

# Вычислительный алгоритм анализа устойчивости больших динамических систем

М.М. Жаров

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, zarov@ippm.ru

**Аннотация** — В статье рассматривается задача анализа устойчивости больших динамических систем. Предлагаемый подход комбинирует высокоэффективные алгоритмы для быстрого вычисления полюсов передаточной функции, позволяющие вычислять полюсы с положительной вещественной частью.

**Ключевые слова** — передаточная функция, собственное значение, СБИС, Арнольди метод, подавление спектра, полиномы Чебышева.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Важным требованием при практическом проектировании динамических систем является предсказание их возможной неустойчивости и, как результат, появление нежелательных генераций. Для этой цели желательно использовать системы автоматизации схемотехнического проектирования. Современные системы схемотехнического проектирования, как правило, не имеют специального вида анализа устойчивости. Некоторые лишь содержат средства расчета полюсов/нулей передаточной функции.

Распределение полюсов для систем с сосредоточенными параметрами связывается с решением обобщенной проблемой собственных значений и собственных векторов [1]. Такие численные методы как *QR*- (или *QZ*-) алгоритм [1,2] или итерационный алгоритм Мюллера [3,4,10] были использованы для решения этой задачи. Появилась возможность идентифицировать полюсы с положительной действительной частью, что свидетельствует (при наличии таковых) о неустойчивости динамической системы.

Однако две причины требуют развития математического и программного обеспечения при анализе устойчивости в задачах проектирования:

- отсутствие полного цикла исследования устойчивости;
- высокий порядок моделей анализируемых схем.

В этой статье рассматривается вычислительный алгоритм анализа устойчивости для моделей высокого порядка.

Вычислительные затраты при использовании описанных выше методов велики (в частности, затраты *QR*-алгоритма пропорциональны  $O(n^3)$ , где  $n$  - порядок матриц динамической системы), что дает возможность применять их к задачам невысокого порядка (с матри-

цами не более (500-700) порядка). Альтернативный подход предлагает решать частичную проблему собственных значений [5,6], который предполагает вычисление группы доминирующих полюсов. Для решения этой задачи в последнее время используются методы крыловских подпространств [6]. В отличие от *QR*-алгоритма, крыловские методы используют разреженность исходных матриц и решают задачу на собственные значения существенно меньшей размерности по сравнению с исходной задачей. Однако применение крыловских методов в некоторых случаях может привести к потере информативных полюсов.

Представленный подход – попытка преодолеть конфликт между производительностью и робастностью анализа устойчивости схем за счет подавления в спектре матричного пучка полюсов с отрицательной действительной частью и корректным вычислением полюсов с положительной действительной частью.

## II. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОЛЮСОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Передаточная функция линеаризованной электрической цепи в лапласовской форме имеет следующий вид:

$$H(s) = d^T (sC - G)^{-1} b, \quad (1)$$

где  $G$  - матрица проводимостей порядка  $n$ ;  $C$  - матрица емкостей и индуктивностей порядка  $n$ ;  $b$  - входной вектор;  $d$  - выходной вектор. Полюсы передаточной функции (1) могут быть получены решением обобщенной проблемы собственных значений вида:

$$Gx_i = \lambda_i Cx_i. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda_i$  и  $x_i$  - собственное значение и собственный вектор;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В соответствии с критерием Ляпунова схема устойчива, если все полюсы (или собственные значения задачи (2)) имеют отрицательные действительные части:

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0. \quad (3)$$

Трудности вычисления полюсов в системах моделирования связаны с особенностями схемных матриц. Главные среди них: несимметричность, возможная вырожденность и высокий порядок. Последнее свой-

ство ограничивает применение стандартных методов, предназначенных для решения полной проблемы собственных значений.

Перспективный путь анализа устойчивости для цепей высокого порядка связан с решением частичной проблемой собственных значений. Соответствующие численные алгоритмы могут базироваться на методе Арнольди [6,7]. Этот метод дает возможность вычислять наибольшие по модулю собственные значения задачи (2). Варианты метода Арнольди приведены в [7,8]. Основные шаги вычислительной схемы для матрицы  $A = G^{-1}C$  (при таком преобразовании вычисляются  $\mu_i = 1/\lambda_i$ ) могут быть представлены следующим образом:

1. Задание числа шагов  $m$ , числа требуемых собственных значений  $r$ , начального вектора  $x_1$  с единичной нормой. Как правило, количество шагов Арнольди  $m$  превышает количество точно вычисляемых собственных значений  $r$  в 2-3 раза.
2. Шаги Арнольди. Формирование ортонормального базиса в крыловском подпространстве  $V_{n,m}$  и верхней матрицы Хессенберга  $H_{m+1,m}$ , аппроксимирующей некоторое количество собственных значений матрицы  $A$  (с заданной точностью их количество соответствует  $r$ ).
3. Вычисление собственных значений. После выполнения шага 2 может быть сформулирована и решена задача на собственные значения с матрицей  $H \rightarrow Hy_i = \theta_i y_i$  ( $\theta_i$  и  $y_i$  - собственное значение и собственный вектор и  $i = 1, 2, \dots, m$ , при  $m \ll n$ ). Собственные значения и собственные векторы матрицы  $H$  могут быть получены с помощью QR-алгоритма. Аппроксимированные собственные векторы исходной задачи находятся как пары Рунца ( $\theta_i, V_m y_i$ ).
4. Проверка условия сходимости и рестарт. Если критерий сходимости выполнен, то итерационный процесс заканчивается.

На рис. 1 показан рост вычислительных затрат для метода Арнольди и QR-алгоритма. С увеличением порядка модели затраты QR-алгоритма имеют кубическую зависимость, а затраты метода Арнольди почти линейно зависят от порядка модели.

Ограничения метода Арнольди при анализе устойчивости обнаруживаются на следующем примере.

*Пример расчета операционного усилителя (ОУ) ua-741 с резистивной обратной связью.*

ОУ имеет внутреннюю корректирующую емкость ( $c_{corr}$ ). В схеме возникает неустойчивость при малой величине  $c_{corr} = 0.01 pf$ . С помощью QR-алгоритма вычислены все полюсы передаточной функции и некоторая их часть представлена в табл. 1. Среди полюсов

имеется пара комплексно-сопряженных (29 и 30 полюсы) с положительной действительной частью, что свидетельствует о неустойчивости схемы ОУ.

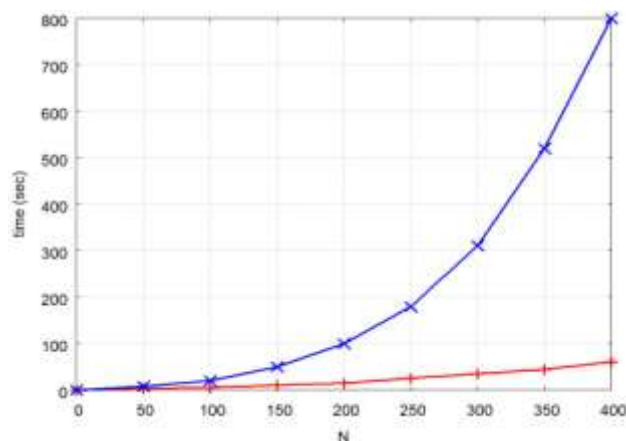


Рис. 1. Вычислительные затраты с увеличением порядка модели: метод Арнольди (нижняя кривая) и QR-алгоритма (верхняя кривая)

Таблица 1

Полюсы, вычисленные QR- алгоритмом

N	полюс	N	полюс
21	-1.349207e+07	26	-5052197-i5.35391e+06
22	-1.308302e+07	27	-5052197+i5.35391e+06
23	-1.232990e+07	28	-2241823
24	-1.077690e+07	29	4156991-i1.19661e+07
25	-0.971536e+07	30	4156991+i1.19661e+07

Следующий эксперимент (с той же моделью ОУ) был выполнен с помощью метода Арнольди. Среди трех точно вычисленных полюсов передаточной функции не оказалось ни одного с положительной действительной частью. В табл. 2 приведены полюсы, полученные методом Арнольди.

Таблица 2

Полюсы, вычисленные методом Арнольди

N	полюс
1	-5052197-i5.35391e+06
2	-5052197+i5.35391e+06
3	-2241823

Исходный метод Арнольди не обнаружил полюсов с положительной вещественной частью (при анализе потеряны информативные полюсы).

Для решения этой задачи в рамках частичной проблемы собственных значений предлагается комбинировать метод Арнольди с чебышевским ускорением [9]. В отличие от исходного метода Арнольди предлагаемая комбинация позволяет непосредственно вычис-

лять правое крайнее собственное значение задачи (2), что соответствует полюсам с положительной действительной частью (если таковые имеются).

Суть подхода состоит в построении начального вектора для выполнения шагов алгоритма Арнольди. Каждое новое приближение представляется в виде  $x_k = p_k(A)x_0$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ , где  $p_k(\lambda)$  - полином степени  $k$ . Полином необходимо строить таким образом, чтобы  $p_k(\lambda_i) \rightarrow 0$  для полюсов с отрицательными действительными частями и напротив  $p_k(\lambda_i)$  не должно стремиться к 0 для полюсов с положительными действительными частями. Таким образом чебышевское ускорение можно использовать как метод получения хорошего начального приближения для процесса Арнольди, подавляя в этом векторе ненужные компоненты. Это предложение изложено в работе [9], где для подавления спектра ненужных собственных значений (с отрицательными действительными частями) используются полиномы Чебышева –  $p_k(\lambda_i)$ . Эти полиномы подавляют ненужные полюсы, заключенные в область, ограниченной эллипсом. Детали конструирования оптимального эллипса и определение порядка чебышевского полинома дается в [8,9].

Вычислительный алгоритм включает основные шаги исходного метода Арнольди с модификацией пункта 4. Этот шаг включает следующие численные процедуры [8,9]:

4. Проверка условия сходимости и рестарт. Если критерий сходимости выполнен, то итерационный процесс заканчивается. Иначе выполнить следующие вычислительные процедуры:

- вычислить вектор  $x_1$ ;
- выбрать степень  $k$  полинома  $p_k(A)$ ;
- сконструировать оптимальный эллипс, включающий ненужные полюсы;
- найти  $p_k(A)$ ;
- вычислить  $\tilde{x} = p_k(A)x_1$ ;
- сформировать новый вектор  $x_1 = \frac{\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|}$  для выполнения шагов Арнольди.

Результаты вычисления крайнего правого полюса (для модели ОУ, описанного выше) с помощью предложенной вычислительной процедуры приведены в табл. 3. Как следует из таблицы вычислительный алгоритм находит тот же полюс с положительной вещественной частью, что и QR- алгоритм.

Описанная вычислительная процедура Арнольди – Чебышева может быть рекомендована как надежный алгоритм анализа устойчивости практических задач.

Полюсы, вычисленные методом Арнольди – Чебышева

N	полюс
1	-2241823
2	4156991-i1.19661e+07
3	4156991+i1.19661e+07

### III. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ПОЛНОГО ЦИКЛА АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

Описанный вычислительный подход внедрен в систему схемотехнического проектирования как самостоятельный вид анализа для моделирования характеристик аналоговых схем. С помощью этой программы можно:

- вычислить полюса передаточной функции (требуемое количество);
- проверить схему на устойчивость в соответствие с критерием Ляпунова;
- вычислить параметрическую чувствительность и выбрать параметры схемы наиболее чувствительных к смещению полюсов;
- вычислить степень устойчивости схемы (удаленность полюса с отрицательной действительной частью от мнимой оси);
- построить траектории полюсов передаточной функции при варьировании параметров схемы, вычислить запас устойчивости.

Набор этих характеристик покрывает цикл исследования устойчивости аналоговых схем.

### IV. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки описанного вычислительного алгоритма была выбрана схема высокого порядка – активный фильтр (ARC - фильтр). Схема используется в качестве базового элемента ОУ, описанный во втором разделе. Модель схемы содержит 1300 переменных. Параметры схемы подобраны таким образом, что содержат пары комплексно-сопряженных полюсов с положительными действительными частями.

Вычисления проводились как с помощью оригинального метода Арнольди, так и комбинированным методом Арнольди-Чебышева. Были проведены две серии экспериментов. В первой серии точно вычислялись 10 полюсов двумя алгоритмами. Результаты вычислений приведены в табл. 4. Как видно из таблицы, методом Арнольди не получено ни одного полюса с положительной действительной частью, то есть использование метода Арнольди привело к потере важной информации об исследуемой системе. Алгоритм Арнольди – Чебышева дал ожидаемую информацию о неустойчивости системы, т.е. среди найденных 10 одна пара комплексных полюсов имеет положительную вещественную часть.

Таблица 4

## Полюсы ARC фильтра

№	метод Арнольди	метод Арнольди-Чебышева
1	$-1225.5 \pm i20161.7$	$-1228.0 \pm i20165.2$
2	$-1108.2 \pm i17698.6$	$-1107.5 \pm i17001.1$
3	$-1099.6 \pm i17791.8$	$-1097.3 \pm i17797.5$
4	$-1023.5 \pm i17689.7$	$-1025.6 \pm i17695.9$
5	$-1007.0 \pm i17773.9$	$2547197 \pm i1.10775e07$

Таблица 5

## Полюсы ARC фильтра

№	метод Арнольди	метод Арнольди-Чебышева
1	$-1578.9 \pm i18870.8$	$-1581.5 \pm i18875.2$
2	$-1483.3 \pm i18938.9$	$-1484.3 \pm i18841.9$
3	$-1477.2 \pm i18833.7$	$-1479.4 \pm i18841.6$
4	$-1271.2 \pm i20183.3$	$-1270.5 \pm i20185.3$
5	$-1269.1 \pm i20130.7$	$-1270.7 \pm i20135.8$
6	$-1225.6 \pm i20161.7$	$-1226.0 \pm i20166.6$
7	$-1108.2 \pm i17698.6$	$-1109.6 \pm i17701.2$
8	$-1099.6 \pm i17791.8$	$-1100.3 \pm i17797.8$
9	$-1023.5 \pm i17689.7$	$-1030.4 \pm i17695.8$
10	$-1007.0 \pm i17773.9$	$2547197 \pm i1.10775e07$

Для второй серии количество точно вычисляемых полюсов было увеличено до 20. Результаты расчетов приведены в табл. 5. Как и в первом случае, метод Арнольди не смог обнаружить полюсы с положительной действительной частью. Алгоритм Арнольди-Чебышева зафиксировал пару комплексно-сопряженных полюсов с положительной действительной частью. Эти полюсы совпадают с положительными полюсами, полученными в первой серии (где было получено 10 полюсов).

На рис. 2 продемонстрирована процедура построения траектории перевода полюса с положительной вещественной частью в область устойчивости. Эксперимент выполнен для модели ARC-фильтра. В качестве варьируемого параметра была выбрана корректирующая емкость ОУ -  $c_{corr}$ . Ее величина менялась от  $0.01 pf$  до  $10 pf$ . Из рис. 2 видно, что крайний правый полюс ( $2547197 \pm i1.10775e07$ ) при величине  $c_{corr} = 0.01 pf$  лежит в положительной полуплоскости. В последней точке траектории крайний правый полюс ( $-1.0021e03 \pm i0$ ) перемещен в отрицательную полуплоскость при  $c_{corr} = 10 pf$ .

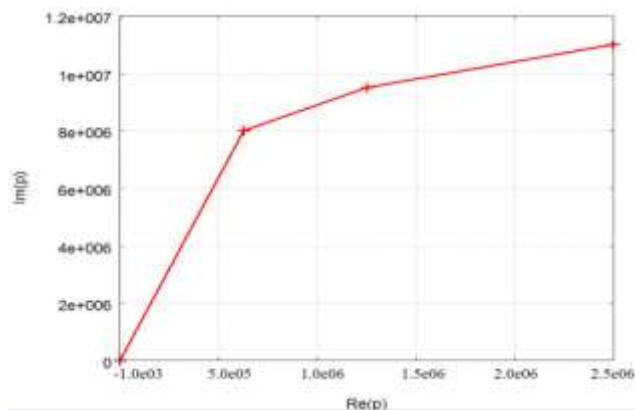


Рис. 2. Смещение полюса из положительной полуплоскости в левую варьированием параметра  $c_{corr}$

## V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что метод Арнольди-Чебышева может быть адаптирован для проведения полного цикла исследования больших динамических систем. Этот метод базируется на вычислительно эффективном методе Арнольди, дополненным средствами подавления ненужных полюсов полиномами Чебышева в области, ограниченной эллипсом. Экспериментальные результаты подтверждают работоспособность предложенной комбинации методов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Haley S.B. The Generalized Eigenproblem: Pole-Zero Computation // Proc. IEEE. 1988. V. 76. № 2. P. 103-120.
- [2] Moler C.B., Stewart G.W. An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. P. 241-256.
- [3] Muller D.E. A Method for solving algebraic equations using an automated computer // Math. Tables Other Aids Comput. 1956. V. 10. P. 208-215.
- [4] Wong Y.M., Pottle C. On the sparse matrix computation of critical frequencies // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1976. CAS-23. P. 92-95.
- [5] Wilkinson J.H. The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford: Clarendon Press. 1965.
- [6] Saad Y. Numerical Methods for large Eigenvalue Problems. Halstead Press, NY. 1992.
- [7] Saad Y. Variations on Arnoldi's method for computing eigenvalues of large unsymmetric matrices // Linear Algebra and Appl. 1980. V. 34. P. 269-295.
- [8] Duff I.S., Scott J.A. Computing selected eigenvalues of sparse unsymmetric matrices using subspace iterations // ACM Trans. on Math. Software. 1993. V. 19. № 2. P. 137-159.
- [9] Saad Y. Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems // Math. Comp. 1984. V. 42. № 166. P. 567-588.
- [10] Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б. Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем. М.: Наука, 2008. 342 с.