

Теорема отсчетов в приложении к задаче интерполирования данных

Г.С. Ханян

ФГУП “Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова”,
khanian@mail.ru

Аннотация — Работа посвящена исследованию возможности использования теоремы отсчетов в качестве метода интерполирования финитных во времени дискретных сигналов с ограниченным частотным диапазоном, представляющих собой суперпозицию базисных функций преобразования Фурье. Проводится сравнение предлагаемого способа интерполирования с известным методом сплайнов.

Ключевые слова — теорема отсчетов, гармонический сигнал, метод интерполирования, полиномиальный сплайн, узловые точки, погрешность интерполяции.

I. ВВЕДЕНИЕ

Большое число типов экспериментальных данных, получаемых в результате тестирования устройств современной электроники и других технических объектов, представляют собой отсчеты сигналов от переменных во времени физических процессов, которые можно рассматривать как суперпозицию гармонических колебаний, доминирующих над фоновым шумом.

Интерполирование таких данных с целью восполнения недостающей информации является важной задачей цифровой обработки сигналов, и было бы естественно проводить его методами фурье-анализа — основного математического аппарата исследования периодических процессов.

Один из этих методов всесторонне изучен в теории, но практические аспекты его применения (алгоритмы интерполирования, скорость и погрешность вычислений и т.п.), по всей видимости, недостаточно освещены в специальной литературе, и, приходится констатировать, отсутствуют в более или менее известных учебных пособиях по вычислительной математике. Речь идет о теореме отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона, утверждающей о возможности и способе восстановления сигнала интерполированием его отсчетов посредством дискретного преобразования (свертки) с ядром тригонометрического вида.

В то же время широко применяемая техника интерполирования с помощью степенных функций (многочленов) всесторонне освещена в обширной литературе — классической и современной, специальной и учебной.

Целью настоящей работы является исследование теоремы отсчетов как метода интерполирования данных в сравнительном анализе с основанным на степенной функции методом сплайнов.

Ясно, что в рамках одной статьи осветить все вопросы сравнения двух альтернативных способов интерполирования (и вообще аналитического представления функции, включая разложение в ряд) — тригонометрического и степенного — невозможно, поэтому дело ограничивается решением всего лишь ключевых вопросов поставленной задачи, но вполне достаточных для обоснования эффективности практического использования теоремы для широкого класса сигналов.

II. ТЕОРЕМА ОТСЧЕТОВ КАК ИНСТРУМЕНТ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ДАННЫХ

Согласно теореме отсчетов в формулировке для сигнала $s(t)$ ограниченной длительности T , интерполирование его N -точечной цифровой реализации $s(t_n)$ проводится по формуле

$$s_N(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin \pi(G+1)F(t-t_n) - \sin \pi GF(t-t_n)}{N \sin \pi F(t-t_n)/N}, \quad (1)$$

где $F=N/T$ — частота дискретизации, G — индекс полосы частот, $t_n = t_0 + n/F$ — отсчеты времени t (от дискретной переменной n) с началом в произвольный момент t_0 .

В [1] доказано, что $s_N(t) = s(t)$, т.е. преобразование (1) тождественное, и интерполирование восстанавливает сигнал с абсолютной точностью, если сигнал представляет собой суперпозицию гармонических колебаний

$$s(t) = \sum_{m=P}^Q a_m \cos(2\pi f_m t + \varphi_m); \quad f_m = (m + \mu)/T \quad (2)$$

с амплитудами $a_m > 0$, начальными фазами $-\pi < \varphi_m \leq \pi$ и безразмерными частотами гармоник $f_m T$ — целыми или полуцелыми в зависимости от параметра μ , определяемого при двух ограничительных условиях, накладываемых на параметры преобразования G и N :

$$\mu = \left\{ \frac{GN + N + 1}{2} \right\}; \quad G \left\{ \frac{N}{2} \right\} = 0, \quad \{GN\} = 0. \quad (3)$$

Границы суммирования P и Q в (2) определяют частоты среза $(P+\mu)/T$ и $(Q+\mu)/T$ полосы с индексом G и задаются формулами

$$\begin{cases} P = [(GN - N + 1)/2] + [\{G\} + 1/2](1 - \{G\})N + [N/2] \\ Q = [(GN + N - 1)/2] + [\{G\} - 1/2]\{G\}N, \end{cases} \quad (4)$$

где квадратные скобки означают целую, фигурные – дробную часть заключенного в них выражения.

Ограничимся далее для простоты нулевым индексом G , четным числом узлов интерполяции N с началом $t_0 = 0$, и будем пользоваться безразмерным временем $n' = Ft$ и безразмерной частотой $m' = fT$. Тогда формула интерполирования (1) примет вид

$$s_N(t_{n'}) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin \pi(n' - n)}{N \sin \pi(n' - n)/N}; \quad 0 \leq n' < N, \quad (5)$$

а условию теоремы (тождественности преобразования), согласно (3)-(4), будет удовлетворять гармонический сигнал

$$s(t) \equiv s(t_{n'}) = a \cos(2\pi m' n' / N + \varphi) \quad (6)$$

с полуцелой частотой $m' = m + 1/2$; $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Будем считать известными отсчеты сигнала $s(t_n)$ в узлах интерполяции t_n . Первым шагом в любом алгоритме восстановления сигнала естественно считать вычисление по формуле (5) значений сигнала в промежуточных полуцелых отсчетах безразмерного времени $n' = n + 1/2$; $n = 0, 1, \dots, N-1$:

$$s_N(t_{n+1/2}) = \frac{(-1)^n}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k s(t_k)}{\sin \pi(n + 1/2 - k)/N}. \quad (7)$$

Повторяя эту процедуру, но в отношении уже удвоенного числа $2N$ перемежающихся узлов интерполяции функций $s(t)$ и $s_N(t)$, затем $4N$ узлов и т.д., мы можем восстанавливать сигнал сколь угодно подробно во времени.

III. ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ФОРМУЛА НЬЮТОНА

Интерполяционная формула Ньютона представляет собой рекуррентное соотношение

$$\begin{cases} s_N(t_{n'}) = s_{N-1}(t_{n'}) + \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^{N-n} s(t_n)}{n!(N-n)!} \prod_{k=0}^{N-1} (n' - k) \\ s_0(t_{n'}) = s(t_0); \quad 0 \leq n' \leq N; \quad N = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

восстанавливающее функцию $s(t)$ в точке $t_{n'}$ по заданным ее значениям в $N+1$ точках $t_n = t_0 + n/F$.

С одной стороны, формула (8) представляет собой аналог теоремы отсчетов, но верной, в отличие от тригонометрических функций типа (6), для полиномов не выше N -й степени. С другой стороны, при стремлении частоты дискретизации F к бесконечности (сближении отсчетов t_n к начальному отсчету t_0) формула (8)

трансформируется в разложение функции $s(t)$ в степенной ряд Тейлора в окрестности точки t_0 .

Интерполяционная формула Ньютона имеет модификации (интерполирование вперед, назад и т.п.) и не является единственной в семействе методов степенной (полиномиальной) интерполяции [2]. Хорошо известно также интерполирование функций полиномами Лагранжа и другими типами полиномов, проходящих через заданные узловые точки.

IV. МЕТОД ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ

Функция $s_{L,N}(t)$, непрерывная на интервале $t_0 \leq t \leq t_N$, называется полиномиальным сплайном порядка $L > 0$ с узлами t_n , если на каждом из подынтервалов $t_n \leq t \leq t_{n+1}$; $n=0, 1, \dots, N-1$ является алгебраическим полиномом степени L :

$$s_{L,N}(t) \Big|_{t_n \leq t \leq t_{n+1}} = s_{(L,n)}(t) = s(t_n) + \sum_{k=1}^L a_{L,n,k} \left(\frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} \right)^k. \quad (9)$$

Условие непрерывности сплайна $s_{L,N}(t)$ означает совпадение (склеивку) значений функций смежных фрагментов (9) в узловых точках:

$$s_{(L,n+1)}(t_n) = s_{(L,n)}(t_{n+1}), \quad (10)$$

и является необходимым при конструировании любого сплайна. Оно вполне достаточно (вместе с условием периодического продолжения сплайна $s_{L,N}(t)$ за крайнюю узловую точку t_N) для определения коэффициентов $a_{L,n,k}$. В различных модификациях сплайнов [3] требуется еще непрерывность первой, второй (возможно, вплоть до $L-1$ -й) производной функции $s_{L,N}(t)$ с целью обеспечения заданной гладкости сплайна, что приводит к накладыванию дополнительных, весьма сложных связей между коэффициентами различных фрагментов.

Ограничимся для простоты так называемыми локальными сплайнами с максимальным дефектом – подчиняющимся лишь условию (10), считая при этом узловые точки эквидистантными: $t_n = t_0 + (t_N - t_0)n/N$.

Сплайны высокого порядка редко применяют на практике из-за усложнения расчета коэффициентов и трудоемкости вычислений. Самые известные сплайны – полиномы не выше третьей степени. Для их конструирования весьма подходящей является интерполяционная формула Ньютона (8). Положив в этой формуле $N=L=0, 1, 2, 3$ и обозначив для краткости $s(t_n) = s_n$, получаем прототипы фрагментов (9):

$$\begin{aligned} s_{(0,0)}(t_{n'}) &= s_0, \quad s_{(1,0)}(t_{n'}) = s_0 - (s_0 - s_1)n', \\ s_{(2,0)}(t_{n'}) &= s_0 - (s_0 - s_1)n' + (s_0 - 2s_1 + s_2) \frac{n'(n'-1)}{2}, \\ s_{(3,0)}(t_{n'}) &= s_0 - (s_0 - s_1)n' + (s_0 - 2s_1 + s_2) \frac{n'(n'-1)}{2} - \\ &\quad - (s_0 - 3s_1 + 3s_2 - s_3) \frac{n'(n'-1)(n'-2)}{6}. \end{aligned} \quad (11)$$

Для того, чтобы получить из (11) формулы сплайнов указанных порядков, необходимо к этим соотношениям применить операцию “скольжения”, т.е. прибавить к индексам фрагментов и узлов целочисленную переменную n . Наконец, подставив в эти формулы $n'=1/2$, и приведя подобные члены в правых частях, приходим к формулам интерполирования функции $s(t)$ в серединных точках фрагментов:

$$s_{0,N}(t_{n+1/2}) = s_n, \quad (12)$$

$$s_{1,N}(t_{n+1/2}) = \frac{s_n + s_{n+1}}{2}, \quad (13)$$

$$s_{2,N}(t_{n+1/2}) = \frac{3s_n + 6s_{n+1} - s_{n+2}}{8}, \quad (14)$$

$$s_{3,N}(t_{n+1/2}) = \frac{5s_n + 15s_{n+1} - 5s_{n+2} + s_{n+3}}{16}. \quad (15)$$

Формулы (13), (14), (15) описывают сплайны первого, второго, третьего порядка соответственно (линейный, квадратичный, кубический).

Формула (12) не определяет сплайн, т.к. не удовлетворяет условию (10), однако функцию $s_{0,N}$ условно можно считать сплайном нулевого порядка – вырожденным случаем, представляющим интерес при сравнении его с другими способами интерполирования.

V. ОПИСАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для сравнения эффективности рассматриваемых методов интерполирования функций были проведены численные эксперименты по моделированию отсчетов гармонического сигнала

$$s(t_n) = a \cos(2\pi m'n/N + \varphi); \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (16)$$

и интерполированию его в серединных точках $t_{n+1/2}$.

Согласно теореме отсчетов при четном числе узлов N преобразование (7) тождественно для полуцелых частот $m' = m + 1/2$, при нечетном – для целых $m' = m$. Основной вопрос исследования состоял в компьютерной верификации этих утверждений теоремы и в оценке погрешности (ошибки) интерполяции гармонического сигнала, частота m' которого отличается от указанных. Кроме того, ставилась цель определить погрешности интерполяции сплайнами (12)–(15).

За погрешность принималась величина

$$\delta_s(f_{m'}) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (s_N(t_{n+1/2}) - s(t_{n+1/2}))^2}, \quad (17)$$

представляющая относительное (нормированное по амплитуде сигнала) среднеквадратичное отклонение вычисленных ординат $s_N(t_{n'})$ от известных $s(t_{n'})$.

При интерполировании сплайнами (12)–(15) в формуле (17) вместо $s_N(t_{n'})$ использовались результаты вычислений $s_{L,N}(t_{n'})$. Для того, чтобы не выйти за пределы области определения сплайнов, в этих формулах индекс n задавался по модулю N , для чего последовательность данных s_n считалась периодической с периодом N . В экспериментах амплитуда сигнала равнялась $a=100$, число его отсчетов N было четным и нечетным (ввиду отсутствия принципиальной разницы представлены результаты исследования только для четных N).

VI. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

На рис. 1 полужирной линией нарисована осциллограмма сигнала (16) с частотой $m'=8$, тонкими – графики отклонений $\Delta s(t_{n'}) = s_{L,N}(t_{n'}) - s(t_{n'})$, равных нулю в $N = 32$ узловых точках $n'=n$ и информативно значимых в серединных точках расчета $n'=n+1/2$. Буквы a, b, c, d указывают на сплайны первого, второго, третьего, нулевого порядков соответственно. На отклонения при интерполировании формулой (7) теоремы отсчетов (обозначенные точками) указывает буква e . Такая же буквенная нотация принята на рис. 2–5.

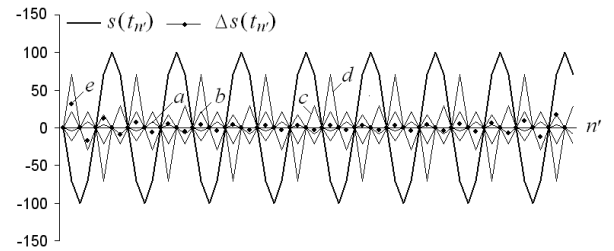


Рис. 1. Осциллограммы сигнала и отклонений от него результатов интерполирования

Наибольший размах отклонений наблюдается при кусочно-постоянной интерполяции (12), когда восстановленное значение (d) повторяет смежное с ним известное предыдущее значение функции. Наименьшие отклонения (e), будучи наибольшими как раз при целой частоте сигнала, достигаются при интерполировании формулой теоремы отсчетов (7). Отклонения же при методах сплайнов a, b, c занимают промежуточное положение между отклонениями, вычисленными методами d и e .

На рис. 2–4 представлены зависимости погрешности интерполяции (17) от частоты m' сигнала (16), которая проходила полосу от 0 до $N/2 - 1$ с шагом $1/10$. В результате частота попеременно принимала целые и полуцелые значения, на которых, как и ожидалось по теории, располагаются соответственно локальные максимумы и минимумы (нули) графика погрешности применения теоремы отсчетов.

Интересно, что графики погрешностей методов сплайнов a, b, c также осциллируют в такт изменения дробной части частоты μ , но “в фазе” с методом теоремы отсчетов e при $\varphi = \pi/2$ и “в противофазе” с ним при $\varphi = \pi/4$. В меньшей степени осциллирует погрешность интерполяции метода d .

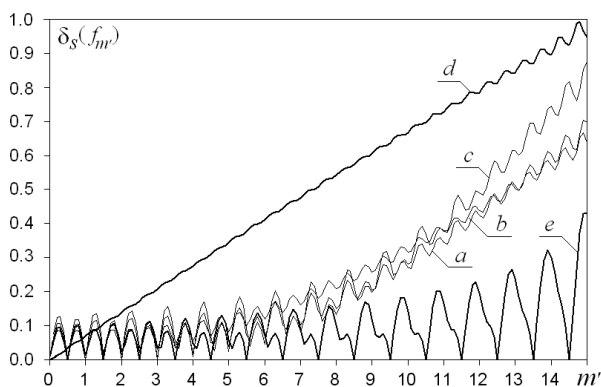


Рис. 2. Зависимости погрешности интерполяции от частоты сигнала с шагом 1/10 при числе узлов $N=32$ и фазе $\varphi = \pi/2$

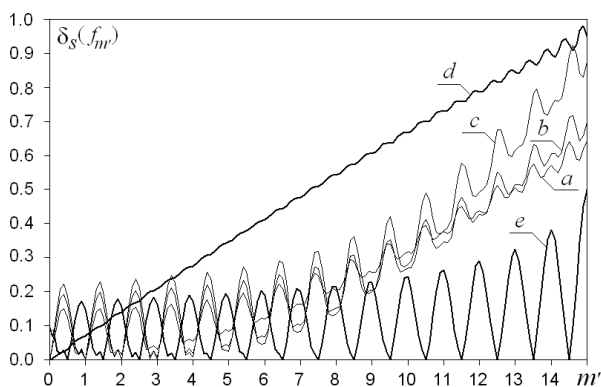


Рис. 3. Зависимости погрешности интерполяции от частоты сигнала с шагом 1/10 при числе узлов $N=32$ и фазе $\varphi = \pi/4$

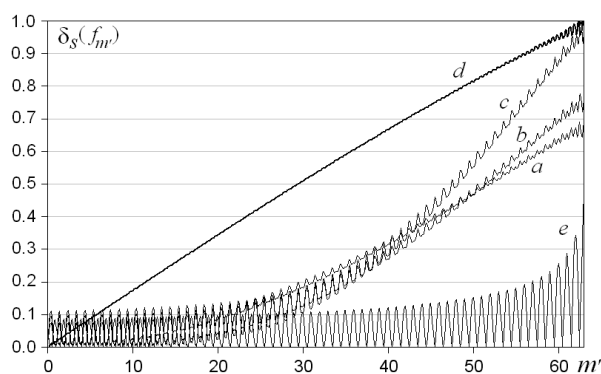


Рис. 4. Зависимости погрешности интерполяции от частоты сигнала с шагом 1/10 при числе узлов $N=128$ и фазе $\varphi = \pi/4$

Аналогичные зависимости представлены на рис. 5 с той лишь разницей, что частота сигнала проходила полосу от 0 до $N/2-1$ с шагом $2/N$ – так, чтобы полуцелое значение $N/4+1/2$ (на которой погрешность интерполяции по методу e равна 0) она принимала единственный раз в середине полосы (такой прием позволяет отвлекаться от колебательного характера кривых на рис. 2-4).

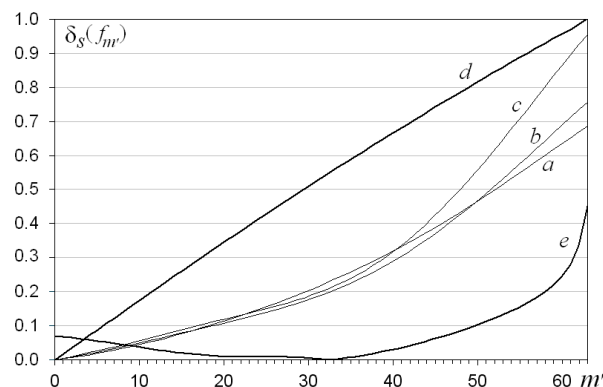


Рис. 5. Зависимости погрешности интерполяции от частоты сигнала с шагом 1/64 при числе узлов $N=128$ и фазе $\varphi = \pi/4$

Общим для методов является то, что погрешность интерполяции (линия ее тренда) монотонно растет с увеличением частоты сигнала независимо от N и φ .

Наилучшие результаты интерполирования достигаются применением метода, основанного на теореме отсчетов (огibaющая кривой e на рис. 2-4 и та же кривая на рис. 5 меняются от $\sim 0,1$ до $\sim 0,4$), наихудшие – интерполированием по методу d (максимальная погрешность достигает $\sim 1,0$). Может показаться парадоксальным, но качество сплайнов (13), (14), (15) ухудшается с увеличением их порядка.

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы возможности применения формулы теоремы отсчетов для сигнала конечной длительности в качестве вычислительного средства по интерполированию ограниченного числа данных измерений колебательных процессов.

Осуществлена компьютерная верификация доказанной в работе [1] версии теоремы отсчетов, что позволяет расценивать математические условия (3) формулировки теоремы не только как достаточные, но и как необходимые.

Проведен сравнительный анализ погрешностей основанного на теореме отсчетов метода интерполирования и методов полиномиальных сплайнов первых трех порядков и показано преимущество над ними предлагаемого в работе тригонометрического метода применительно к дискретным полигармоническим сигналам.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ханян Г.С. Теорема отсчетов для сигнала конечной длительности с необязательно нулевым индексом частотной полосы // Изв. ЮФУ. Технические науки. 2013. № 2 (139). С. 20 – 25.
- [2] Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.
- [3] Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 320 с.