

Цифровые фильтры второго порядка с неканонической топографией полюсов в z-плоскости

В.А. Лесников, Т.В. Наумович, А.В. Частиков

Вятский государственный университет, lesnikov.vladislav.ru@ieee.org

Аннотация — Если учесть, что коэффициенты цифрового фильтра (ЦФ) имеют конечную разрядность, то можно утверждать, что не любая точка z-плоскости может быть нулем или полюсом передаточной функции. Все возможные положения полюсов (нулей) образуют топографию z-плоскости, дискретизированной вследствие квантования коэффициентов цифрового фильтра. Топография дискретизированной z-плоскости зависит от степени алгебраических чисел, множеству которых принадлежит множество возможных полюсов (нулей), и от длины дробной части коэффициентов канонической структуры соответствующего порядка. Для большинства структур ЦФ коэффициенты взаимно независимы. В то же время известны структуры, коэффициенты которых связаны некоторым уравнением, например, связанная структура. В работе показано, как изменяется топография z-плоскости при наличии для коэффициентов ограничений-равенств.

Ключевые слова — цифровой фильтр, полюсы, нули, квантование коэффициентов, дискретизация z-плоскости, топография дискретизированной z-плоскости.

I. ВВЕДЕНИЕ

Разрабатываемая авторами новая парадигма проектирования цифровых фильтров с учетом конечной длины слова основана на том, что еще до структурного синтеза (на этапе функционального синтеза) завершается окончательное определение положения нулей и полюсов ЦФ на z-плоскости [1] – [4]. В своих работах [5] – [8] авторы установили, что при конечной длине слова коэффициентов РЦФ с любой структурой нули и полюсы РЦФ являются элементами множества алгебраических чисел. Множество алгебраических чисел – это множество всех возможных корней полиномов с коэффициентами, принадлежащими множеству рациональных чисел [9] (конечная длина слова коэффициентов ЦФ приводит к тому, что коэффициенты его передаточной функции являются рациональными числами). Авторами установлено, что степень алгебраических чисел, являющихся нулями и полюсами ЦФ, может быть не равной порядку фильтра. Например, нули и полюсы ЦФ восьмого порядка, реализованного в канонической или прямой форме, являются алгебраическими числами восьмой степени.

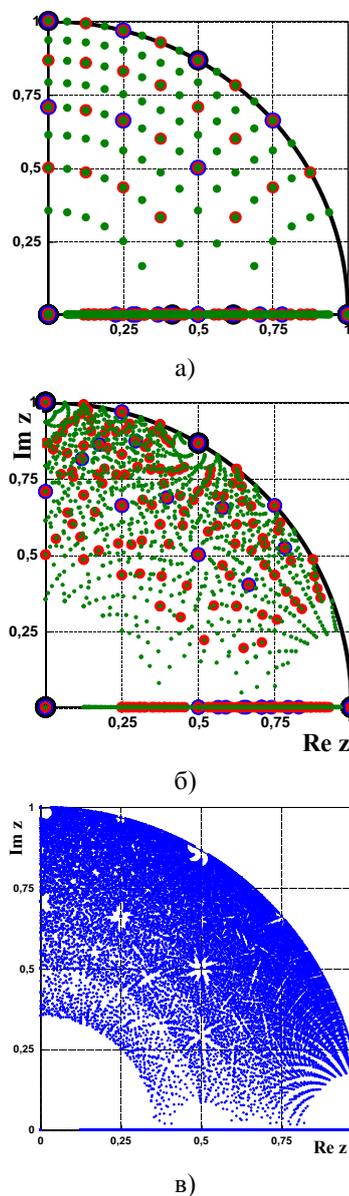


Рис. 1. Каноническая топография дискретизированной z-плоскости БИХ-фильтра (а) $n = 2$, (б) $n = 3$, (в) $n = 4$)

Реализация этого ЦФ в виде последовательного соединения звеньев второго порядка ограничивает соответствующие алгебраические числа второй степенью, а

при каскадном соединении канонических форм четвертого порядка степень алгебраических чисел равна четырём.

Авторами установлено, что не любая точка z -плоскости может являться полюсом (нулем) z -плоскости, так как в z -плоскости есть трансцендентные числа, которые не могут быть корнями полиномов с рациональными коэффициентами. Все возможные положения алгебраических чисел фиксированной степени образуют топографию z -плоскости, дискретизированной вследствие квантования коэффициентов полинома. Кроме порядка алгебраических чисел топография z -плоскости зависит от длины разрядной сетки для представления дробной части коэффициентов полинома. На рис. 1 представлена топография z -плоскости (показан только первый квадрант) для всех возможных полюсов канонической структуры ЦФ второго, третьего и четвертого порядков с разрядностью $m = 3$ дробной части коэффициентов знаменателя передаточной функции

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}{z^n - \sum_{i=1}^n b_i z^{n-i}}. \quad (1)$$

Коэффициенты a_i , b_i в большинстве структур не связаны никакими ограничениями в виде уравнений. Соответствующие топографии для них будем называть каноническими. В то же время известна так называемая связанная структура [10], топография расположения полюсов которой существенно отличается от канонической. Это отличие объясняется тем, что коэффициенты этой структуры связаны ограничением-равенством. Данная работа посвящена исследованию топографии некоторых структур, коэффициенты которых связаны ограничениями-равенствами. Такие структуры будем называть связанными.

II. СВЯЗАННАЯ СТРУКТУРА

Известная связанная структура показана на рис. 2.

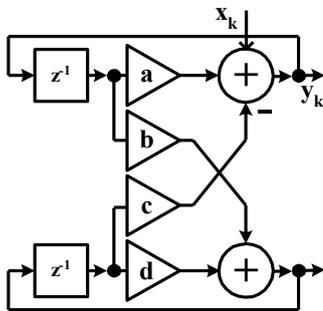


Рис. 2. Связанная структура

Коэффициенты этой структуры связаны следующими соотношениями

$$\begin{cases} a = d, \\ b = c. \end{cases} \quad (2)$$

Передаточная функция ЦФ, реализованного по связанной структуре, равна

$$H(z) = \frac{1 - dz^{-1}}{1 - (a+d)z^{-1} + (ad+bc)z^{-2}}. \quad (3)$$

Если уравнения (2) не соблюдаются, то полюсы ЦФ имеют обычную каноническую топографию (точки малого размера на рис. 3).

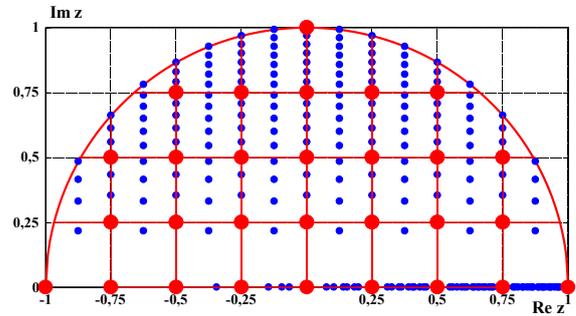


Рис. 3. Возможное положение полюсов для передаточной функции (3)

При выполнении же уравнений (2) структура становится связанной. Ее передаточная функция равна

$$H(z) = \frac{1 - az^{-1}}{1 - 2az^{-1} + (a^2 + b^2)z^{-2}}. \quad (4)$$

Топографию полюсов связанной структуры формируют узлы прямоугольной решетки (большие точки на рис. 3). Очевидно, что элементы топографии связанной структуры являются элементами подмножества множества элементов топографии канонической структуры при условии, что разрядность дробной части коэффициентов b_2 в два раза больше, чем разрядность дробной части коэффициента b_1 , где

$$\begin{cases} b_1 = a + d \\ b_2 = -(ad + bc) \end{cases} \quad (5)$$

(при представлении в форме с фиксированной точкой разрядность дробной части произведения в два раза больше, чем у сомножителей). Иначе говоря, из всего множества возможных значений полюсов ЦФ (2) исключаются те, которые не удовлетворяют системе уравнений (2).

Для определения геометрического места коэффициентов ЦФ со связанной структурой решим систему уравнений (5) относительно b_2 и a , и получим

$$b_2 = -0.25b_1^2 - b^2 \quad (6)$$

- уравнения семейства парабол на рис. 4 (малые точки – коэффициенты для канонической структуры, большие точки – для связанной структуры).

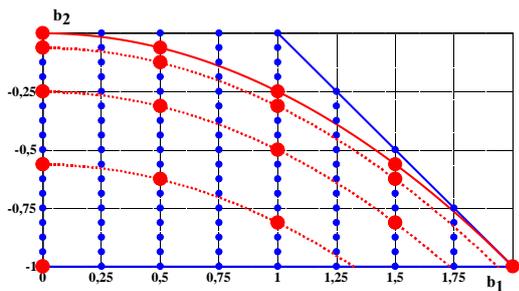


Рис. 4. Коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции связанной структуры

III. ДРУГИЕ СВЯЗАННЫЕ СТРУКТУРЫ

Кроме связанной структуры (рис. 2) известны [11] и другие структуры, имеющие неканоническую топографию z-плоскости (рис. 5, рис. 8 и рис. 11).

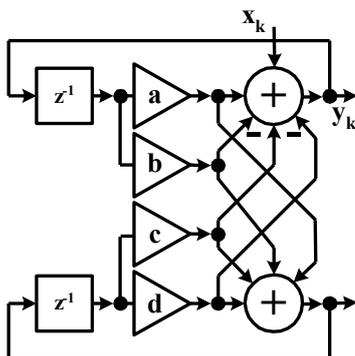


Рис. 5. ЦФ с передаточной функцией (7)

ЦФ со структурой рис. 5 имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1 - (c + d)z^{-1}}{1 - (a + b + c + d)z^{-1} + 2(ad + bc)z^{-2}} \quad (7)$$

При введении ограничений (2) эта передаточная функция будет равна

$$H(z) = \frac{1 - (a + b)z^{-1}}{1 - 2(a + b)z^{-1} + 2(a^2 + b^2)z^{-2}}, \quad (8)$$

а ограничения на коэффициенты имеют вид

$$\begin{cases} b_1 = 2(a + b), \\ b_2 = -2(a^2 + b^2). \end{cases} \quad (9)$$

Полюсы и коэффициенты этой структуры изображены на рис. 6 и рис. 7, соответственно.

ЦФ со структурой рис. 8 имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1 - (1 - c)z^{-1} - z^{-2}}{1 - (1 + a)z^{-1} - (1 + ab)z^{-2}}, \quad (10)$$

топографии полюсов и коэффициентов, показанные на рис. 9 и рис. 10.

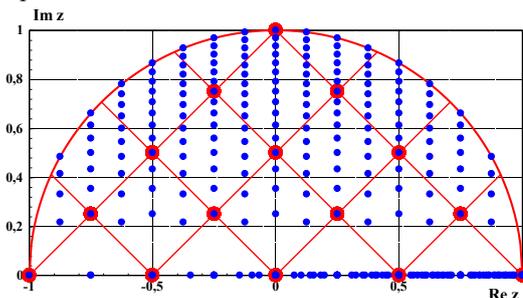


Рис. 6. Топография z-плоскости для структуры рис. 5

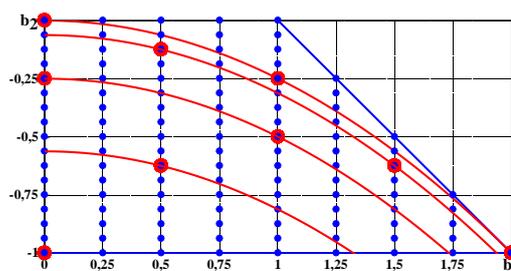


Рис. 7. Коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции структуры рис. 5

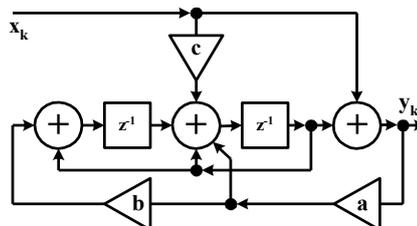


Рис. 8. ЦФ с передаточной функцией (10)

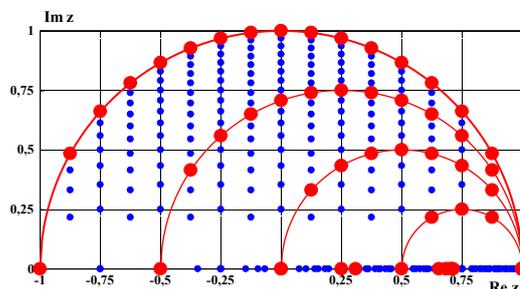


Рис. 9. Топография z-плоскости для структуры рис. 8

ЦФ со структурой рис. 11 имеет передаточную функцию

$$H(z) = \frac{1 + cz^{-1} + dz^{-2}}{1 - (a - c)z^{-1} + (1 - ab)z^{-2}}, \quad (11)$$

топографии полюсов и коэффициентов показаны на рис. 12 и рис. 13.

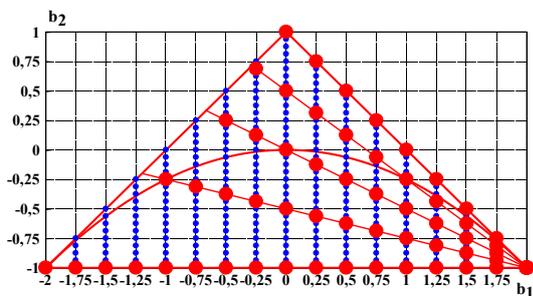


Рис. 10. Коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции структуры рис. 8

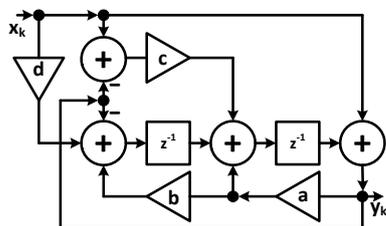


Рис. 11. ЦФ с передаточной функцией (11)

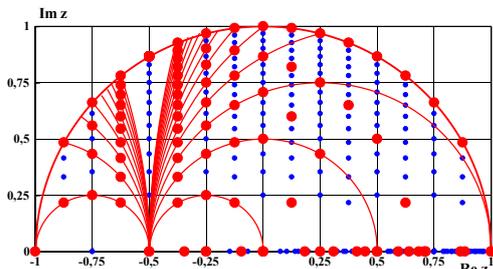


Рис. 12. Топография z-плоскости для структуры рис. 11

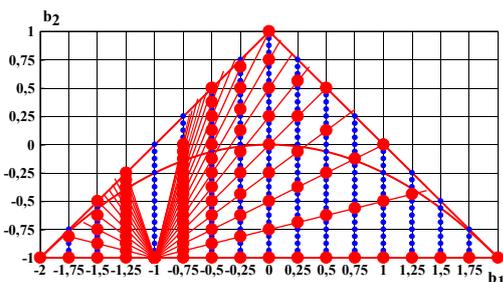


Рис. 13. Коэффициенты полинома знаменателя передаточной функции структуры рис. 11

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, отличия топографии z-плоскости от канонической объясняются тем, что коэффициенты ЦФ оказываются связанными дополнительными ограничениями, в результате чего уменьшается мощность множества возможных значений нулей и полюсов ЦФ. По этой причине структуры ЦФ с неканонической топографией z-плоскости имеет смысл называть также связанными.

Связанными следует также считать структуры, для которых справедливо неравенство

$$N_{\text{мпу}} / N_{\text{мпу кан}} < 1, \quad (12)$$

где $N_{\text{мпу}}$ и $N_{\text{мпу кан}}$ - число блоков умножения в данной структуре и в канонической структуре, соответственно, так как очевидно, что некоторые значения коэффициентов a_i и b_i в данной структуре оказываются нереализуемыми.

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена по тематике НИР «Синтез, анализ и автоматизированное проектирование ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой с конечной точностью вычислений» (РНФ, заявка № 14-11-00386).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // IV Всероссийская научно-техническая конференция «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2010». Сб. трудов. М.: ИППМ РАН. 2010. С. 466-471.
- [2] Lesnikov V.A., Chastikov A.V., Naumovich T.V., Armishev S.V. A new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium EWDTs'10. IEEE Computer Society Test Technology Technical Council. St. Petersburg. 2010. С. 282-285.
- [3] Lesnikov V.A., Chastikov A.V., Naumovich T.V., Armishev S.V. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium EWDTs'10. IEEE Computer Society Test Technology Technical Council. St. Petersburg. 2010. С. 156-159.
- [4] Лесников В.А., Наумович Т. В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров: О-Краткое. 2008. 160 с.
- [5] Лесников В.А. Топография дискретизированной z-плоскости при квантовании коэффициентов цифровых фильтров // Депонир. ВИНТИ. № 1714-B2003 22.09.2003.
- [6] Лесников В.А., Наумович Т.В., Решетников С.М., Частиков А.В. Взаимосвязь теоретико-числовой природы полюсов и структуры топологической матрицы рекурсивного цифрового фильтра // Перспективы науки. 2011. № 26. С. 112-115.
- [7] Лесников В.А., Наумович Т.В., Решетников С.М., Частиков А.В. Алгебраико-числовая природа нулей и полюсов рекурсивных цифровых фильтров // Глобальный научный потенциал. 2011. № 9. С. 52-55.
- [8] Lesnikov V., Naumovich T. Number-theoretic and algebraic aspects of structural synthesis of digital filters // Global Signal Processing(GSP-2004). The International Embedded Solutions Event (The Embedded Signal Processing Conference). SantaClara, Ca, USA. 2004. P. 27-30.
- [9] Айерлэнд К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерлэнд, М. Роузен. М.: Мир, 1987.
- [10] Голд Б. Цифровая обработка сигналов / Б. Голд, Ч. Рэйдер. М.: Сов. радио, 1973.
- [11] Ланне А.А. Шумы и точность реализации характеристик цифровых фильтров / А.А. Ланне, Г.Б. Шевкопляс // Зарубежная радиоэлектроника. 1974. №4.