УДК 519.7

Линейный синтез – новый подход к логическому проектированию k-значных цифровых структур

Н.Н. Прокопенко[2], Н.И. Чернов[1], В.Я. Югай[1]

[1]Южный федеральный университет, chernovni@yandex.ru

[2]Донской государственный технический университет, prokopenko@sssu.ru

***Аннотация* — Рассматривается неклассический подход к логическому синтезу *k*-значных цифровых структур, основанный на смене классического математического аппарата логического синтеза – булевой алгебры предлагаемым математическим аппаратом – линейной алгеброй. Анализируются последствия такой замены, математические и схемотехнические преимущества предлагаемого подхода.**

***Ключевые слова* — логический синтез, многозначная логика, линейная алгебра, линейный синтез цифровых структур, алгебраическое представление логических функций, функционально полные системы логических функций.**

I. Введение

Традиционная схемотехника близка к пределам своих возможностей в отношении улучшения технических и эксплуатационных параметров БИС. В то же время технологии, считающиеся перспективными (оптические, квантовые молекулярные и т.д.) еще далеки от практической реализации. Поэтому необходимы другие способы поддержания темпов развития технологии на основе имеющихся математических, схемотехнических и технологических возможностей. Среди них – многозначные логика, элементная база и цифровые системы.

Следует отметить, что исследования по многозначной логике и ее применению для синтеза многозначных цифровых структур ведутся весьма интенсивно. Подтверждением этому является большое количество публикаций, а также тот факт, что в США уже более 30 лет проводятся международные симпозиумы по многозначной логике. В этих исследованиях ведущей тенденцией является получение теоретических и прикладных результатов путем обобщения двузначных результатов на многозначный случай. Однако следует констатировать, что этот подход пока не дал значимых прикладных результатов. Почему?

Для ответа на этот вопрос необходим анализ, по крайней мере, трех составляющих процесса создания цифровых структур любой значности:

– методологической – оценка правомерности перехода к многозначному синтезу через обобщение двузначного подхода на многозначный случай и сложности такого перехода;

– математической – оценка возможностей алгебраического аппарата представления логических функций и предложения методов логического синтеза цифровых структур, а также связей его с используемой схемотехникой;

– схемотехнической – обоснование и выбор типового набора функциональных элементов (активные и пассивные элементы схемотехники), методов схемотехнического проектирования и технических характеристик схемных решений. Краткое рассмотрение этих проблем и предложение одного из возможных путей их преодоления и является целью настоящей работы.

II. Многозначная логика как обобщение двузначной

Для методологической оценки правомерности обобщения двузначного подхода на многозначный случай рассмотрим две стороны этого процесса:

– представление процесса перехода к логике более высокой значности;

– определение логических значений переменных и операций.

Многие известные k-значные функционально полные системы являются обобщениями соответствующих двузначных систем [1– 3]. Так, например, система Россера-Тьюкетта, включающая в себя операции:

$$x\&y = \min(x, y)$$

$$x \vee y = \max(x, y)$$

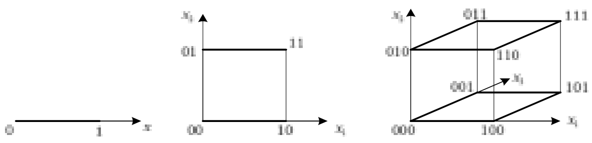
и набор характеристических функций:

$$J_a(x) = \begin{matrix} k-1 & \text{при } x=a \\ 0 & \text{при } x\neq a \end{matrix}$$

является многозначным вариантом основной функционально полной системы И, ИЛИ, НЕ. Точно также алгебра Поста является многозначным аналогом системы ИЛИ, НЕ, а алгебра Вебба – многозначным аналогом «стрелки Пирса».

В то же время переход к многозначной логике сопровождается появлением возможности использования новых операций и функций, не имеющих аналогов в двузначной логике. Так, например, двузначная инверсия в многозначном случае может быть интерпретирована циклическим сдвигом $\bar{x} = x \oplus 1$ либо отрицанием $\bar{x} = k - 1 - x$, двузначной конъюнкции можно сопоставить несколько многозначных конъюнкций и т.д. С учетом вырожденности указанных (и других) многозначных операций в двузначном случае становится понятным, что двузначная булева алгебра вряд ли может служить базовым математическим аппаратом для формирования своих многозначных аналогов.

Для оценки правомерности обобщения двузначной логики на многозначный случай весьма наглядной является геометрическая интерпретация представления значений логических функций. Уже в двузначном случае (рис. 1) геометрическое представление дает следующую картину:



а б в

Рис. 1. Пространства значений двузначной (булевой) логики размерностей 1 (а), 2 (б) и 3 (в)

т.е. значения одноместной булевой логики – две точки на прямой – 0 и 1; двуместной – четыре точки на плоскости – 00, 01, 10, 11, трехместной – восемь точек в объеме 000 … 111 и т.д. При разложении пространства данной размерности на подпространства меньшей размерности происходит «слияние» логических значений. Так, проекция объема на любую координатную плоскость дает плоскость, четыре из восьми точек при этом пропадают («сливаются»). Точно также, проекция плоскости «в торец» – линия, две из четырех точек плоскости снова пропадают. Проекция линии «в торец» – точка, одна из двух точек опять пропадает. Таким образом, логическое разложение на подпространства (подмножества значений) сопровождается потерей информации о разлагаемом пространстве!

В трехзначном случае геометрическое представление имеет вид, показанный на рисунке 2. В данном случае проекция объема приводит к слиянию еще большего, чем в двузначном случае, количества точек. С ростом значности проблема, очевидно, усугубляется. Отсюда следует, что логика большей значности обязательно обладает свойствами, не имеющими аналогов в логике меньшей значности и трудно обнаруживаемых через свойства последней.

В отношении обозначения логических значений отметим следующее. Значения двузначных логических переменных – качественные: «истина» или «ложь». Однако уже они обозначены «символами» 1 и 0, соответственно. Затем определяются логические операции как операции фактически над цифрами 1 и 0. В конце концов, семантическая составляющая этих цифровых обозначений исходных логических значений просто подразумевается, а обработка значений сигналов производится как обработка цифр.

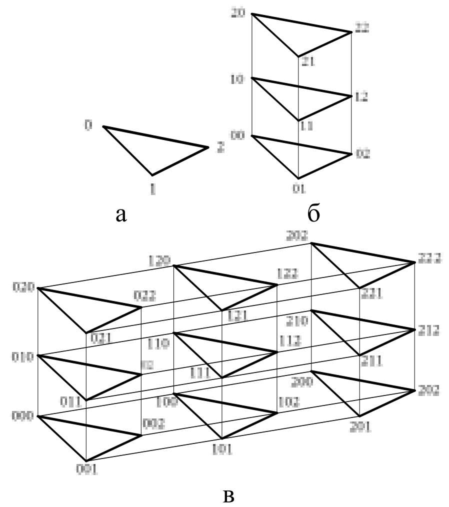


Рис. 2. Пространства значений трехзначной логики размерностей 1 (а), 2 (б) и 3 (в)

Переход к многозначности требует введения промежуточных качественных значений, не имеющих точных метрологических определений. Проблема разрешается так же, как и в двузначном случае – оцифровкой этих качественных значений. Ян Лукасевич (1920 г.) ввел логику с тремя состояниями: «истина», «ложь» и «неопределенность» с обозначениями 1, 0 и ½, соответственно, т.е. поместил «неопределенность» между «истиной» и «ложью». Лотфи Заде (1973 г.) предложил нечеткую логику, в которой нечёткие переменные (понятия) и операции над ними выразил в числовой форме как операции на континууме $\left\{\overline{0,1}\right\}$ (операции фактически выполняются не над лингвистическими переменными, а над их функциями принадлежности). Подобные примеры можно легко продолжить.

Относительно математического аппарата можно отметить следующее. Анализ результатов ранних исследований приводит к выводу о том, что предлагавшиеся функционально полные системы были основаны, главным образом, на использовании двухместных операторов $max(x_1, x_2)$, $min(x_1, x_2)$ и одноместных операторов различных типов, в том числе:

– отрицания Лукасевича $\bar{x} = k - 1 - x$;

– литерала $^{a}x_i^{b} = \begin{cases} k-1 \text{ при } a \le x < b; \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

– циклического отрицания (отрицание Поста) $\bar{x} = x \oplus 1$.

Для двузначного случая последние операторы превращаются в оператор НЕ основной функционально полной системы.

Проблемы оптимизации представления многозначных логических функций в этих алгебрах (исходное представление, минимизация, факторизация и т.д.) по форме эквивалентны соответствующим двузначным проблемам, а по содержанию – значительно сложнее. С учетом отсутствия реализующих эти операции элементов указанные задачи на данном этапе развития многозначного логического синтеза в описываемой постановке представляют чисто теоретический интерес.

Наконец, по поводу схемотехнической реализации можно отметить следующее. Схемотехническая реализация двузначных логических функций основана на использовании двузначных функциональных элементов (реле, диоды, транзисторы), число состояний которых согласовано со значностью логики. Традиционный переход к многозначной схемотехнике через обобщение двузначного подхода с необходимостью требует наличия k-значных функциональных элементов. В связи с отсутствием природных элементов подобного типа предпринимались многочисленные попытки создания искусственных многозначных элементов (см., например, работы научного совета по проблеме «Кибернетика» под руководством акад. Глушкова В.М. и особенно отделения «Многозначные машины и системы» под руководством проф. Ракова М.А). Эти попытки пока не привели к успеху. Поэтому схемотехническая реализация многозначных цифровых структур, равно как и оценка оптимальности сочетания математической и схемотехнической составляющих на основе традиционного обобщения двузначной логики на многозначный случай, пока остаются проблематичными.

На основе проведенного анализа можно сделать следующие выводы:

– методология синтеза с ростом значности усложняется (минимизация, характеристические функции, пространственное и комплексное представления и т.п.);

– функциональная элементная база – двузначная, естественных функциональных многозначных элементов нет, приходится создавать искусственные из двузначных, семантический разрыв между описанием логических функций и их аппаратной реализацией с ростом значности увеличивается.

Таким образом, сама идея разработки многозначной элементной базы на основе обобщения двузначной булевой логики на многозначный случай малопродуктивна. Тем не менее, полученный на пути реализации этого подхода опыт важен для разработки альтернативных подходов к проектированию и реализации многозначной элементной базы. Один из возможных вариантов подобного альтернативного подхода и предлагается в настоящей работе.

III. Линейный подход

Базовые положения этого подхода, сформированные на основе предыдущего анализа, состоят в следующем.

1. Для обеспечения независимости процесса логического синтеза и реализации многозначной элементной базы от значности (разумеется, в допустимых пределах!) в математическом аппарате представления логических функций должны быть использованы операции, по возможности не зависящие от значности. Как показывает анализ, для арифметических реализаций аналогов логических схем логический синтез и схемотехническая разработка подобных схем вполне возможны. Например, для реализации операции $min(x_1.x_2)$ известно [4] следующее ее представление

$$\min(x_1, x_2) = \frac{|x_1+x_2|-|x_1-x_2|}{2} \qquad (1)$$

вполне пригодное для линейной реализации и не зависящие от значности. Другим возможным представлением этой операции является представление ее в виде:

$$\min(x_2, x_2) = x_1 \div (x_1 \div x_2)$$

либо

$$\min(x_2, x_2) = x_2 \div (x_2 \div x_1).$$

2. Значения логических переменных и функций должны интерпретироваться как количественные, тогда значения большей значности можно интерпретировать суммой соответствующего количества единиц, а для логических операций использовать их арифметические аналоги (&– *min*, v – *max*, ⊕ – | | и т.д.).

3. Двузначной функциональной элементной базы для реализации значений, бóльших 1, при использовании арифметических операций вполне достаточно, причем эти реализации хорошо согласуются с их математическим представлением в виде суммы двухзначных значений.

4. Для представления многозначных значений переменных и функций двузначными сигналами представление их должно быть линейным. В этом случае каждое значение представляется линейной (векторной) суммой всех элементов базиса, от которых зависит формирование этого значения, при этом «слияние» значений становится невозможным.

Комбинированный учет перечисленных базовых положений приводит к использованию линейной алгебры в качестве математической основы логического синтеза и схемотехнической реализации многозначной элементной базы [5] – [7]. В ней для формирования базиса используется некоторая операция (либо ограниченный набор операций) над логическими переменными, а представление логической функции реализуется в виде разложения вектора ее значений по данному базису, т.е. результата выполнения арифметических операций над значениями базисных векторов.

В качестве примера на рис. 3 приведены базисная и обратная ей матрицы трехзначного базиса двух переменных, реализованного на основе операции усеченной разности. Умножение вектор-строки значений логической функции $min(x_1, x_2)$ на столбцы обратной базисной матрицы приводит к получению коэффициентов разложения ее по данному базису в виде выражения (1).

На рис. 4 приведен пример реализации логического элемента $min(x_1, x_2)$, значность которого определяется не его схемотехникой, а значностью входных сигналов.

$$A=\begin{bmatrix}1\\x_1\\x_2\\1\div x_1\\1\div x_2\\1\div(x_1\div x_2)\\1\div(x_2\div x_1)\\x_2\div x_1\\(1\div x_1)\div(1\div x_2)\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}1&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&2&2&2\\0&1&2&0&1&2&0&1&2\\\hdashline 1&1&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&0&1&1&0&0&1\\\hdashline 1&0&0&1&1&0&1&1&1\\0&1&2&0&0&1&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0\end{array}\right],$$

а

$$A^{-1}=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}0&0&0&0&0&0&0&0&-1\\1&0&0&0&0&0&-1&-1&1\\-1&0&0&0&0&0&1&1&0\\\hdashline 1&-1&1&-1&1&-1&0&-1&1\\0&0&-1&-1&-1&1&1&1&0\\1&0&0&0&0&0&-1&0&-1\\\hdashline -1&1&-1&0&0&1&0&1&0\\1&0&0&1&-1&-1&0&0&-1\\-1&0&1&0&1&0&0&-1&1\end{array}\right].$$

б

Рис. 3. Базисная (а) и обратная (б) матрицы

Его основными функциональными элементами являются токовые зеркала, работающие в активном режиме. При этом, с одной стороны, обеспечивается выполнение арифметических операций над токовыми сигналами, а с другой – высокое быстродействие за счет работы всех элементов в активном режиме.

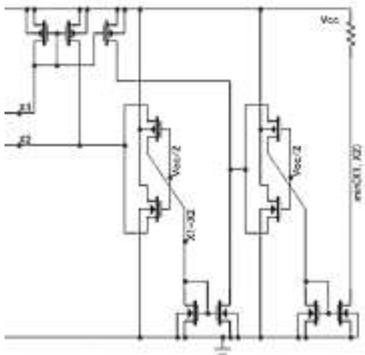
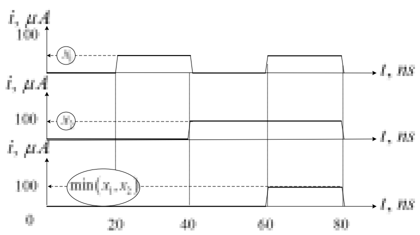


Рис. 4. Принципиальная схема логического элемента min(x1, x2)

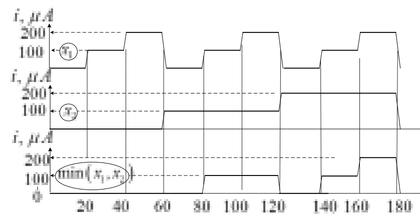
Временная диаграмма его работы при подаче на его вход двузначных и трехзначных сигналов, приведенная на рис. 5, подтверждает его работоспособность для обоих сигналов. Отсюда следует, что схемотехническая составляющая задачи синтеза многозначных цифровых структур при линейном подходе переходит в задачу обеспечения параметров многозначного сигнала, подаваемого на линейную схему, а также обеспечения линейности самой схемы. При надлежащем выборе формы представления логических значений арифметические операции могут выполняться «монтажно», что снижает общие аппаратные затраты на схемотехническую реализацию логических функций.

IV. Заключение

Таким образом, рассмотренный подход к проектированию и схемотехнической реализации является



а



б

Рис. 5. Временные диаграммы работы логического элемента min(x1, x2) в двузначной (а) и трехзначной (б) логиках

эффективным и позволяет создавать вполне работоспособные цифровые многозначные структуры.

На разработанные схемотехнические решения получено 10 патентов. Пятнадцать заявок на патенты находятся в стадии экспертизы.

Работа выполнена по проекту 1.1.14 в рамках государственного задания Минобрнауки России №2014/38.

Литература

[1] Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М.: 1966.

[2] Многозначные логики и их применения: Логики в системах искусственного интеллекта. Под ред. Финна В.К. М.: УРСС, 2008. Т. 2. 240 с.

[3] Карпенко А.С. Многозначные логики. Логика и компьютер. М.: Наука, 1997. Вып. 4. 223 с.

[4] Гинзбург С.А. Логический метод синтеза функциональных преобразователей // Труды 1-го конгресса ИФАК. Технические средства автоматики. Изд-во АН СССР, 1961.

[5] Чернов Н.И., Югай В.Я. Неклассический синтез цифровых структур средствами аналоговой схемотехники // Материалы IX Международного научно-практического семинара «Проблемы современной аналоговой микросхемотехники». (Шахты, 1–3 ноября 2012). Шахты ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС». 2012.

[6] Линейный логический синтез двузначных цифровых структур в линейных пространствах / Н.Н. Прокопенко, Н.И. Чернов, В.Я. Югай // Конгресс «IS&IT'13». «Интеллектуальные системы'13», «Интеллектуальные САПР-2013»: труды конференций. М.: Физматлит, 2013. Т. 1. С. 278-283.

[7] Basic Concept of Linear Synthesis of Multi-Valued Digital Structures in Linear Spaces / N.I. Chernov, V.Ya. Yugai, N.N. Prokopenko, N.V. Butyrlagin // Proceedings of IEEE East-Wesr Design & Test Simposium (EWDTS'2013). Rostov-on-Don, Russia. September 27-30, 2013. Kharkov National University of Radioelectronics. P. 146-149.