

Алгоритмы редукции моделей, сохраняющие структурную разреженность в задачах схемотехнического анализа

М.М. Жаров, С.Г. Русаков

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, zarov@ippm.ru

Аннотация — Обсуждаются вычислительные алгоритмы редукции моделей динамических систем высокой размерности. Обоснован выбор алгоритма редукции, обеспечивающего формирование упрощенной модели с сохранением разреженной структуры – спектральных методов редукции на базе вычисления доминирующих полюсов. Предлагаются пути повышения вычислительной эффективности такого класса алгоритмов редукции. Показаны относительные преимущества метода при формировании редуцированных моделей многопортовых цепей.

Ключевые слова — линейные системы, передаточная функция, редукция моделей, собственные значения, доминирующие полюса, разреженные матрицы, многопортовые системы.

I. ВВЕДЕНИЕ

В связи с постоянно увеличивающимися размерами задач, решаемых в принятых маршрутах проектирования СБИС, в настоящее время получены значительные результаты в разработке новых методов и алгоритмов редукции моделей. В первую очередь, алгоритмы редукции моделей обеспечили эффективный учёт влияния межсоединений на характеристики СБИС. В последнее время сфера практического применения алгоритмов редукции расширилась, они используются при решении таких высокоразмерных задач как электро-тепловое моделирование, учёт воздействия электромагнитных полей на характеристики СБИС, учёт влияния подложки [3,4,6]. В основном развитие получили относительно надёжные алгоритмы на базе основных методических направлений, которые обычно делят на два класса:

- методы на базе крыловских подпространств [4,6];
- методы на базе сингулярного разложения (SVD - singular value decomposition) [4,6], включающие популярные алгоритмы метода балансной реализации (TBR – truncation balance realization) [4].

Каждое из алгоритмических направлений имеет свои преимущества и ограничения. Методы на базе крыловских подпространств, как правило, имеют высокое быстродействие. Типичным и широко применяемым представителем этого класса является алгоритм редукции PRIMA [7]. Алгоритмы на базе крыловских подпространств эффективны при редукции моделей с одним входом и одним выходом, но быстро теряют

свою эффективность в задачах редукции моделей многопортовых цепей [4,8].

Алгоритмы метода балансной реализации (TBR) [6,8] исходно ориентированы на редукцию цепей невысокого порядка. Это связано с высокими затратами решения матричных линейных систем уравнений Ляпунова для вычисления матриц управляемости и наблюдаемости. Порядок редуцированной модели автоматически определяется выбором нужного количества сингулярных чисел по заданной точности редуцированной модели. Успешным развитием этого алгоритмического направления стал предложенный в [8] алгоритм PMTBR. В алгоритме удачно объединяются техника TBR с алгоритмами многоточечной редукции. Матрица управляемости образуется векторами решения систем линейных уравнений в выбранных частотных точках. PMTBR алгоритм подтвердил свою эффективность в различных практических приложениях редукции моделей линейных цепей.

Стандартными требованиями к алгоритмам редукции моделей являются точность упрощенных моделей, затраты на их формирование, сохранение свойств устойчивости и пассивности исходных моделей [4]. На современном этапе помимо перечисленных традиционных критериев выбора алгоритмов всё большую роль играют новые требования к эффективности применения генерируемых моделей, в частности, сохранение разреженности исходных моделей анализируемых цепей. Следует отметить, что в своём большинстве алгоритмы редукции из перечисленных выше классов формируют плотные редуцированные матрицы, т.е. не удовлетворяют соответствующим требованиям к структуре. Следствием является ожидаемый рост вычислительных затрат при решении схемных уравнений модели.

Требования к структуре редуцированных моделей становятся в числе ведущих при генерации моделей. Среди перспективных методов, обеспечивающих формирование упрощенных моделей с разреженными матрицами, следует указать методы модальной аппроксимации (модальной редукции) [5]. Важным преимуществом методов модальной редукции является сохранение в редуцированной модели полюсов исходной системы [5]. Матрицы редуцированной модели имеют диагональную структуру. Диагональная структура результирующих матриц гарантирует сохранение свойств разреженности исходной полной схемной модели. Результатом является вычислительная эффектив-

ность полученной редуцированной модели при дальнейшем моделировании динамических систем.

Далее анализируются перспективы применения метода модальной редукции на базе селективного вычисления доминирующих полюсов [11,12] для формирования упрощенных моделей. Рассмотрены подходы повышения вычислительной эффективности алгоритмов благодаря экономичному решению систем линейных алгебраических уравнений с разреженной структурой. Обсуждаются перспективы применения рассматриваемого класса для редукции моделей многопортовых цепей.

II. ПРЕДПОСЫЛКИ

A. Передаточная функция

Поведение линейной времязависимой (ЛТИ) многопортовой системы с N внутренними переменными, N_{inp} входными портами и N_{out} выходными портами описывается системой линейных алгебро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= d^T x(t) \end{aligned} \quad (1,2)$$

Здесь x - матрица внутренних переменных системы порядка $N \times N_{inp}$, y - матрица коэффициентов передачи от входных к выходным портам размером $N_{out} \times N_{inp}$, b - входная матрица размером $N \times N_{inp}$ и d - матрица отображения состояния системы на выходные порты размером $N \times N_{out}$; A - матрица проводимостей и E - матрица емкостей. В случае однопортовых систем x , b и d являются векторами, а y - скаляр.

Передаточная функция системы (1,2) в лапласовской форме имеет следующий вид:

$$H(s) = d^T (sE - A)b. \quad (3)$$

Передаточная функция может быть представлена как отношение вычетов и полюсов (см., например, [1]):

$$H(s) = \sum_{j=1}^N \frac{R_j}{s - \lambda_j}$$

Здесь R_j - вычеты, λ_j - полюсы передаточной функции. Часто применяется сокращённый вариант такого представления:

$$H(s) \approx \hat{H}(s) = \sum_{j=1}^n \frac{R_j}{s - \lambda_j}, \quad (4)$$

где n - заданное число полюсов передаточной функции ($n < N$).

Следующие соотношения определяют для пары матриц A и E собственные значения λ_i и собственные векторы c_i и l_i : $Ac_i = \lambda_i Ec_i$; $A^T l_i = \lambda_i E^T l_i$.

В терминах собственных векторов вычеты можно представить в следующем виде: $R_i = (d^T c_i)(l_i^T b)$. R_i является матрицей для многопортовых систем и скаляром для однопортовых систем.

B. Доминирующие полюсы

Доминирующие полюсы соответствуют специфическим (комплексным) собственным значениям матричного пучка (A, E) .

Полюс λ_j передаточной функции $H(s)$ с нормированными правым и левым собственными векторами c_i и l_i ($l_i^T Ec_i = 1$) называют доминирующим, если для всех $j \neq i$ [9]

$$\|R_i\| > \|R_j\|. \quad (5)$$

Доминирующий полюс хорошо управляем и наблюдаем в передаточной функции. Передаточная функция, построенная на основе доминирующих полюсов, имеет следующие особенности:

- пики на частотной характеристике соответствуют частоте, определяемой мнимой частью соответствующего полюса;
- характер процессов в анализируемой системе определяется доминирующими полюсами.

C. Редукция с применением проекционных матриц

После формирования матриц проектирования S и L , соответствующих правым и левым собственным векторам, вычисляются редуцированные матрицы в соответствии со следующими правилами:

$$\hat{A} = L^T AC; \hat{E} = L^T EC; \hat{b} = L^T b; \hat{d} = C^T d. \quad (6)$$

III. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОМИНИРУЮЩИХ ПОЛЮСОВ ОДНОПОРТОВЫХ СИСТЕМ

В практических задачах полюсы целесообразно находить как корни функции $H^{-1}(s)$, т.к.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} |H^{-1}(s)| = 0.$$

Ниже описаны подходы вычисления доминирующих полюсов передаточной функции.

Для вычисления одного доминирующего полюса передаточной функции строится итерационная процедура, на каждом шаге которой вычисляются собственные векторы c_i и l_i решением двух систем линейных

алгебраических уравнений для исходной и транспонированной задач. Приближенная оценка полюса находится с помощью двустороннего отношения Релея:

$$s_{k+1} = \frac{l_k^T A c_k}{l_k^T E c_k}.$$

Завершается итерационная процедура при выполнении следующего условия:

$$\|A c_{k+1} - s_{k+1} E c_{k+1}\| < \varepsilon, \text{ где } \varepsilon - \text{ заданная точность.}$$

Значение полюса, вычисленного с заданной точностью (первого доминирующего полюса): $\lambda_1 = s_{k+1}$.

Для вычисления следующего полюса необходимо исключить из спектра матричного пучка найденный полюс. В противном случае возможна сходимость к уже найденному полюсу. Для вычисления следующего полюса необходимо выполнить итерационные шаги, описанные выше.

Существенным недостатком описанного подхода является то, что информация, полученная на текущей итерации и содержащаяся в собственных векторах, после завершения итерации теряется. Однако текущие правые и левые собственные векторы содержат компоненты, соответствующие другим доминантным полюсам. Поэтому вместо отбрасывания собственных векторов целесообразно их накапливать, объединяя в промежуточные подпространства V и W . Эта процедура называется «subspace acceleration» [9]. О применении такого подхода указано в работе [13], а затем он нашел отражение в работе [9].

Основные шаги вычисления доминирующих собственных значений (полюсов) и соответствующих собственных векторов с учетом «subspace acceleration»:

1. Задание $k = 0$; s_0 - величина начального приближения полюса; p_{req} - требуемое количество полюсов; A, E, b, d - соответствуют обозначениям системы (1,2).

Результат работы алгоритма: тройки λ_i, c_i, l_i - собственное значение (доминирующий полюс), правый и левый собственные векторы ($i = 1, 2, \dots, p$).

2. Если условие $p > p_{req}$ выполнено, то перейти к п. 10.

3. Решение систем уравнений для прямой и транспонированной задач относительно векторов v_k и w_k

$$(s_k E - A)v_k = b; (s_k E - A)^* w_k = d.$$

4. Ортогонализация найденных векторов v_k и w_k и расширение матриц проектирования $V = [V, v_k]; W = [W, w_k]; k = k + 1$.

Полученные собственные векторы ортогонализуются к ранее найденным векторам матриц V и W .

5. Решение двух спектральных задач $W^* A V Q = \tilde{\lambda} W^* E V Q$ и $Z^T W^* A V = \tilde{\lambda} Z W^* E V$. (7)

Формирование редуцированных матриц низкого порядка и решение двух спектральных задач относительно векторов q_i и z_i .

6. Вычисление вычетов в соответствии с формулой $R_i = (d^T q_i)(z_i^T b)$. Сортировка найденных полюсов и соответствующих собственных векторов в порядке убывания вычетов передаточной функции в соответствии с условием (5). Доминирующий полюс, соответствующий максимальному вычету становится первым в полученном ряду. Этот полюс принимается в качестве нового приближения для следующего итерационного шага.

7. Аппроксимация правых и левых собственных векторов, соответствующих доминирующим полюсам, для исходных матриц A и E

$$\hat{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_1; \hat{c}_1 = V q_1 / \|V q_1\|; \hat{l}_1 = W z_1 / \|W z_1\|.$$

8. Если условие $\|A \hat{c}_1 - \hat{\lambda}_1 E \hat{c}_1\|_2 < \varepsilon$ не выполняется, то переход к п. 9, иначе установить $C = [C, \hat{c}_1]; L = [L, \hat{l}_1]; \Lambda = [\Lambda, \hat{\lambda}_1]$. Здесь C матрица, образованная правыми собственными векторами, L - матрица левых собственных векторов и Λ - диагональная матрица доминирующих полюсов. Количество доминирующих полюсов, правых и левых собственных векторов увеличивается на единицу ($p = p + 1$). $k = k + 1$.

9. $k = k + 1$. Выбор начального приближения для вычисления следующего полюса ($s_k = \hat{\lambda}_1$) и переход к п. 2.

10. Заданное количество доминирующих полюсов найдено.

Редуцированные матрицы находятся с использованием преобразования (6).

При выполнении условия п.8, найденный с требуемой точностью доминирующий полюс, правый и левый собственные векторы помещаются в матрицы C и L . Найденный доминирующий полюс исключается из спектра и осуществляется поиск следующего доминирующего полюса.

A. Снижение вычислительных затрат при решении систем линейных алгебраических уравнений

Основные вычислительные затраты среди указанных шагов занимает решение систем линейных алгебраических уравнений.

Снижение вычислительных затрат при применении прямых методов связано с использованием техни-

ки разреженных матриц, а также с представлением модели в блочно-диагональной форме с двойным окаймлением. Необходимо учитывать, что в рассматриваемом случае решение двух систем уравнений на каждом итерационном шаге требует только одной факторизации матриц $LU = (s_k E - A)$, т.к. для транспонированной задачи справедливо $U^T L^T = (s_k E - A)^T$.

Блочно-диагональная форма с двойным окаймлением во многих случаях имеет преимущества. Например, в работе (<http://www.ee.ucla.edu/~hy255/>) описана система из 32 информационных шин, связанных друг с другом электромагнитным взаимодействием и непосредственно емкостными связями. Эквивалентная схема каждой из шин представлена 10 секциями из RLC-цепочек. Параметры элементов секций одинаковы для всех шин. Для такого примера блочно-диагональный способ представления модели имеет преимущества с вычислительной точки зрения. Каждый блок включает матрицы эквивалентной схемы одной шины. Всего в данном случае система включает 32 внутренних блока и матрицы двойного окаймления, содержащие элементы, связывающие между собой шины. Так как все блоки в заданном примере одинаковы, то достаточно лишь LU разложения для одного диагонального блока матрицы. Применение же техники разреженных матриц потребует выполнять LU преобразование для всей разреженной матрицы.

Другой путь сокращения вычислительных затрат при решении систем линейных алгебраических уравнений связан с применением итерационных методов на базе крыловских подпространств (см., например, [10,2]). Основной проблемой этих методов является их медленная сходимость к решению [10]. Для увеличения скорости сходимости исходную систему предварительно преобразуют применением преобуславливателей [10]. В качестве преобуславливателя может быть взята диагональная часть блочно-диагональной матрицы с двойным окаймлением.

IV. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДОМИНИРУЮЩИХ ПОЛЮСОВ ДЛЯ МНОГОПОРТОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Ниже показана возможность расширения алгоритма модальной редукции на базе расчета доминирующих полюсов для редукции моделей многопортовых цепей. Проблема многопортовости является наиболее актуальной проблемой практического применения методов редукции. Как указывалось выше, многие распространённые алгоритмы теряют вычислительную эффективность в случае многопортовых моделей. Примером являются методы на базе крыловских подпространств [4,8].

В отличие от скалярных передаточных функций однопортовых систем передаточная функция многопортовой системы является матрицей. В случае равного количества входов и выходов эта матрица квадратная. Каждая из компонент матрицы H_{lm} является ска-

ляром и определяет передаточную функцию от l входа к m выходу системы.

При разработке вычислительного алгоритма формализованного понижения порядка многопортовых систем методами модальной редукции необходимо решить один из главных вопросов: как выбрать критерий окончания процесса формирования передаточных функций в заданном частотном диапазоне.

В качестве критерия завершения формирования передаточных функций предлагается использовать следующее свойство матричной нормы:

$$\sigma_{\min}(\omega) \leq \frac{\|H(i\omega)u(i\omega)\|_2}{\|u(i\omega)\|_2} \leq \sigma_{\max}(\omega), \quad (8)$$

где $\sigma_{\min}; \sigma_{\max}$ - минимальное и максимальное сингулярные числа $H(i\omega)$; $u(i\omega)$ - входное воздействие в частотной области; ω - частота; $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Неравенства (8) показывают, что матричная норма передаточных функций динамической системы ограничена передаточными функциями максимального и минимального сингулярных чисел. Соотношение (8) полезно при оценке погрешности редуцированной многопортовой динамической системы.

Рассмотрим передаточную функцию многопортовой системы $H(s) = d^T (sE - A)^{-1} b$ с доминирующими полюсами λ_i , для которых возможно выполнение условия: $\sigma_{\max}(H(s)) \rightarrow \infty$. Для квадратной передаточной функции целесообразно рассматривать обратную задачу, для доминирующих полюсов которой $\sigma_{\min}(H^{-1}(s)) \rightarrow 0$.

Блок-схема алгоритма вычисления доминирующих полюсов для многопортовых моделей во многом сходна с блок-схемой для однопортовых моделей. Приведем их отличия.

1. Если условие $p > p_{req}$ выполнено, то перейти к п.10.

2. Передаточная функция многопортовой модели представляется матрицей $H^{-1}(s_k)$, спектральные свойства которой характеризуются следующей тройкой: (μ_{\min}, q, z) . Составляющие этой тройки являются решением следующей пары задач:

$$H^{-1}(s_k)q(s_k) = \mu(s_k)q(s_k)$$

$$z^T(s_k)H^{-1}(s_k) = \mu(s_k)z^T(s_k)$$

с нормированными собственными векторами $z^T(s)q(s) = 1$.

3. Собственные векторы, полученные на этапе 2, используются в качестве правых частей двух систем уравнений $(s_k E - A)v = q; (s_k E - A)^T w = z$.

Пункты 4-11 одинаковы для однопортовых и многопортовых моделей.

Ниже приводятся диаграммы для двух примеров, демонстрирующие применение предлагаемого подхода к многопортовым моделям. Примеры взяты из библиотеки тестовых примеров NICONET [<http://www.icm.tu-bs.de/NICONET/benchmodred.html>].

а) Пример А имеет модель с исходной системой 120 порядка (*cdplayer*). Система имеет 2 входа и 2 выхода. На рис. 1 представлены основные зависимости для минимального и максимального сингулярных чисел для полной и редуцированной моделей. Показана также евклидова норма различия между полной и упрощенной моделями. Количество вычисленных доминирующих полюсов равно 35. Наблюдается хорошее совпадение сингулярных чисел для полной и упрощенной моделей. Различие между полной и упрощенной моделями, представленное евклидовой нормой, достаточно мало.

б) На рис. 2 представлены аналогичные частотные зависимости для примера В, имеющего 3 входа и 3 выхода. Порядок исходной модели равен 240. Пример взят из библиотеки NICONET (the International Space Station (ISS) model). При заданном количестве доминирующих полюсов, равным 40, наблюдается хорошее совпадение сингулярных чисел исходной и редуцированной моделей. Как следствие, получаем малую норму, характеризующую различие передаточных функций исходной и редуцированной моделей.

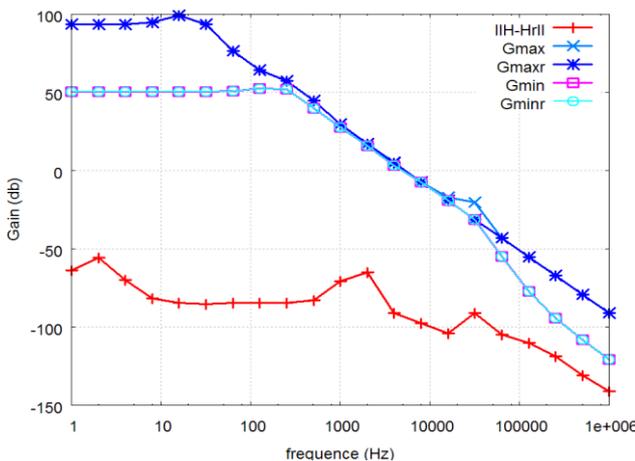


Рис.1. Передаточные функции для минимального и максимального сингулярных чисел и различие передаточных функций полной и упрощенной моделей в форме евклидовой нормы (количество доминирующих полюсов равно 35)

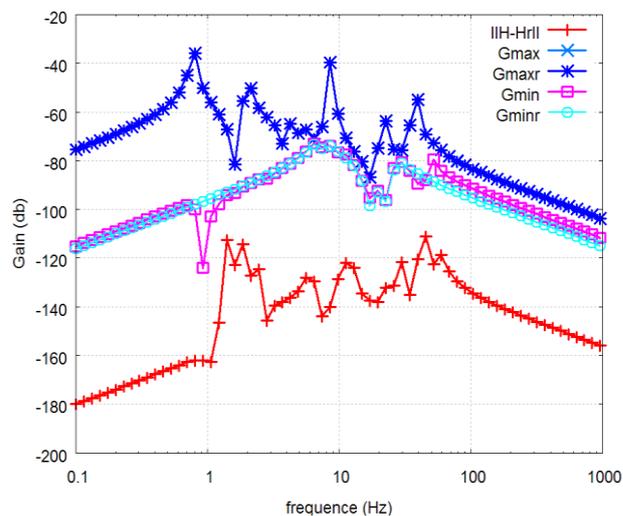


Рис. 2. Передаточные функции для минимального и максимального сингулярных чисел и различие передаточных функций полной и упрощенной моделей в форме евклидовой нормы (количество доминирующих полюсов равно 40)

V. ПРИМЕР ФОРМИРОВАНИЯ РЕДУЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

Ниже для схемотехнического примера из раздела 3, приводятся результаты редукции рассматриваемым алгоритмом. Схема включает 32 связанные информационные шины. Эквивалентная схема для связанных шин показана на рис.3. Каждая из шин представлена 10 секциями из RLC-цепочек. Порядок полной модели равен 993. Схема имеет один вход и один выход. В данном случае входной сигнал подключен к входу первого сегмента первой шины, а выходом является последняя секция второй шины.

Результаты редукции приведены на рис. 4. На рисунке показана передаточная функция для исходной модели, а также величины отклонения характеристик редуцированной модели от исходной модели. Редуцированные модели получены описанным в статье методом и с помощью известной программы PRIMA [7]. Порядок редуцированных моделей одинаков и равен 80. Погрешность редуцированных моделей, полученных различными методами, примерно одинакова. Однако редуцированная модель, полученная с помощью PRIMA, является плотной. Модель, полученная с помощью представленного в работе метода, имеет разреженную структуру, так как редуцированные матрицы являются диагональными. Благодаря разреженной структуре такие редуцированные модели обеспечивают выигрыш вычислительных затрат при дальнейшем моделировании. Сравнение проводилось при расчете в частотной области цепи, включающей операционный усилитель, нагруженный электрической цепью (рис. 3). Эксперимент выполнен для полной и редуцированной моделей. При использовании модели, полученной предлагаемым в работе алгоритмом, достигнуто примерно трёхкратное ускорение по сравнению с моделью того же порядка, но полученной программой PRIMA.

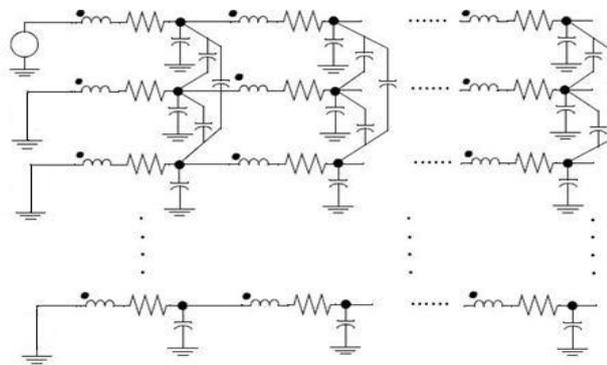


Рис. 3. Электрическая схема модели, состоящей из 32 информационных шин

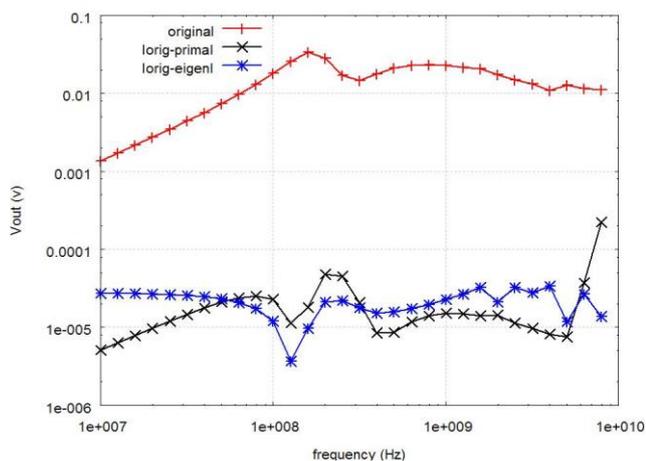


Рис. 4. Результаты редуцирования системы, полученные с помощью программы PRIMA и рассмотренным алгоритмом вычисления доминирующих полюсов

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы модальной редукции являются перспективным направлением решения проблем формализованного формирования упрощенных моделей для схемотехнического проектирования.

Приведенный в статье вычислительный алгоритм из этого класса методов редукции имеет свойство структурной разреженности полученной модели в качестве важного преимущества перед применяемыми в настоящее время алгоритмами. Свойство разреженности обеспечивает вычислительную эффективность применения таких моделей в дальнейших расчетах.

Другим важным отличительным преимуществом рассмотренного алгоритма является его относительная эффективность при редукции моделей многопортовых цепей. При аппроксимации элементов матричной формы многопортовой передаточной функции такая эффективность достигается благодаря введению матричного критерия близости (8) передаточных функций и возможности совмещения вычислительных операций при редукции для разных элементов матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988. 559 с.
- [2] Актуальные проблемы моделирования в системах автоматизации схемотехнического проектирования / под ред. А.Л. Стемпковского. М.: Наука, 2003. 430 с.
- [3] Schilders W.H.A. The Need for Novel Model Order Reduction Techniques in the Electronics Industry // In "Model Reduction for Circuit Simulation", Series: Lecture Notes, in Electrical Engineering (LNEE). Springer. 2011. V. 74. P. 3-23.
- [4] Schilders W.H.A., van der Vorst, H.A., Rommes J.(eds.) Model order reduction: theory, research aspects and applications. Springer: Mathematics in Industry. 2008. V. 13. P. 467.
- [5] Benner P. Numerical linear algebra for model reduction in control and simulation // GAMM Mittlungen. 2006. V. 29. № 2. P. 275-296.
- [6] Benner P, Hinze M., ter Maten E. Jan W.(Editors) Model Reduction for Circuit Simulation // Series. Springer: Lecture Notes in Electrical Engineering (LNEE). 2011. V. 74. P. 315.
- [7] Odabasioglu A., Celik M. and Pileggi L. PRIMA: passive reduced order interconnect macromodeling algorithm // IEEE Trans. CAD. 1998. V. 17. № 8. P. 645-653.
- [8] Phillips J.R., Silveira L.M. Poor man's TBR: a simple model reduction scheme // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2005. V. 24. P. 43-55.
- [9] Rommes J. and Martins N. Efficient computation of multi-variable transfer function dominant poles using subspace acceleration // IEEE Trans. Power Syst. 2006. V. 21. P. 1471-1483.
- [10] Saad Y. and Schultz M. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1986. P. 856-869.
- [11] Martins N., Lima L. T. G., Pinto H. J. C. P. Computing dominant poles of power system transfer functions // IEEE Trans. Power Syst. Feb. 1996. V. 11. № 1. P. 162-170.
- [12] Martins N. and Quintao P. Computing dominant poles of power system multivariable transfer functions // IEEE Trans. Power Syst. 2003. V. 18. № 1. P. 152-159.
- [13] Saad Y. Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems // Math. Comp. 1984. V. 42. № 166. P. 567-588.