

Формулировка критериев устойчивости цифровых фильтров третьего порядка с бесконечной импульсной характеристикой в пространстве коэффициентов знаменателя передаточной функции

В.А. Лесников, Т.В. Наумович, А.В. Частиков

Вятский государственный университет, lesnikov.vladislav.ru@ieee.org

Аннотация — Известен критерий устойчивости рекурсивных цифровых фильтров в z -плоскости – полюсы должны находиться внутри единичного круга, исключая единичную окружность. Для фильтров второго порядка этот критерий эквивалентен критерию, сформулированному в пространстве коэффициентов фильтра, основанному на существовании «треугольника устойчивости». В данном докладе этот критерий распространяется на цифровые фильтры более высоких порядков – вводится понятие «тело устойчивости».

Ключевые слова — цифровой фильтр, рекурсивный, бесконечная импульсная характеристика, полюсы, устойчивость.

I. ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет авторы развивают новый подход к синтезу рекурсивных цифровых фильтров (РЦФ) с учетом конечной длины слова [1] – [9]. При этом подходе еще до структурного синтеза (на этапе функционального синтеза) завершается определение положения нулей и полюсов РЦФ на z -плоскости. В работах [10] – [13] авторы установили, что при конечной длине слова коэффициенты РЦФ с любой структурой нулей и полюсов РЦФ являются элементами множества алгебраических чисел, а все возможные положения нулей и полюсов дискретизируют z -плоскость. Структура дискретизированной z -плоскости определяется степенью алгебраических чисел. Авторы детально исследовали эту структуру для алгебраических чисел второй степени (РЦФ представляет собой последовательное соединение звеньев второго порядка с произвольной структурой). Однако для алгебраических чисел более высокой степени получить подобные результаты не удалось. Эта трудность преодолевается авторами путем перехода из z -плоскости в пространство коэффициентов передаточной функции РЦФ, но при этом усложняется контроль за устойчивостью РЦФ. В данной работе проверка устойчивости осуществляется без перехода из пространства коэффициентов в z -плоскость.

II. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С БЕСКОНЕЧНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Известно, что полюсы устойчивых рекурсивных ЦФ любого порядка расположены внутри единичного круга на z -плоскости, исключая единичную окружность (рис. 1).



Рис. 1. Область устойчивости РЦФ в z -плоскости

III. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Передаточную функцию РЦФ n -го порядка запишем в виде

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}{z^n - \sum_{i=1}^n b_i z^{n-i}} = \frac{P_n}{Q_n}. \quad (1)$$

Условия устойчивости в пространстве коэффициентов для $n = 2$, очевидно, имеют вид

$$\begin{cases} b_2 > -1, \\ b_2 < b_1 + 1, \\ b_2 < -b_1 + 1. \end{cases} \quad (2)$$

Таким образом, область устойчивости имеет известный вид так называемого «треугольника устойчивости» (рис. 2) [14].

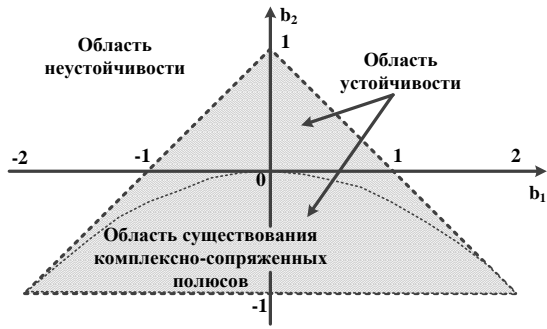


Рис. 2. «Треугольник устойчивости» в пространстве коэффициентов (b_1, b_2)

IV. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

На рис. 2 показана также область существования комплексно-сопряженных полюсов, описываемая неравенством

$$b_2 < -0.25b_1^2. \quad (3)$$

Построим для рекурсивного ЦФ третьего порядка аналогичное тело устойчивости в трехмерном пространстве. Для этого представим комплексно-сопряженные полюсы z_2 и z_3 в комплексной экспоненциальной форме. При этом выражение для полинома знаменателя передаточной функции Q_3 приобретает вид

$$Q_3 = (z - z_1)(z - re^{j\varphi})(z - re^{-j\varphi}) = z^3 - (2r \cos \varphi + z_1)z^2 + (r^2 + 2z_1 r \cos \varphi)z - z_1 r^2, \quad (4)$$

где r и φ соответственно модуль и аргумент полюса z_2 . Тогда можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} b_1 = 2r \cos \varphi + z_1, \\ b_2 = -r^2 - 2z_1 r \cos \varphi, \\ b_3 = z_1 r^2. \end{cases} \quad (5)$$

Сначала введем ограничения на величину вещественного полюса z_1 . Для этого сначала добавим к системе (5) уравнение

$$z_1 = 1 \quad (6)$$

и решим получившуюся систему уравнений относительно z_1 , φ , b_2 и r :

$$\begin{cases} b_2 = -b_1 + 1 - b_3, \\ \varphi = 0.5(1 \mp 1)\pi \pm \arccos \frac{(b_1 - 1)}{2\sqrt{b_3}}, \\ r = \pm\sqrt{b_3}. \end{cases} \quad (7)$$

Затем к системе (5) вместо уравнения (6) добавим уравнение

$$z_1 = -1 \quad (8)$$

и решим получившуюся систему уравнений относительно z_1 , φ , b_2 и r :

$$\begin{cases} b_2 = b_1 + 1 + b_3, \\ \varphi = 0.5(1 \pm 1)\pi \mp \arccos \frac{(b_1 + 1)\sqrt{-b_3}}{2b_3}, \\ r = \pm\sqrt{-b_3}. \end{cases} \quad (9)$$

Для введения ограничения на комплексно-сопряженные полюсы к системе (5) вместо уравнений (6) и (8) добавим уравнение

$$r = 1 \quad (10)$$

и решим полученную систему уравнений относительно z_1 , φ , b_2 и r :

$$\begin{cases} b_2 = -b_3 b_1 + b_3^2 - 1, \\ \varphi = \arccos \left(\frac{b_1 - b_3}{2} \right), \\ z_1 = b_3. \end{cases} \quad (11)$$

Выражения для b_2 в системах уравнений (7), (9) и (11) определяют границы тела устойчивости рекурсивного ЦФ третьего порядка:

$$\begin{cases} b_2 \leq -b_1 + 1 - b_3, \\ b_2 \leq b_1 + 1 + b_3, \\ b_2 \geq -b_3 b_1 + b_3^2 - 1. \end{cases} \quad (12)$$

На рис. 3 изображено тело устойчивости ЦФ третьего порядка. Для наглядности оно показано под разными углами зрения.

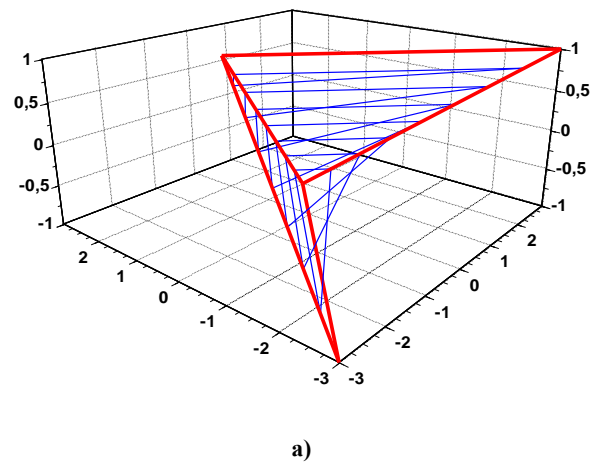


Рис. 3. Тело устойчивости ЦФ третьего порядка

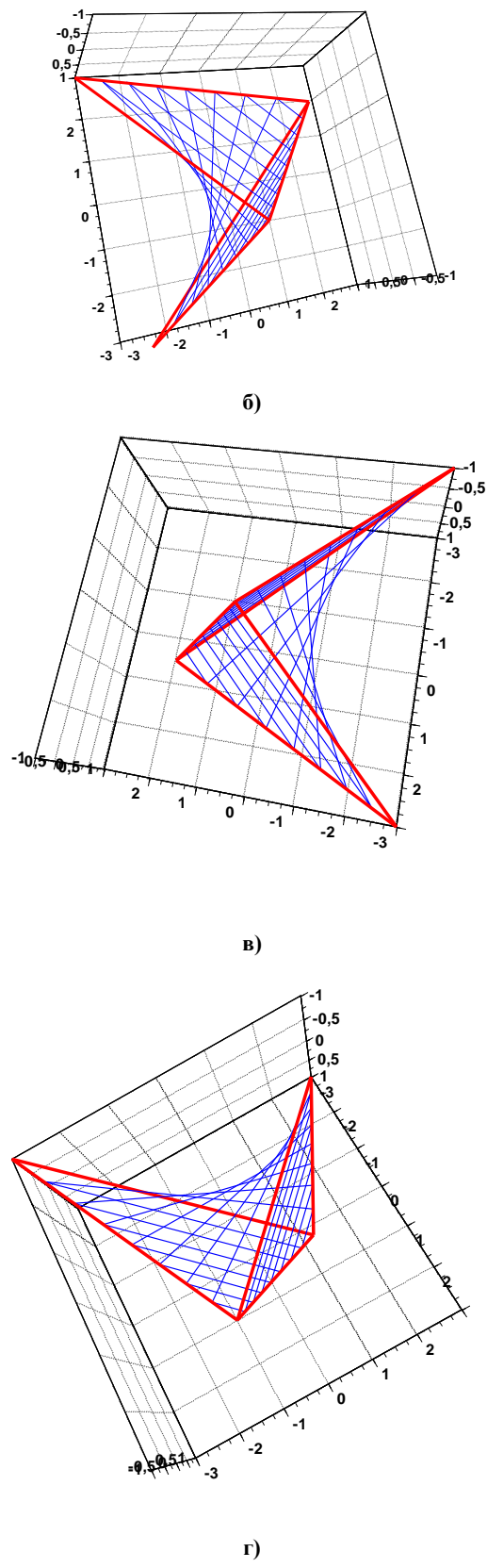


Рис. 3. Тело устойчивости ЦФ третьего порядка (окончание)

Более удобно рассматривать не тело устойчивости в трехмерном пространстве, а его сечения. На рис. 4 представлены сечения тела устойчивости плоскостями, параллельными координатным плоскостям $b_1 0 b_2$ (рис. 4а), $b_1 0 b_3$ (рис. 4б) и $b_2 0 b_3$ (рис. 4в).

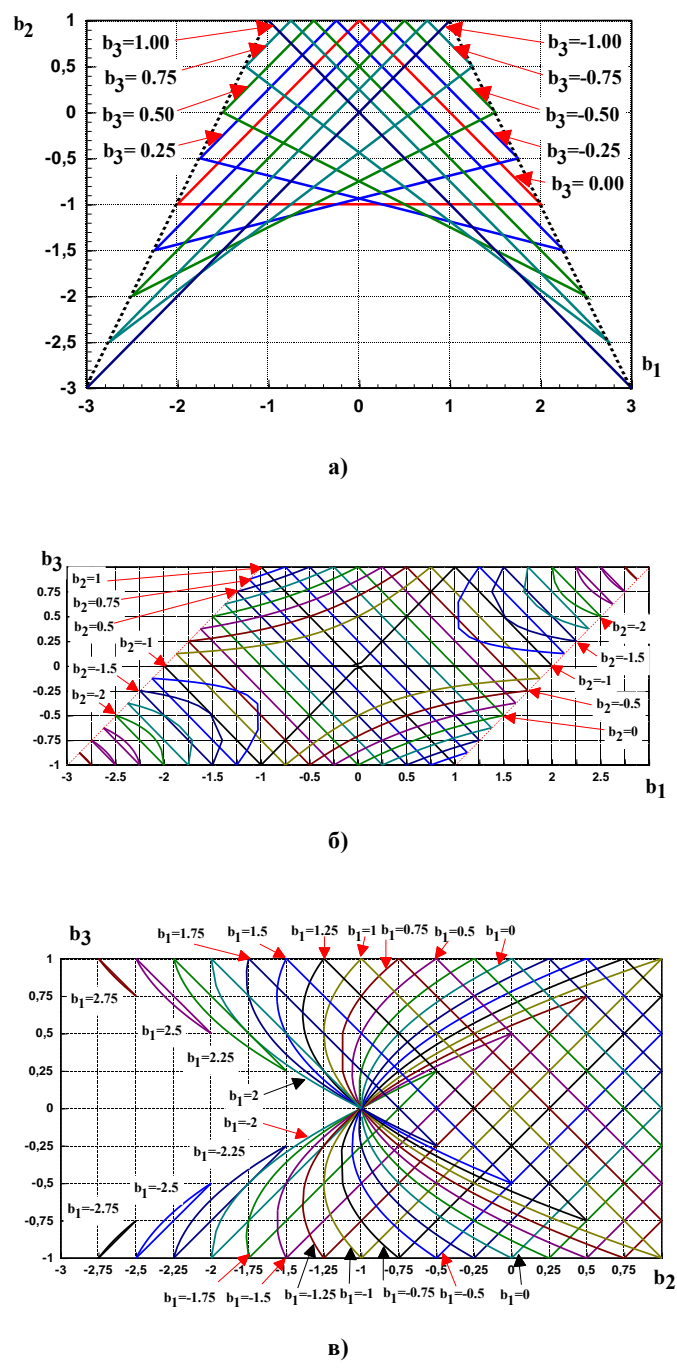


Рис. 4. Сечения тела устойчивости ЦФ третьего порядка плоскостями, параллельными координатным плоскостям

V. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ ПОЛЮСОВ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Границы областей существования комплексных корней полинома Q_3 определяются уравнением

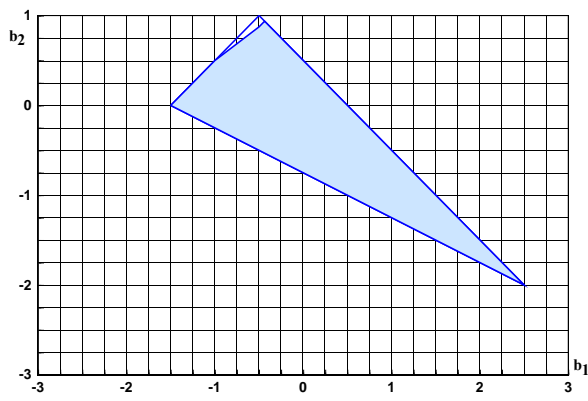
$$\text{discr}(Q_3) = 0, \quad (13)$$

где $\text{discr}(Q_3)$ - дискриминант полинома Q_3 .

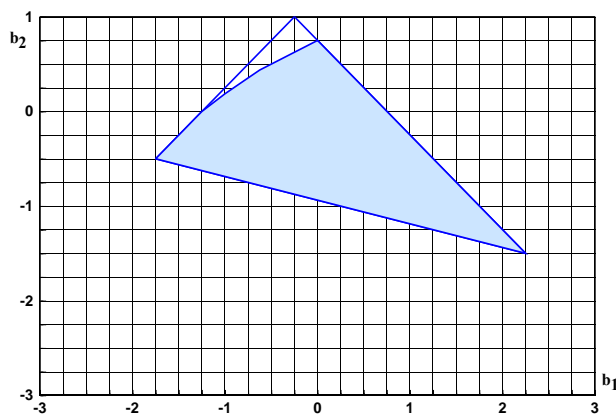
На рис. 5–7 показаны области существования комплексных корней на сечениях тела устойчивости плоскостями, параллельными координатным плоскостям $b_1 0 b_2$, $b_1 0 b_3$ и $b_2 0 b_3$, соответственно. На рис. 5 и рис. 6 заливкой отмечены области существования комплексных корней, а на рис. 7 – области, в которых все корни вещественные.



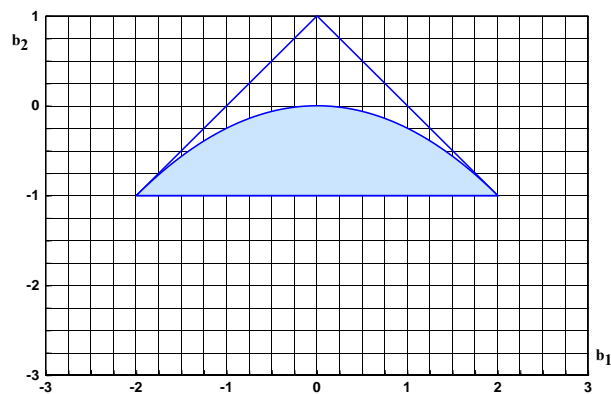
а) $b_3 = 0.75$



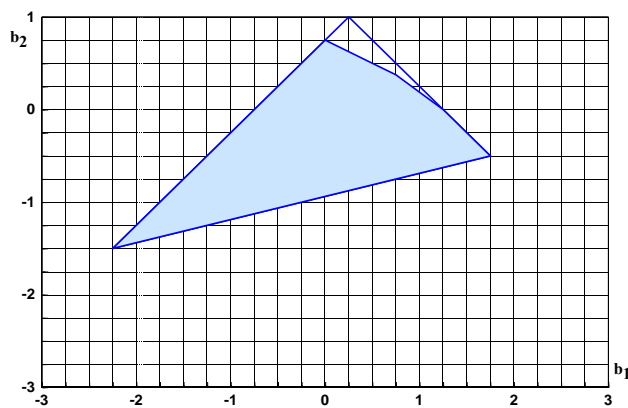
б) $b_3 = 0.50$



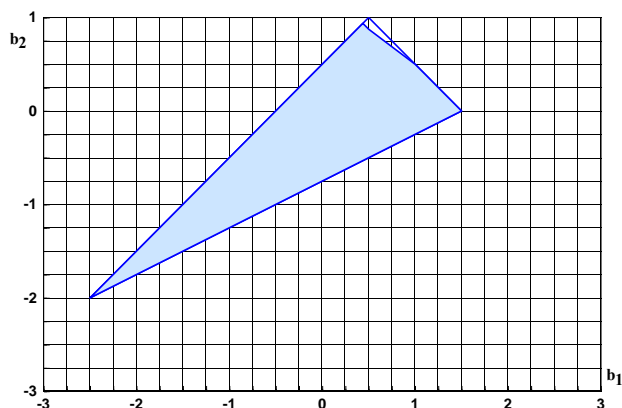
в) $b_3 = 0.25$



г) $b_3 = 0$

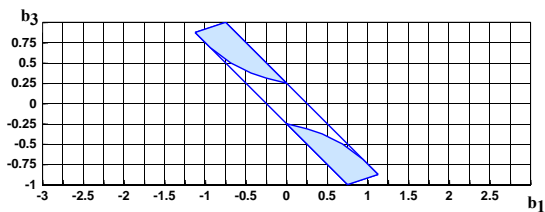


д) $b_3 = -0.25$

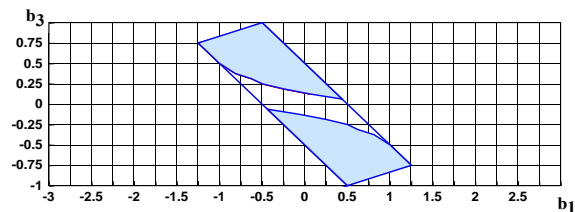


е) $b_3 = -0.5$

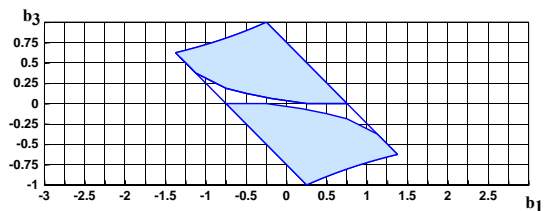
Рис. 5. Области существования комплексно-сопряженных полюсов на сечениях плоскостями, параллельными координатной плоскости $b_1 0 b_2$ (отмечены заливкой)



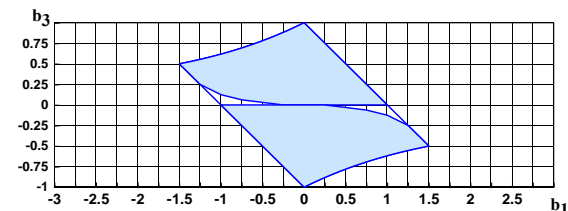
а) $b_2 = 0.75$



б) $b_2 = 0.50$

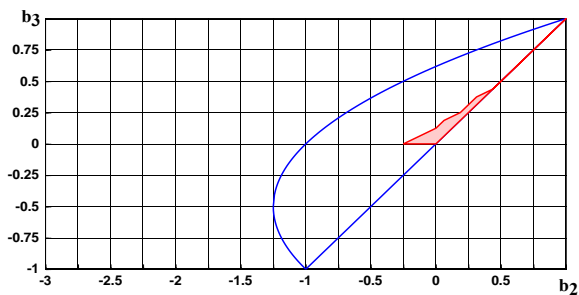


в) $b_2 = 0.25$

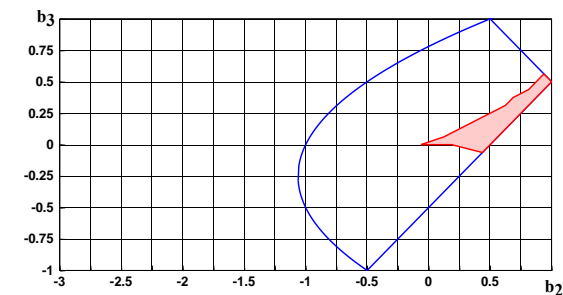


г) $b_2 = 0$

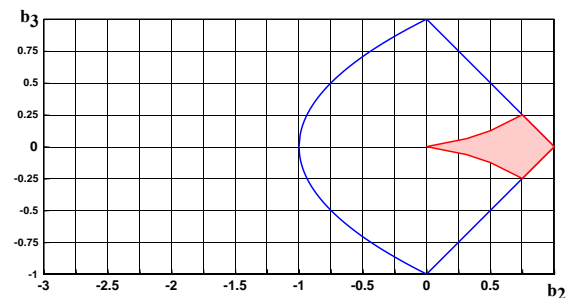
Рис. 6. Области существования комплексно-сопряженных полюсов на сечениях плоскостями, параллельными координатной плоскости b_1Ob_3 (отмечены заливкой)



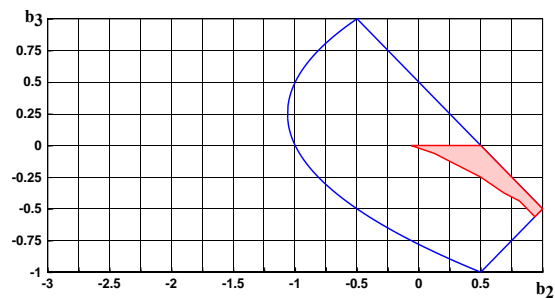
а) $b_1 = -1.00$



б) $b_1 = -0.50$



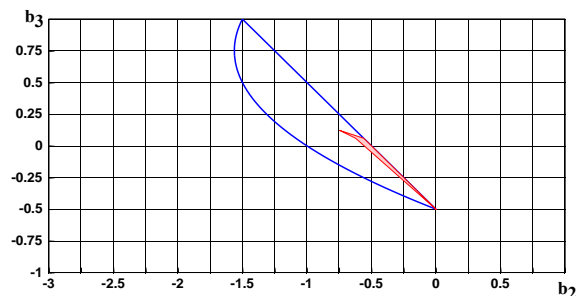
в) $b_1 = 0.00$



г) $b_1 = 0.50$



д) $b_1 = 1.00$



е) $b_1 = 1.50$

Рис. 7. Области существования комплексно-сопряженных полюсов на сечениях плоскостями, параллельными координатной плоскости b_2Ob_3 (без заливки)

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты, представленные в данной работе, позволяют расширить область применения критериев устойчивости цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой на цифровые фильтры третьего порядка. Этот результат используется в разрабатываемой авторами новой концепции проектирования ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой с учетом конечной длины разрядной сетки коэффициентов. В этой концепции реализуется отказ от широко используемой на практике реализации ЦФ в виде каскадного соединения звеньев первого и второго порядка. Это позволяет учитывать теоретико-числовые и алгебраические аспекты структурного синтеза ЦФ, описанные в публикациях авторов. Результаты, представленные в данном докладе, предназначены для проектирования ЦФ на основе программируемых логических интегральных схем, заказных СБИС, на основе графических процессоров.

Планируется провести подобные исследования для ЦФ более высоких порядков.

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена по тематике НИР «Синтез, анализ и автоматизированное проектирование цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой с конечной точностью вычислений» (РНФ, заявка № 14-11-00386).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // IV Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2010». Сб. трудов / под ред. академика РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2010. С. 466-471.
- [2] Lesnikov V.A., Chastikov A.V., Naumovich T.V., Armishev S.V. A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium EWDTS'10. IEEE Computer Society Test Technology Technical Council. St. Petersburg, 2010. С. 282-285.
- [3] Lesnikov V.A., Chastikov A.V., Naumovich T.V., Armishev S.V. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium EWDTS'10. IEEE Computer Society Test Technology Technical Council. St. Petersburg, 2010. С. 156-159.
- [4] Lesnikov V., Naumovich T. Generation and enumeration of structures of IIR digital filters // Global Signal Processing (GSP-2005). Pervasive Signal Processing (The Embedded Signal Processing Conference). Santa Clara, Ca, USA. 2005. P. 24-27.
- [5] Лесников В.А., Наумович Т.В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров: О-Краткое, 2008. 160 с.
- [6] Лесников В.А., Наумович Т.В. Синтез цифровых фильтров с конечной разрядностью коэффициентов // Цифровая обработка сигналов и ее применения. Труды РНТОРЭС им. А.С. Попова. 2005. Т. 1. С. 85-89.
- [7] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Synthesis of new canonic structures for a second-order IIR digital filters // IEEE EUROCON-2009. St.-Petersburg. 2009. P. 1328-1331.
- [8] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V., Armishev S.V. A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium EWDTS'11. IEEE Computer Society Test Technology Technical Council. Sevastopol. 2011. С. 221-224.
- [9] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Синтез новых канонических структур рекурсивных цифровых фильтров второго порядка // Инфокоммуникационные технологии. 2009. Т. 7. № 1. С. 17-20
- [10] Лесников В.А. Топография дискретизированной z-плоскости при квантовании коэффициентов цифровых фильтров // Депонир. ВИНТИ. № 1714-B2003. 22.09.2003.
- [11] Лесников В.А., Наумович Т.В., Решетников С.М., Частиков А.В. Взаимосвязь теоретико-числовой природы полюсов и структуры топологической матрицы рекурсивного цифрового фильтра // Перспективы науки. 2011. № 26. С. 112-115.
- [12] Лесников В.А., Наумович Т.В., Решетников С.М., Частиков А.В. Алгебраико-числовая природа нулей и полюсов рекурсивных цифровых фильтров // Глобальный научный потенциал. 2011. № 9. С. 52-55.
- [13] Lesnikov V., Naumovich T. Number-theoretic and algebraic aspects of structural synthesis of digital filters // Global Signal Processing(GSP-2004). The International Embedded Solutions Event (The Embedded Signal Processing Conference). Santa Clara, Ca, USA. 2004. P. 27-30.
- [14] Schlichthärle D. Digital Filters: Basics and Design. Heidelberg: Springer. 2011. 542 p.