots, h_p(y))$ .

**Этап 6.** Минимизация сложности BDD, представляющих частичные функции  $g^j$ , и получение BDD полностью определенных функций, реализующих  $g^j$ .

## V. ПРИМЕР

Проиллюстрируем декомпозицию (2) векторной функции на примере BDD (рис. 1) по разбиению  $Y/Z$ ,  $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$ ,  $Z = \{x_4, x_5, x_6\}$  множества переменных  $X = Y \cup Z$ .

**Этап 1.** По BDD легко записываются кратчайшие разложения Шеннона компонентных функций

$$f^1 = Q_1^1 r^1(z) \vee Q_2^1 r^2(z) \vee Q_3^1 r^3(z) \vee Q_4^1 r^4(z) \vee Q_5^1 r^{10}(z); \quad (6)$$

$$f^2 = Q_1^2 r^5(z) \vee Q_2^2 r^2(z) \vee Q_3^2 r^6(z) \vee Q_4^2 r^7(z) \vee Q_5^2 r^8(z) \vee Q_6^2 r^9(z). \quad (7)$$

В систему  $S$  входят ДНФ из табл. 1. Решением задачи нахождения минимального дизъюнктивного базиса являются попарно ортогональные ДНФ  $B = \{ D^1(y), \dots, D^7(y) \}$ , представленные в табл. 2:  $Q_1^1 = D^1 \vee D^2$ ;  $Q_2^1 = D^5$ ;  $Q_3^1 = D^6$ ;  $Q_4^1 = D^7$ ;  $Q_5^1 = D^3 \vee D^4$ ;  $Q_1^2 = D^2$ ;  $Q_2^2 = D^4$ ;  $Q_3^2 = D^5$ ;  $Q_4^2 = D^6$ ;  $Q_5^2 = D^7$ ;  $Q_6^2 = D^1 \vee D^3$ .

Таблица 1

Множители коэффициентов разложения Шеннона

Функция $f^1$		Функция $f^2$	
$Q_i^1$	ДНФ	$Q_i^2$	ДНФ
$Q_1^1$	00-	$Q_1^2$	001
$Q_2^1$	100 110	$Q_2^2$	011
$Q_3^1$	101	$Q_3^2$	100 110
$Q_4^1$	111	$Q_4^2$	101
$Q_5^1$	01-	$Q_5^2$	111
		$Q_6^2$	000 010

Таблица 2

Промежуточные функции

$D^i$	СДНФ	ДНФ	Код $(h_1, h_2)$	
			Троичный вектор	Элементарная конъюнкция
$D^1$	000	000	--	
$D^2$	001	001	--	
$D^3$	010	010	0-	$\bar{h}_1$
$D^4$	011	011	0-	$\bar{h}_1$
$D^5$	100 110	1-0	10	$h_1 \bar{h}_2$
$D^6$	101	101	1-	$h_1$
$D^7$	111	111	11	$h_1 h_2$

Исходя из этого, формулы (6) и (7) переписутся в виде

$$f^1 = (D^1 \vee D^2) r^1 \vee D^5 r^2 \vee D^6 r^3 \vee D^7 r^4 \vee (D^3 \vee D^4) r^{10};$$

$$f^2 = D^2 r^5 \vee D^4 r^2 \vee D^5 r^6 \vee D^6 r^7 \vee D^7 r^8 \vee (D^1 \vee D^3) r^9.$$

Кратчайшее разложение Шеннона векторной функции  $f = (f^1, f^2)$  будет иметь вид:

$$f = D^1(r^1, r^9) \vee D^2(r^1, r^5) \vee D^3(r^{10}, r^9) \vee D^4(r^{10}, r^2) \vee D^5(r^2, r^6) \vee D^6(r^3, r^7) \vee D^7(r^4, r^8).$$

**Этап 2.** Построим граф  $G_f$  отношения несовместимости коэффициентов разложения Шеннона векторной функции  $f$  на вершинах минимального дизъюнктивного базиса  $D^1, \dots, D^7$ . Граф  $G_f$  может быть получен наложением (объединением) графов  $G^1, G^2$  (рис. 2) отношения несовместимости для функций  $f^1, f^2$ , соответственно. Хроматическое число графа  $G_f$  равно трем ( $\chi(G_f) = 3$ ), поэтому минимальное число промежуточных функций равно двум. Кодирование вершин графа  $G_f$  троичными векторами дано в табл. 2.

**Этап 3.** Построим ДНФ выходных функций:

$$f^1 = r^1 \vee h_1 \bar{h}_2 r^2 \vee h_1 r^3 \vee h_1 h_2 r^4 \vee (\bar{h}_1 \vee \bar{h}_1) \& 1 = r^1 \vee h_1 \bar{h}_2 r^2 \vee h_1 r^3 \vee h_1 h_2 r^4 \vee \bar{h}_1.$$

$$f^2 = r^5 \vee \bar{h}_1 r^2 \vee h_1 \bar{h}_2 r^6 \vee h_1 r^7 \vee h_1 h_2 r^8 \vee \bar{h}_1 r^9.$$

**Этап 4.** Проведем разложения функций  $f^1, f^2$  сначала по переменной  $h_1$ :

$$f_{h_1=0}^1 = \gamma^1 = 1; f_{h_1=1}^1 = \gamma^2 = r^1 \vee \bar{h}_2 r^2 \vee r^3 \vee h_2 r^4.$$

$$f_{h_1=0}^2 = \gamma^3 = r^5 \vee r^2 \vee r^9;$$

$$f_{h_1=1}^2 = \gamma^4 = r^5 \vee \bar{h}_2 r^6 \vee r^7 \vee h_2 r^8 \vee r^9,$$

а затем полученные коэффициенты разложим по переменной  $h_2$  и доопределим функцию-константу  $r^9 = \leftarrow$  до нуля, т.е. положим  $r^9 = 0$ . Получим следующие выражения:

$$f_{h_1=0, h_2=0}^1 = 1; f_{h_1=0, h_2=1}^1 = 1; f_{h_1=1, h_2=0}^1 = \gamma^5 = r^1 \vee r^2 \vee r^3;$$

$$f_{h_1=1, h_2=1}^1 = \gamma^6 = r^1 \vee r^3 \vee r^4; f_{h_1=0, h_2=0}^2 = \gamma^3 = r^5 \vee r^2;$$

$$f_{h_1=0, h_2=1}^2 = \gamma^3 = r^5 \vee r^2;$$

$$f_{h_1=1, h_2=0}^2 = \gamma^7 = r^5 \vee r^6 \vee r^7 \vee r^9 = r^5 \vee r^6 \vee r^7;$$

$$f_{h_1=1, h_2=1}^2 = \gamma^8 = r^5 \vee r^7 \vee r^8 \vee r^9 = r^5 \vee r^7 \vee r^8.$$

**Этап 5.** Минимизация в классе ДНФ частичных функций  $h_1, h_2$ , заданных в табл. 8, позволяет получить ДНФ  $h_1 = x_1 \vee \bar{x}_2$ ;  $h_2 = x_3$ .

**Этап 6.** Для минимизации сложности DBB, реализующей функции выходного блока, сначала построим BDD представления функций  $\gamma^3, \gamma^5, \gamma^6, \gamma^7, \gamma^8$ , а затем проведем доопределение BDD (см. далее задачу 2) и перейдем к полностью определенным функциям.

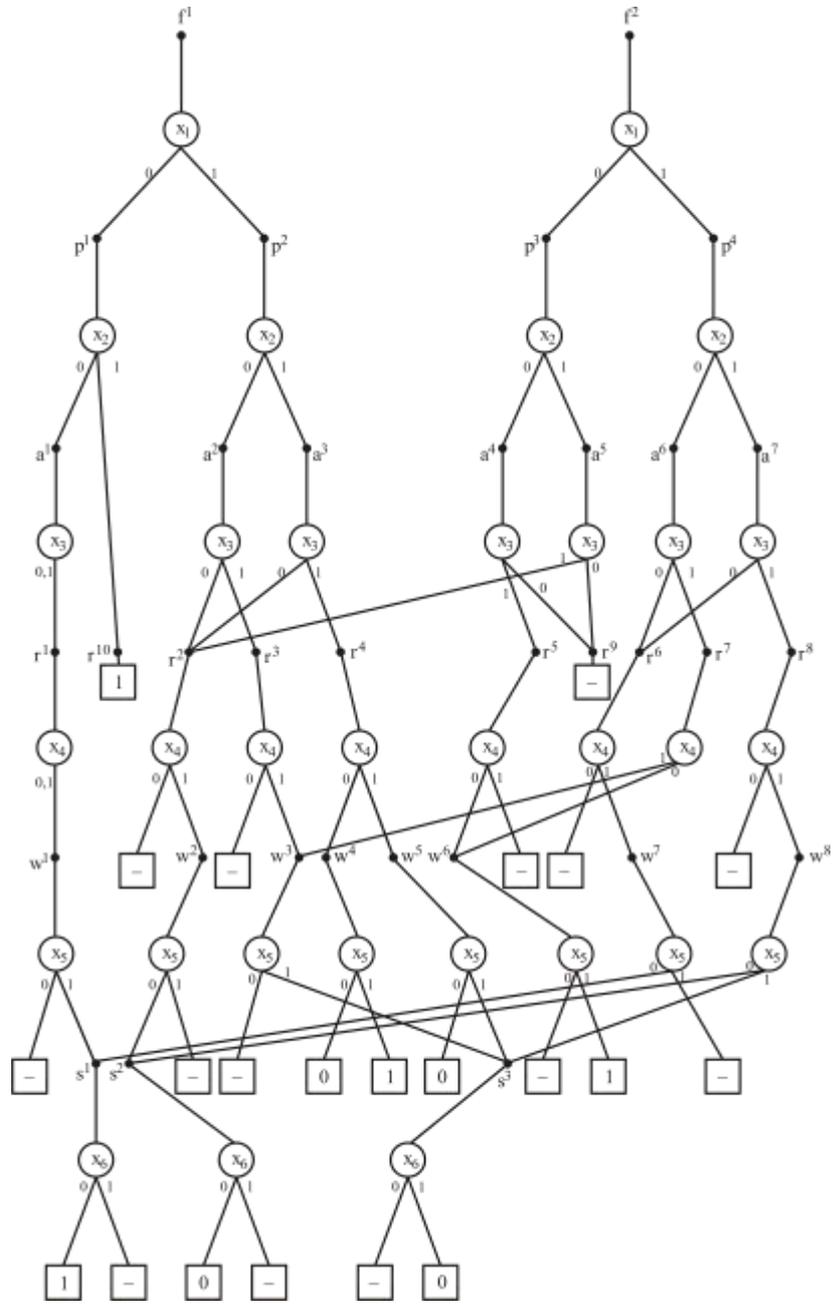


Рис. 1. Диаграмма двоичного выбора (BDD), представляющая систему частичных функций

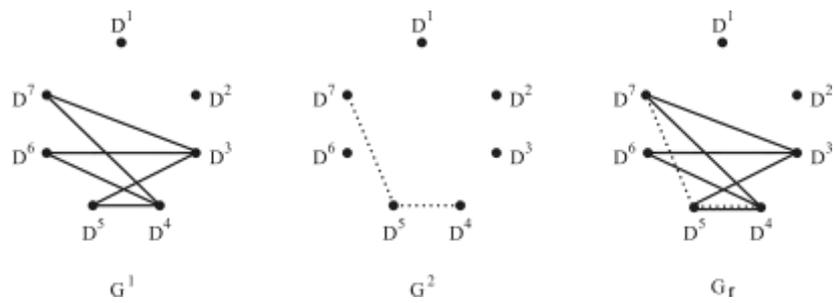


Рис. 2. Графы отношения несовместимости

Результирующее многоуровневое представление функций выходного блока после декомпозиции будет иметь вид:  $f^1 = \bar{h}_1 \vee h_1 \gamma^2$ ;  $f^2 = \bar{h}_1 \gamma^3 \vee h_1 \gamma^4$ ;  $\gamma^2 = \bar{h}_2 \gamma^5 \vee h_2 \gamma^6$ ;  $\gamma^3 = \bar{x}_4 w^1$ ;  $\gamma^4 = \bar{h}_2 \gamma^7 \vee h_2 \gamma^8$ ;  $\gamma^5 = \gamma^6 = \gamma^8 = \bar{x}_4 w^1 \vee x_4 w^2$ ;  $\gamma^7 = \bar{x}_4 w^1 \vee x_4 w^3$ ;  $w^1 = x_5$ ;  $w^2 = x_5 \bar{x}_6$ ;  $w^3 = \bar{x}_5$ . Число уровней BDD после декомпозиции векторной функции уменьшилось – вместо трех переменных  $x_1, x_2, x_3$  появились два уровня для промежуточных переменных  $h_1, h_2$ .

## VI. МИНИМИЗАЦИЯ ДИАГРАММ ДВОИЧНОГО ВЫБОРА

Под *сложностью* BDD будем понимать число ее функциональных вершин. Вершины-переменные и листовые вершины 0,1, «-» не будем учитывать ни при оценке сложности BDD, ни при сравнении различных BDD, реализующих одну и ту же систему булевых функций.

**Задача 2.** Задана  $m$ -корневая BDD, представляющая векторную функцию  $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$ . Требуется доопределить  $f(x)$  до такой полностью определенной векторной функции, чтобы представляющая ее BDD имела минимальную сложность.

Решение задачи 2 доопределения BDD также основано на использовании свойства несовместимости функций – коэффициентов разложения Шеннона. На первом этапе, начиная снизу, рассматриваются не равные константам коэффициенты на уровнях, кратных  $r$  ( $1 < r < n/2$ ), и для них решается задача нахождения минимального числа функций, реализующих все коэффициенты данного уровня. Эта задача сводится к составлению графа отношения несовместимости коэффициентов рассматриваемого уровня и раскраске вершин графа в минимальное число цветов. Затем производится объединение тех BDD, которые составляют множество совместимых функций, выполняется сокращение BDD, и рассматриваются коэффициенты на более высоких уровнях. На втором этапе, начиная с нижнего уровня BDD, все неопределенные значения «-» доопределяются до констант 0,1, преследуя цель уменьшения числа вершин BDD. Трудоемкость алгоритмов и качество получаемых решений зависит от выбора значения параметра  $r$ . Проверку несовместимости коэффициентов  $p, q$  можно выполнять, используя двухместную операцию «сумма по модулю 2»  $\oplus$  над подграфами BDD. Критерием несовместимости двух частичных функций  $p, q$  является наличие хотя бы одной единицы на листовой вершине BDD, являющейся результатом выполнения операции  $p \oplus q$ . Подробно проверка несовместимости функций описана в [10].

Результаты экспериментов показывают, что оптимизация на базе BDD позволяет уменьшить площадь логической схемы из библиотечных элементов в несколько раз по сравнению со схемной реализацией исходных матричных описаний частичных функций.

## VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование при оптимизации возможностей доопределения неполностью определенных функций позволяет значительно уменьшить сложность реализующих их BDD. Представление булевых функций и систем функций в виде BDD является эффективной формой их задания не только для проведения этапа технологического отображения многоуровневых представлений функций в заданный технологический базис, но и при декомпозиции. Декомпозиция BDD может служить средством предварительной оптимизации для увеличения быстродействия синтезируемой логической схемы из библиотечных элементов либо использоваться при синтезе логических схем FPGA на этапе технологического отображения. При такой декомпозиции нужно минимизировать число промежуточных переменных и сложность BDD. Декомпозиция позволяет сократить число уровней BDD для функций выходного блока, если число полученных промежуточных переменных меньше числа перекодируемых переменных. Однако увеличение быстродействия в общем случае может привести к некоторому увеличению сложности логической схемы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кузнецов О.П. О программной реализации логических функций и автоматов // Автоматика и телемеханика. 1977. № 7. С. 63-74. № 9. С. 138-149.
- [2] Akers S.B. Binary Decision Diagrams // IEEE Trans. on Computers. 1978. Vol. C-27. № 6. P. 509-516.
- [3] Bryant R.E. Graph-based algorithms for boolean functions manipulation // IEEE Trans. on Computers. 1986. Vol. C-35. № 8. P. 677-691.
- [4] Карпов Ю.Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 560 с.
- [5] Бибило П.Н., Леончик П.В. Декомпозиция систем булевых функций, заданных диаграммами двоичного выбора // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 86-101.
- [6] Scholl C. Functional Decomposition With Applications to FPGA Synthesis. Kluwer Academic Publishers, 2001. 288 p.
- [7] Cortadella J. Timing-driven logic bi-decomposition // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2003. Vol. 22. № 6. P. 675-685.
- [8] Yang S., Ciesielski M. BDS: a BDD-based logic optimization system. // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2002. Vol. 21. № 7. P. 866-876.
- [9] Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 4, А. Комбинаторные алгоритмы. Часть 1: Пер. с англ.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. 960 с.
- [10] Бибило П.Н. Минимизация диаграмм двоичного выбора для систем неполностью определенных булевых функций // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 6. С. 68-86.