

Разработка аппаратного модулярного фильтра с конечной импульсной характеристикой на базе теоретико-числового быстрого преобразования Фурье

Д.В. Тельпухов, Р.А. Соловьев, В.М. Амербаев, Е.С. Балака

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, Nofrost@inbox.ru

Аннотация — В статье рассмотрен подход к построению аппаратных фильтров с конечной импульсной характеристикой, включающий переход в частотную область, а также принципы модулярных вычислений и теоретико-числовых преобразований. На базе данного подхода был реализован параметризованный генератор функциональных RTL описаний, а также синтезированы схемы для различных порядков и разрядностей входных данных. Полученные временные и аппаратные оценки позволяют судить об эффективности метода по сравнению со стандартной канонической реализацией КИХ фильтра.

Ключевые слова — фильтр с конечной импульсной характеристикой, модулярная арифметика, теоретико-числовое преобразование, быстрое преобразование Фурье.

I. ВВЕДЕНИЕ

Фильтрация с конечной импульсной характеристикой (КИХ) является базовой процедурой в таких областях цифровой обработки сигналов, как обработка речевых сигналов, обработка радиолокационных сигналов, фильтрация разного рода помех в широком спектре человеческой деятельности.

Для увеличения производительности программных фильтров зачастую переходят в частотную область и используют быстрые процедуры для преобразования Фурье [1]. Базисом для этого метода выступает так называемая теорема о свертке, благодаря которой удается сократить количество операций для фильтров высокого порядка. Тем не менее программная реализация КИХ фильтров в сигнальных процессорах или процессорах общего назначения является сугубо последовательной, что во многих случаях не может обеспечить высокую производительность. Зачастую, требования к пропускной способности в реальных устройствах удается удовлетворить только при реализации аппаратных фильтров с постоянными коэффициентами. Жертвуя гибкостью при выборе коэффициентов, а также аппаратными затратами, удается обеспечить требуемый уровень производительности, используя конвейерные архитектуры при реализации КИХ фильтров. Проблема построения аппаратных КИХ фильтров с

фиксированными коэффициентами активно обсуждалась в зарубежных публикациях в последние годы [2], [3].

Процесс дальнейшего наращивания быстродействия КИХ фильтров связан с использованием математического аппарата модулярной арифметики, который уже неоднократно доказывал свою эффективность в области цифровой обработки сигналов, в частности при проектировании цифровых фильтров [4].

Помимо модулярных принципов, в данной статье предлагается объединить в одном аппаратном КИХ фильтре идеи проведения вычислений в частотной области с идеями параллельной обработки данных. Кроме того, будет предложена модулярная реализация КИХ фильтра при помощи теоретико-числового преобразования Фурье, обеспечивающая повышение характеристик быстродействия и точности вычислений.

II. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

A. Традиционные реализации КИХ фильтров

Фильтр с конечной импульсной характеристикой, по своей сути, является не чем иным, как линейной сверткой входной последовательности некоторых цифровых отсчетов с последовательностью коэффициентов фильтра. Задача выбора тех или иных коэффициентов фильтра эффективно решается современными программными средствами и в нашей работе не рассматривается. Абстрагируясь от значений коэффициентов обратимся непосредственно к вычислению линейной свертки. Формула для ее вычисления выглядит следующим образом:

$$s(n) = a * b = \sum_{m=0}^n a(m) \cdot b(n-m), n = 0..N+M-2, \quad \text{где}$$

$a(n)$, $n = 0..N-1$, и $b(n)$, $n = 0..M-1$ - дискретные сигналы; $s(n)$ - линейная свертка этих сигналов. Для вычисления линейной свертки сигналы $a(n)$ и $b(n)$ сдвигают относительно друг друга, почленно перемножают и складывают. При этом предполагается,

что $a(n)=0$ при $n < 0$ и $n > N$, и $b(n)=0$ при $n < 0$ и $n > N$.

Архитектуры для вычисления линейных сверток могут быть различными. Выделяют несколько типов архитектур: последовательную, параллельную и последовательно-параллельную.

Последовательная схема характеризуется малым числом вычислительных блоков, интенсивным обменом с памятью и низкой производительностью. В крайнем проявлении эта схема представляет собой умножитель с накоплением и управляющее устройство, которое обеспечивает загрузку нужных коэффициентов из памяти. В этом случае для нахождения одного выходного отсчета требуется N тактов. Этот метод реализуется программно на сигнальных процессорах или компьютерах общего назначения.

В случае, если производительности DSP процессора не хватает, фильтр реализуют аппаратно, используя параллельные архитектуры. Параллельные схемы эксплуатируют метод конвейеризации, разделяя этапы конвейера регистрами. Каноническая форма КИХ фильтра изображена на рис. 1.

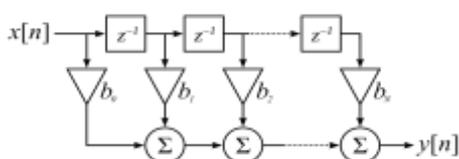


Рис. 1. Каноническая форма КИХ фильтра

Преимущества данной архитектуры - это ее быстродействие и возможность работы в реальном времени. К недостаткам можно отнести значительное увеличение аппаратных затрат.

В. Реализация КИХ фильтров в частотной области

Кроме реализаций во временной области, возможна также реализация в частотной области. Базисом для этого является так называемая теорема о свертке, суть которой состоит в следующем: спектр циклической свертки есть произведение спектров сворачиваемых сигналов: $S(k) = A(k) * B(k)$, где $A(k)$ и $B(k)$ - спектры сворачиваемых сигналов, $S(k)$ - спектр циклической свертки двух сигналов (рис. 2).

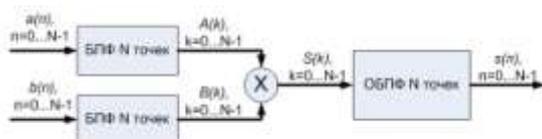


Рис. 2. Структурная схема вычисления циклической свертки в частотной области

Таким образом, вместо того, чтобы реализовывать свертку непосредственно по формуле, можно

перевести сигналы в частотную область с помощью БПФ, произвести почленное перемножение, а затем перевести обратно. В этом случае результат будет соответствовать циклической свертке [5]. Кроме того, если дополнить последовательности нулями, вычисление циклической свертки станет эквивалентно вычислению искомой линейной свертки. Преимуществом этого метода является сокращение операций, поскольку используя быстрые схемы преобразования Фурье, мы тратим лишь $n * \lg(n)$ операций, что дает выигрыш при больших значениях n .

С. Модулярная реализация КИХ фильтров

Для дальнейшего повышения характеристик быстродействия, надежности, точности или мощности зачастую используют математический аппарат модулярной арифметики. Используя китайскую теорему об остатках, появляется возможность разделить структуру фильтра на некоторое количество параллельных и независимых модульных каналов, каждый из которых является КИХ фильтром в конечном поле (поле Галуа). Такое распараллеливание приводит к уменьшению разрядностей операндов, что положительно сказывается на быстродействии устройства и потребляемой мощности. Кроме того, добавляя некоторую избыточность, модулярная арифметика позволяет повышать надежные характеристики разрабатываемых устройств.

Структура модулярных вычислителей определяется набором оснований (модулей) $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$, которые являются попарно взаимно простыми. Динамический диапазон модулярной системы характеризуется интервалом $[0, M)$, где $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_N$. Китайская теорема об остатках гарантирует однозначность представления целых чисел из динамического диапазона в виде остатков по основаниям модулярной системы, а также определяет способ нахождения числа по его вычетам в модулярной системе. Таким образом, число в модулярной системе представляется следующим образом:

$$X \sim (|X|_{m_1}, |X|_{m_2}, \dots, |X|_{m_N}),$$

где $|X|_{m_i}$ - остаток от деления X на основание m_i .

Арифметические операции выполняются покомпонентно. Таким образом, вычисления производятся параллельно и независимо по каждому модульному каналу, что в конечном итоге приводит к ускорению в процессе вычислений.

III. РАЗРАБОТКА МОДУЛЯРНОГО КИХ ФИЛЬТРА НА БАЗЕ ТЕОРЕМЫ О СВЕРТКЕ В КОНЕЧНОМ ПОЛЕ

Наибольший интерес представляет использование модулярной арифметики при параллельной реализации в частотной области. Существует несколько предпосылок для этого вывода, основная из которых заключается в том, что для конечных полей существует аналог теоремы о свертке. Точнее говоря,

для конечных полей существует преобразование, аналогичное преобразованию Фурье, для которого выполняется теорема о свертке в конечном поле, и для которого соблюдаются все симметрические свойства, позволяющие использовать любой быстрый алгоритм для его вычисления. Формула упомянутого преобразования выглядит следующим образом:

$$A_k = \left| \sum_{n=0}^{2^t-1} a_n * \gamma^{nk} \right|_p,$$

где A_k - теоретико-числовой спектр сигнала, a_n - сам сигнал, p - характеристика конечного поля, γ - примитивный корень степени γ [6]. Если число p имеет вид $q \cdot 2^t + 1$, то примитивный корень степени 2^t - всегда существует и равен $\gamma = \omega^q$.

Для простого модуля m существует, по меньшей мере, один примитивный корень $\omega \leq p-1$, такой, что набор $\left| \omega^i \right|_m : i = 0, 1, 2, \dots, m-2$ формирует все ненулевые вычеты по модулю m .

Таким образом, упомянутое преобразование является аналогом дискретного преобразования Фурье тригонометрического базиса, в котором поворачивающие множители $e^{ij \frac{2\pi}{N}}$ заменяются на γ^{ij} , а операции умножения и сложения комплексных чисел – на соответствующие операции в $GF(p)$.

Кроме очевидных преимуществ в виде распараллеливания вычислений мы достигаем большей точности, так как вычисления ведутся в конечных полях с целыми поворачивающими множителями, что исключает ошибки представления, характерные для стандартного тригонометрического метода. [5]

Разработанное устройство модулярного КИХ фильтра на базе теоретико-числового быстрого преобразования Фурье представлено на рис. 3.

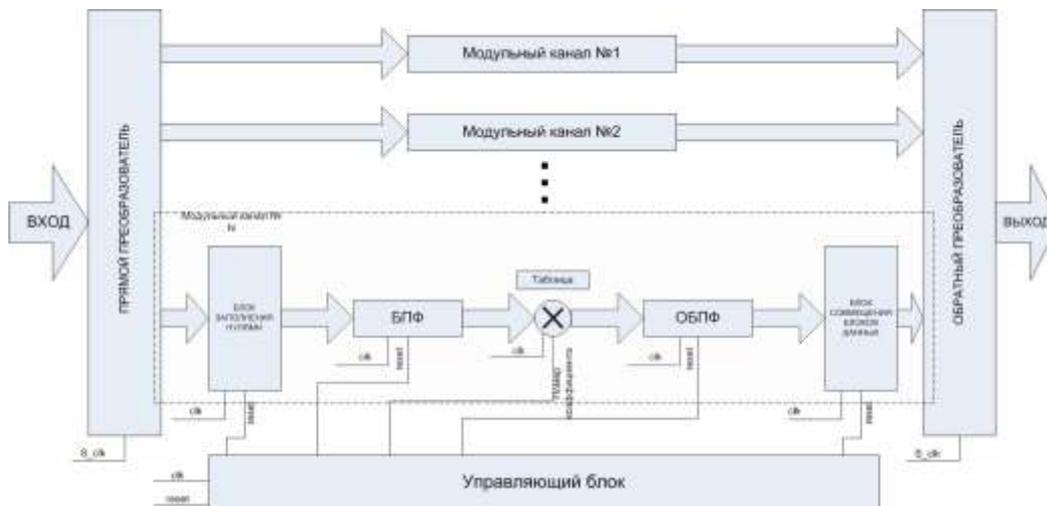


Рис. 3. Структурная схема модулярного КИХ фильтра в частотной области

Базовая структура фильтра состоит из прямого и обратного преобразователя, а также однотипных модульных каналов, различающихся только характеристикой конечного поля, в котором ведутся все арифметические вычисления. Все модули должны иметь одинаковый бинарный ранг, т.е. все они должны быть вида $p_i = q_i \cdot 2^t + 1$. Этот факт гарантирует наличие в каждом конечном поле γ_i - примитивного корня степени 2^t , что позволяет формировать модулярный БПФ длины 2^t . Этот параметр ложится в основу всего КИХ фильтра и определяет длину блоков бесконечной последовательности входных данных, которые будут обрабатываться в модульных каналах, а затем “склеиваться” в блоке совмещения блоков

данных. Кроме того, этот параметр влияет на порядок фильтра, и в случае $p_i = q_i \cdot 2^t + 1$ число коэффициентов фильтра должно быть равно 2^{t-1} .

Модульный канал состоит из блока заполнения нулями, прямого БПФ, блока умножения на коэффициенты фильтра, обратного БПФ и модуля совмещения блоков данных. Логика работы КИХ фильтра в частотной области подразумевает дополнение входных блоков данных соответствующим количеством нулей для корректной склейки результатов в модуле совмещения обработанных блоков данных. Учитывая конвейерность исполнения устройства, этот факт вынуждает в два раза снизить тактовую частоту входных данных. Другими словами,

необходимо, чтобы внутренняя частота КИХ фильтра F_{clk} в два раза превышала частоту дискретизации F_s . Для этого в схему введен блок делителя частоты.

Все внутренние блоки, включая БПФ - максимально конвейеризированы для достижения наименьшей тактовой частоты. Синхронизацией составных частей и устройства в целом занимается управляющий блок. Также он отвечает за подачу адреса ячейки с коэффициентом фильтра в память, связанную с умножителем.

IV. РЕЗУЛЬТАТЫ СИНТЕЗА

Результатом разработки выступает IP ядро, реализующее RTL описание схемы на языке Verilog HDL. Параметрами IP ядра служат коэффициенты фильтра и разрядность входных данных. Для оценки эффективности предлагаемого подхода был проведен эксперимент по синтезу модулярных КИХ фильтров средствами САПР Synopsys в библиотеке Nangate Open Cell Library 45 nm. Порядок фильтров выбирался в диапазоне от 4 до 32 точек. Разрядности лежат в диапазоне 4 – 16 бит. Оценивалась задержка на критическом пути и площадь схемы. Также для тех же наборов параметров был спроектирован КИХ фильтр в канонической форме.

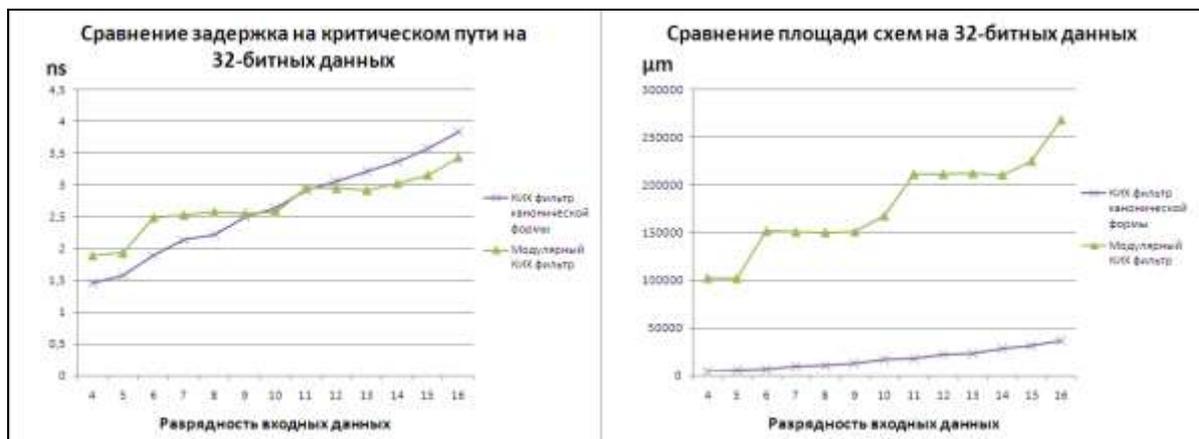


Рис. 4. Сравнение модулярных и двоичных схем при фиксированном значении порядка фильтра

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты синтеза показывают, что предложенная схема по тактовой частоте обгоняет традиционный вариант при больших разрядностях входных данных и больших порядках фильтра, однако существенно превышает традиционные схемы по занимаемой площади. Несмотря на кажущуюся неудовлетворительность достигнутых результатов модулярные фильтры обладают некоторыми преимуществами, которые не нашли отражения в представленных графиках. Во-первых, фильтрованный сигнал на выходе модулярного устройства на базе БПФ в конечном поле значительно точнее, чем сигнал на выходе традиционного двоичного фильтра. Это связано с тем, что в БПФ в конечном поле в качестве поворачивающих коэффициентов используются элементы этого конечного поля, то есть целые числа. Тем самым мы исключаем ошибки представления коэффициентов. Другим преимуществом предлагаемого подхода является тот факт, что добавляя дополнительные модульные каналы мы получаем возможность контролировать и даже исправлять ошибки, которые возникают в процессе вычисления. Дальнейшие разработки будут

направлены на реализацию последовательных модулярных фильтров на базе БПФ в конечном поле.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Oppenheim A.V., Schaffer R.W. Discrete-Time Signal Processing. Prentice-Hall, 1989.
- [2] Patronik P., Berezowski K., Piestrak S., Biernat J., Shrivastava A. Fast and energy-efficient constant-coefficient FIR filters using residue number system // 17th IEEE/ACM International Symposium on Low Power Electronics and Design (ISLPED'11). 2011.
- [3] Shrivastava A., Berezowski K.S., Piestrak S.J. Chokshi R. Exploiting residue number system for power-efficient digital signal processing in embedded processors // IEEE/ACM International Conference on Compilers, Architecture, and Synthesis for embedded Systems (CASES). France, 2009.
- [4] M.A. Soderstrand et al. Residue Number System Arithmetic: Modern Applications in Digital Signal Processing // IEEE Press. 1986.
- [5] Viljan Amerbaev, Dmitry Telpukhov, Roman Solovyev, Alexander Stempkovskiy Efficient Calculation of Cyclic Convolution by Means of Fast Fourier Transform in a Finite Field // Proc. of 11th EAST-WEST DESIGN & TEST SYMPOSIUM. 2013.
- [6] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1981.