

Применение принципа максимума Понтрягина для задачи оптимизации цепей

А.М. Земляк

Автономный университет Пуэбла, Мексика, Пуэбла

Национальный технический университет Украины «КПИ», Украина, Киев, azemliak@mail.ru

Аннотация — Получено решение задачи оптимизации цепи за минимально возможное время процессора на основе принципа максимума Понтрягина. Показано, что изученный ранее эффект ускорения процесса оптимизации совпадает с решением, полученным на основе принципа максимума. Этот факт является теоретическим обоснованием эффекта ускорения. С другой стороны принцип максимума может явиться основой для разработки алгоритма оптимизации электронных цепей с минимальными затратами процессорного времени.

Ключевые слова — проектирование аналоговых цепей, оптимальная стратегия, теория управления, принцип максимума Понтрягина, эффект ускорения процесса оптимизации.

I. ВВЕДЕНИЕ

Одна из основных проблем проектирования электронных систем связана с сокращением чрезвычайно большого процессорного времени необходимого для достижения точки минимума целевой функции процесса оптимизации.

Известны традиционные подходы сокращения необходимого времени анализа системы. Благодаря разреженной структуре матрицы проводимости электронной схемы многие идеи для работы с разреженными матрицами успешно реализованы [1]-[2]. Иной путь уменьшения числа операций для анализа электронных схем связан с идеей декомпозиции [3]-[5]. Переформулировка задачи оптимизации схемы без точного соблюдения законов Кирхгофа была уже предложена в работах [6]-[8]. Более общая постановка задачи проектирования аналоговых цепей была дана в работах [9]-[10]. Было показано, что такой подход позволяет обобщить формулировку задачи проектирования электронной цепи и получить множество различных стратегий оптимизации. В этих работах задача оптимизации цепей сформулирована в терминах теории оптимального управления. При этом процесс оптимизации цепи был обобщен и определен как динамическая управляемая система. В этом случае основным элементом является управляющий вектор,

изменяющий структуру уравнений системы процесса оптимизации. При этом появляется множество стратегий оптимизации, различающихся числом операций и процессорным временем. Введение функции Ляпунова процесса оптимизации [11] позволяет сравнивать различные стратегии оптимизации и выбирать наилучшие из них, имеющие минимальное число операций и процессорное время. В то же время задача поиска оптимальной стратегии и, соответствующей ей оптимальной траектории в пространстве параметров, может быть решена в рамках принципа максимума Понтрягина [12]. Основной сложностью применения принципа максимума является нахождение начальных значений для вспомогательных переменных при решении сопряженной системы уравнений. Применение принципа максимума в случае линейных динамических систем основано на построении итерационного процесса [13]. В случае нелинейных систем не гарантируется сходимость этого процесса, однако применение дополнительных аппроксимирующих процедур [14] позволяет построить последовательность решений, сходящихся к пределу при определенных условиях. В настоящей работе исследуется возможность применения принципа максимума для построения оптимального управляющего вектора и соответствующей ему оптимальной траектории процесса оптимизации. Исследуется пример оптимизации простейшей нелинейной цепи для которой удалось получить аналитическое решение задачи.

II. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация электронной цепи сформулирована как динамическая управляемая система [15], которую можно определить дифференциальными или разностными уравнениями для переменных состояния, а также системой ограничений, которые представляют собой математическую модель электронной цепи.

В случае применения дифференциальной модели система уравнений для переменных состояния принимает вид дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(X, U), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Математическая модель электронной цепи, может быть определена следующими уравнениями:

$$(1 - u_j)g_j(X) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2)$$

где функции $f_i(X, U)$ зависят от используемого метода оптимизации. Например, для градиентного метода оптимизации, функции $f_i(X, U)$ принимают следующий вид:

$$f_i(X, U) = -\frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U), \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (3)$$

$$f_i(X, U) = -u_{i-K} \frac{\delta}{\delta x_i} F(X, U) + \frac{(1 - u_{i-K})}{dt} [-x_i + \eta_i(X)]$$

$$i = K + 1, K + 2, \dots, N, \quad (3')$$

где M есть число зависимых переменных электронной цепи (число узлов схемы), K число независимых переменных, N общее число переменных ($N = K + M$) и t_s итерационный параметр. Функция $F(X, U)$ является обобщенной целевой функцией процесса оптимизации и определена следующим выражением:

$$F(X, U) = C(X) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=1}^M u_j g_j^2(X), \quad (4)$$

где $C(X)$ есть целевая функция процесса оптимизации, а второй член формулы представляет собой дополнительную штрафную функцию. Функция $\eta_i(X)$, записанная в неявном виде, определяет текущее значение переменной x_i^{s+1} ($x_i^{s+1} = \eta_i(X)$), которое находится в результате решения системы (2). Вектор управляющих функций $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, где $u_j \in \Omega$; $\Omega = \{0; 1\}$, является основным инструментом описанной методологии и управляет процессом приведения целевой функции $C(X)$ к минимуму за возможно минимальное процессорное время. При этом каждое новое значение вектора U порождает новую стратегию проектирования и соответствующую ей траекторию в пространстве параметров. Число возможных стратегий оптимизации цепи, определяемое зависящим от времени управляющим вектором U бесконечно, однако множество стратегий, определяющих структурный базис проектирования при векторе U , неизменном в течение процесса проектирования, конечно и равно 2^M . Эти стратегии имеют различное число операций и различное процессорное время.

III. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Рассмотрим применение принципа максимума Понтрягина для решения задачи поиска оптимальной структуры управляющего вектора U при оптимизации простейшей нелинейной цепи делителя напряжения на рис. 1. В этом случае удастся определить решение задачи в закрытой форме, однако требуется численное интегрирование уравнений.

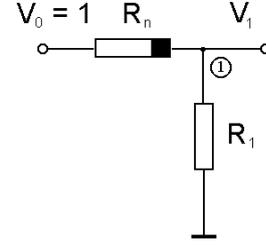


Рис. 1. Простейшая цепь нелинейного делителя напряжения

Будем считать, что нелинейный элемент имеет следующую зависимость:

$$R_n = a + b(V_1 - V_0), \quad (5)$$

где $a > 0$, $b > 0$, $a > b$, V_0 и V_1 напряжения на входе и выходе цепи. Будем считать, что V_0 равно 1. Введем переменные x_1 и x_2 : $x_1 = R$, $x_2 = V_1$. При этом вектор фазовых переменных $X \in R^2$. В этом случае формула (5) может быть заменена выражением:

$$R_n = a + b(x_2 - 1). \quad (6)$$

Уравнение цепи можем представить в виде:

$$g_1(x_1, x_2) \equiv x_2[x_1 + a + b(x_2 - 1)] - x_1 = 0. \quad (7)$$

Оптимизации цепи формулируется как задача получения на выходе цепи требуемого напряжения w . Определим функцию цели процесса оптимизации формулой:

$$C(X) = (x_2 - w)^2. \quad (8)$$

В этом случае задача оптимизации цепи сводится к минимизации целевой функции $C(X)$.

Следуя теоретическим основам, развитым в [15], переформулируем задачу оптимизации цепи с целью отыскания стратегии, реализующей процесс оптимизации за минимально возможное процессорное время. Определим функционал, подлежащий минимизации, следующим выражением:

$$J = \int_0^T f_0(X) dt, \quad (9)$$

где $f_0(X)$ функция, условно определяющая плотность числа арифметических операций в единицу времени t . В таком случае, интеграл (9) определяет общее число операций необходимых для оптимизации цепи и пропорционален полному процессорному времени. Структура функции $f_0(X)$ не может быть определена, однако мы можем подсчитать процессорное время, используя возможности компилятора. В дальнейшем будем отождествлять интеграл (9) с процессорным временем и поэтому задача минимизации процессорного времени соответствует задаче минимизации интеграла (9).

В соответствии с [9] введем управляющий вектор U состоящий, для рассматриваемого примера, из единственной компоненты $u(t)$. Эта компонента принимает одно из двух возможных значений: 0 или 1. Обобщенная функция цели задается формулой (4), где $M=1$. Процесс оптимизации цепи при этом можно описать системой уравнений (10) с ограничениями (11):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, u), \quad i=1, 2, \quad (10)$$

$$(1-u)g_1(x_1, x_2) = 0, \quad (11)$$

где функции $f_i(x_1, x_2, u)$ определяются конкретным численным методом оптимизации. При использовании градиентного метода эти функции определяются следующими формулами:

$$f_i(x_1, x_2, u) = -\frac{\delta}{\delta x_i} F(X), \quad i=1, 2, \quad (12)$$

где оператор $\delta / \delta x_i$ определен выражением:

$$\frac{\delta}{\delta x_i} \sigma(X) = \frac{\partial \sigma(X)}{\partial x_i} + \sum_{p=K+1}^{K+M} \frac{\partial \sigma(X)}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x_i}.$$

Значение $u(t)=0$ соответствует традиционной стратегии оптимизации (ТСО). В этом случае в системе (10) остается лишь одно уравнение для независимой переменной x_1 , в то время как переменная x_2 определяется из уравнения (11). Значение $u(t)=1$ соответствует модифицированной традиционной стратегии оптимизации (МТСО) когда обе переменные x_1 и x_2 являются независимыми. В этом случае система (10) включает два уравнения для независимых переменных x_1 и x_2 , а уравнение (11) исчезает. Впрочем, случай $u(t)=0$ также можно

описать двумя уравнениями типа (10). Изменение значения функции $u(t)$ с 0 на 1 и обратно может быть произведено в любой момент времени, что и порождает множество различных стратегий оптимизации. Две основные стратегии, составляющие структурный базис, определяются следующим образом.

1) ТСО, $u=0$. Уравнения (10)-(12) заменяются следующими уравнениями:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{\partial C}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dx_1}, \quad (13)$$

$$\frac{dx_2(x_1, t)}{dt} = \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt}, \quad (14)$$

где производная dx_2 / dx_1 определяется из уравнения

$$(11), \text{ т.е. } \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{1}{2b} \left[-1 + \frac{x_1 + c + 2b}{\sqrt{(x_1 + c)^2 + 4bx_1}} \right], \text{ где } c=a-b.$$

2) МТСО, $u=1$. Уравнения (10) принимают вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\delta}{\delta x_i} [C(X) + g_1^2(X)], \quad i=1, 2. \quad (15)$$

В общем случае правые части уравнений (10) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, u) &= (1-u) \cdot f_{11}(x_1, x_2) + u \cdot f_{12}(x_1, x_2), \\ f_2(x_1, x_2, u) &= (1-u) \cdot f_{21}(x_1, x_2) + u \cdot f_{22}(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где функции $f_{ij}(x_1, x_2)$ определены следующими формулами:

$$\begin{aligned} f_{11}(x_1, x_2) &= \frac{(w-x_2)}{b} \left[-1 + \frac{x_1 + c + 2b}{\sqrt{(x_1 + c)^2 + 4bx_1}} \right] \\ f_{12}(x_1, x_2) &= -2(x_2-1) \{ (x_2-1)x_1 + [a+b(x_2-1)]x_2 \} \\ f_{21}(x_1, x_2) &= \frac{(w-x_2)}{2b^2} \left[-1 + \frac{x_1 + a + b}{\sqrt{(x_1 + c)^2 + 4bx_1}} \right]^2 \\ f_{22}(x_1, x_2) &= -2 \{ (x_2-w) + (c+x_1+2bx_2) \cdot \\ &\quad \cdot [(x_2-1)x_1 + ax_2 + b(x_2-1)x_2] \}. \end{aligned} \quad (17)$$

В соответствии с методологией принципа максимума Понтрягина система сопряженных уравнений для дополнительных переменных ψ_1, ψ_2 определяется двумя линейными дифференциальными уравнениями и имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= -\frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial x_1} \cdot \psi_1 - \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial x_1} \cdot \psi_2, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= -\frac{\partial f_1(x_1, x_2, u)}{\partial x_2} \cdot \psi_1 - \frac{\partial f_2(x_1, x_2, u)}{\partial x_2} \cdot \psi_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где частные производные функций $f_i(x_1, x_2, u)$, $i=1, 2$ вычисляются на основе формул (17).

Гамильтониан выражается следующей формулой:

$$H = \psi_1 \cdot f_1(x_1, x_2, u) + \psi_2 \cdot f_2(x_1, x_2, u) \quad (19)$$

Подставляя (16) в (19) и делая тождественные преобразования получаем следующее выражение для гамильтониана:

$$H = \psi_1 \cdot f_{11}(x_1, x_2) + \psi_2 \cdot f_{21}(x_1, x_2) + u \cdot \Phi(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2, \psi_1, \psi_2) &= \psi_1 \cdot [f_{12}(x_1, x_2) - f_{11}(x_1, x_2)] \\ &+ \psi_2 \cdot [f_{22}(x_1, x_2) - f_{21}(x_1, x_2)]. \end{aligned}$$

В соответствии с принципом максимума, основное условие для управляющей функции u имеет следующий вид:

$$u = \begin{cases} 0, & \Phi < 0 \\ 1, & \Phi > 0. \end{cases} \quad (21)$$

Поведение управляющей функции $u(t)$, соответствующее принципу максимума определяется также поведением функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, рассчитываемых из уравнений (18). В то же время решение уравнений (18) зависит от начальных значений ψ_{10} и ψ_{20} , которые определены с точностью до общего множителя. Одно из этих значений можно задать произвольно, например $\psi_{10} = -1$. Значение ψ_{20} , соответствующее адекватному решению задачи в условиях принципа максимума, находится итерационной процедурой. Мы используем итерационную процедуру на основе метода Ньютона, что обеспечивает экономию процессорного времени. При положительных начальных значениях переменных x_1 и x_2 , (x_{10} , x_{20}), оптимальной является ТСО ($u=0$). В то же время задание отрицательных

начальных значений для переменной x_2 приводит к существенно иным результатам. Анализ процесса оптимизации для подобного примера, проведенный в работе [16] показал, что в случае отрицательных начальных значений переменной x_{20} , возможно появление специального эффекта ускорения процесса оптимизации, позволяющего на несколько порядков сократить процессорное время оптимизации цепи. Интересным является вопрос, возможно ли получение подобного результата на основе применения принципа максимума Понтрягина? Положительный ответ позволил бы подвести математический базис под ранее полученные результаты, а также открыть новые перспективы.

IV. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 показана траектория процесса оптимизации цепи в фазовом пространстве двух переменных x_1 , x_2 , соответствующая начальной точке ($x_{10} = 0.6$, $x_{20} = 1.5$) и полученная при выполнении основного условия принципа максимума (21).

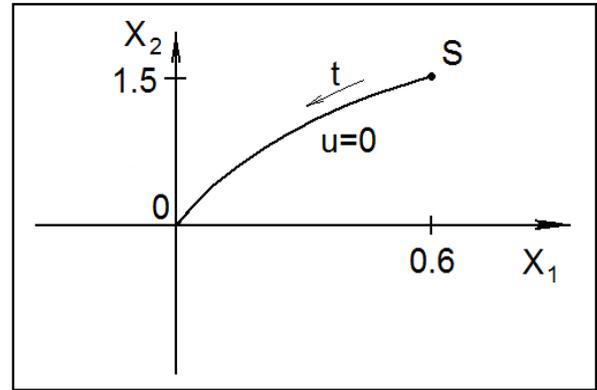


Рис. 2. Траектория процесса оптимизации в фазовом пространстве при $x_{20} = 1.5$

В этом случае оптимальная траектория соответствует ТСО и постоянному значению $u=0$. При этом число итераций равно 3719 и время процессора составляет 20.45 мсек. Изменение начальной точки S при положительных значениях координат x_1 , x_2 не приводит к изменению траектории. Однако, задание отрицательного значения координаты x_2 приводит к существенному изменению решения. На рис. 3 показаны траектории процесса оптимизации цепи, соответствующие начальной точке с отрицательным начальным значением координаты x_{20} ($x_{10} = 0.6$, $x_{20} = -1.5$) для различных значений параметра ψ_{20} .

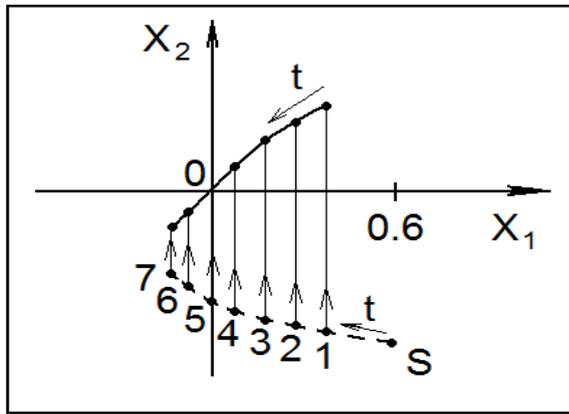


Рис. 3. Траектории процесса оптимизации в фазовом пространстве при $x_{20} = -1.5$

Структура функции $u(t)$, полученная автоматически и отвечающая условию принципа максимума (21), имеет одну точку разрыва, что соответствует переключению с траектории, соответствующей МТСО ($u=1$, пунктирная кривая) на траекторию, соответствующую ТСО ($u=0$, сплошная кривая). Координаты точки переключения t_{sw} зависят от величины ψ_{20} . Данные, соответствующие точкам 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 на рис. 3 приведены в табл. 1.

Таблица 1

Число итераций и процессорное время для различных значений параметра ψ_{20}

N	ψ_{20}	Число итераций	Время (мсек)
1	40.00	3568	19.620
2	30.00	3383	18.613
3	20.00	2790	15.351
4	16.00	1810	9.962
5	14.35	277	1.520
6	10.00	1152	6.310
7	2.00	1887	10.781

Изменение значения ψ_{20} от 40.0 до 14.35 приводит к сокращению числа итераций и процессорного времени от 19.62 msec до 1.520 msec, а затем, к возрастанию, что видно также на рис. 4, где показана зависимость времени решения задачи от начального значения ψ_{20} .

Значение $\psi_{20opt} = 14.35$ является оптимальным и соответствует минимальному процессорному времени T_{min} (минимальному значению интеграла J) и является именно тем начальным значением для переменной $\psi_2(t)$, которое, в соответствии с принципом максимума, обеспечивает максимальное и постоянное значение гамильтониана H .

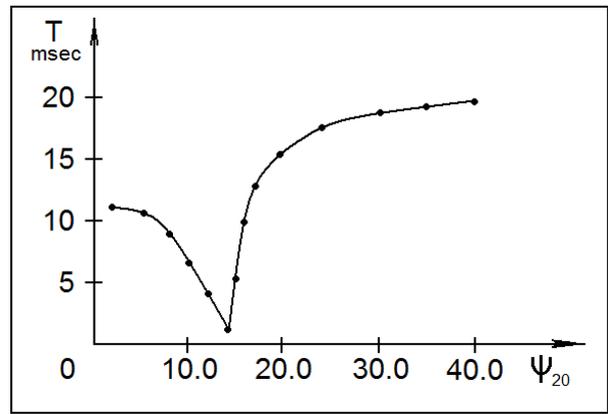


Рис. 4. Время решения задачи как функция параметра ψ_{20}

Выигрыш во времени, рассчитанный как отношение времени для ТСО к минимальному времени T_{min} при этом составляет 13.45 раз. Зависимости функций $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, а также гамильтониана $H(t)$ в этом случае представлены на рис. 5.

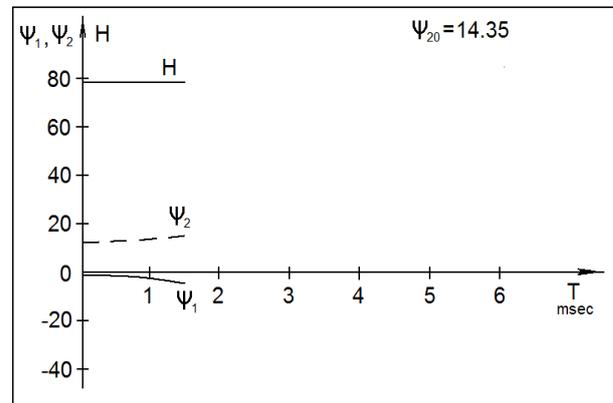


Рис. 5. Зависимости вспомогательных переменных $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$, а также гамильтониана $H(t)$ при оптимальном выборе параметра ψ_{20}

Гамильтониан в этом случае является константой, что соответствует принципу максимума. Интересно проанализировать поведение этих функций при неоптимальном значении параметра ψ_{20} .

Зависимости переменных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и $H(t)$ при неоптимальных значениях параметра ψ_{20} представлены на рис. 6 и рис. 7.

Видно, что при отклонении точки переключения от оптимальной, значение гамильтониана изменяется со временем. Этот критерий может явиться основным при практическом поиске оптимальной структуры управляющего вектора U .

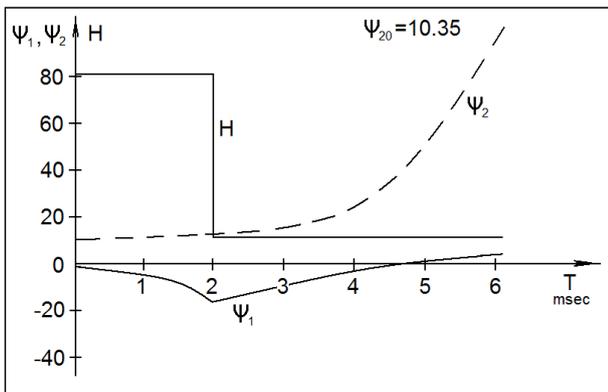


Рис. 6. Зависимости вспомогательных переменных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, и гамильтониана $H(t)$ при $\psi_{20} < \psi_{20opt}$

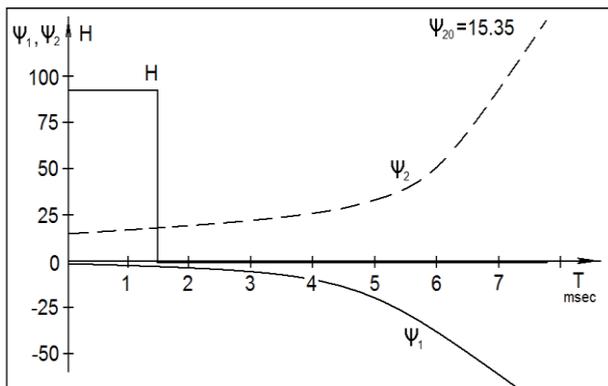


Рис. 7. Зависимости вспомогательных переменных $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, и гамильтониана $H(t)$ при $\psi_{20} > \psi_{20opt}$

Анализ процесса оптимизации рассмотренной цепи показал, что применение принципа максимума действительно позволяет найти оптимальную структуру управляющей функции $u(t)$, посредством итерационной процедуры. Критерием окончания процедуры является неизменное значение гамильтониана. При этом наблюдается значительное сокращение процессорного времени по сравнению с традиционным подходом.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют утверждать, что поиск оптимальной стратегии проектирования цепей может быть произведен на основе принципа максимума Понтрягина. Этот принцип является математическим обоснованием разработанной ранее теории оптимального проектирования. В то же время принцип максимума может явиться практическим

инструментом при построении оптимального алгоритма проектирования.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Osterby O., Zlatev Z. Direct methods for sparse matrices. - N.Y.: Springer-Verlag, 1983.
- [2] George A. On block elimination for sparse linear systems // SIAM J. Numer. Anal. - 1984. - V. 11. - № 3. - P. 585 – 603.
- [3] Wu F.F. Solution of large-scale networks by tearing // IEEE Transactions on Circuits and Systems - 1976. - V. 23. - № 12. - P. 706 – 713.
- [4] Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.K., Chua L.O. An efficient cluster algorithm for tearing large-scale networks // IEEE Transactions on Circuits and Systems - 1977. - V. 24. - № 12. - P. 709 – 717.
- [5] Ruehli A., Sangiovanni-Vincentelli A., Rabbat G. Time analysis of large-scale circuits containing one-way macromodels // IEEE Transactions on Circuits and Systems - 1982. - V. 29. - № 3. - P. 185 – 191.
- [6] Каширский И.С., Трохименко Я.К. Обобщенная оптимизация электронных схем. - Киев: Техника, 1979.
- [7] Rizzoli V., Costanzo A., Cecchetti C. Numerical optimization of broadband nonlinear microwave circuits // IEEE MTT-S International Symposium - 1990. - V. 1. - P. 335 – 338.
- [8] Ochotta E.S., Rutenbar R.A., Carley L.R. Synthesis of high-performance analog circuits in ASTRX/OBLX // IEEE Transactions on CAD. - 1996. - V. 15. - № 3. - P. 273 – 294.
- [9] Zemliak A.M. Analog system design problem formulation by optimum control theory // IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences. - 2001. - V. E84A. - № 8. - P. 2029 – 2041.
- [10] Земляк А.М. Проектирование аналоговых цепей методами теории управления // Изв. высш. учеб. заведений Радиоэлектроника. - 2004. - Т. 47. - № 5. - С. 18 – 28.
- [11] Zemliak A. Analysis of the Lyapunov Function Characteristics for the Minimal-Time Design Strategy // WSEAS Transactions on Circuits and Systems. - 2007. - V. 6. - № 1. - P. 110 – 116.
- [12] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. & Mishchenko, E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. - N.Y.: Interscience Publishers, Inc., 1962.
- [13] Rosen J.B. Iterative Solution of Nonlinear Optimal Control Problems // J. SIAM, Control Series A. - 1966. - P. 223-244.
- [14] Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. Москва: Наука, 1978.
- [15] Земляк А.М. Анализ динамических характеристик процесса проектирования аналоговых цепей. // Изв. высш. учеб. заведений Радиоэлектроника. - 2007. - Т. 50. - № 11. - С. 26 – 35.
- [16] Zemliak A.M. Acceleration Effect of System Design Process // IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences. - 2002. - V. E85-A. № 7. - P. 1751-1759.

Application of the Pontryagin maximum principle for a problem of circuit optimization

A.M. Zemliak

Autonomous University of Puebla

National Technical University of Ukraine "KPI", azemliak@mail.ru

Keywords — design of analog circuits, optimal strategy, theory of control, Pontryagin maximum principle, acceleration effect of the optimization process.

ABSTRACT

The possibility of application of the maximum principle for creation of the optimal control vector and the optimal trajectory for circuit optimization process is investigated. The example of optimization of a simple nonlinear circuit, for which the analytical solution of the problem was obtained, is analyzed. The solution of a problem of circuit optimization for minimum CPU time is obtained on the basis of the Pontryagin maximum principle.

The analysis of the process of optimization for a similar example, which was carried out earlier, has shown that, in case of negative initial values of some variables, the emergence of special effect of acceleration of the optimization process, which reduces the CPU time for circuit optimization by several orders of magnitude, is possible. The question, whether it is possible to obtain similar result on the basis of application of the Pontryagin maximum principle remained open during a long time. The affirmative answer would allow to underpin a mathematical basis under earlier obtained results, and also to open new prospects. In the paper it is shown that the effect of acceleration of optimization process that was studied earlier coincides with the solution obtained on the basis of the maximum principle. This fact is the theoretical justification of the effect of acceleration. On the other hand the maximum principle can be a basis for development of optimization algorithm for electronic circuits with the minimum expenses of CPU time.

The analysis of the optimization process of the circuit under investigation has shown that the maximum principle really allows one to find the optimum structure of the control function $u(t)$ by means of the iterative procedure. The criterion for the end of the procedure is the constancy of the Hamiltonian value. At the same time, the considerable reduction of CPU time in comparison with traditional approach is observed. The obtained results allow us to claim that search of optimal strategy of a circuit design can be run on the basis of the Pontryagin maximum principle. This principle is a mathematical justification of the theory of optimum design developed earlier. At the

same time, the maximum principle can be the practical tool at creation of the optimum algorithm of circuit design.

REFERENCES

- [1] Osterby O., Zlatev Z. Direct methods for sparse matrices. N.Y., Springer-Verlag, 1983.
- [2] George A. On block elimination for sparse linear systems. SIAM J. Numer. Anal., 1984. vol. 11, no. 3, pp. 585-603.
- [3] Wu F.F. Solution of large-scale networks by tearing. IEEE Trans. Circuits Syst. 1976, vol. 23, no. 12, pp. 706-713.
- [4] Sangiovanni-Vincentelli A., Chen L.K., Chua L.O. An efficient cluster algorithm for tearing large-scale networks. IEEE Trans. Circuits Syst., 1977, vol. 24, no. 12. pp. 709-717.
- [5] Ruehli A., Sangiovanni-Vincentelli A., Rabbat G. Time analysis of large-scale circuits containing one-way macromodels. IEEE Trans. Circuits Syst., 1982, vol. 29. no. 3. pp. 185-191.
- [6] Kashirsky I.S., Trokhimenko Y.K. Obobshchennaya optimizatsiya elektronnykh skhem. Kiev, Tekhnika, 1979 (in Russian).
- [7] Rizzoli V., Costanzo A., Cecchetti C. Numerical optimization of broadband nonlinear microwave circuits. IEEE MTT-S Int. Symp., 1990, vol. 1, pp. 335-338.
- [8] Ochotta E.S., Rutenbar R.A., Carley L.R. Synthesis of high-performance analog circuits in ASTRX/OBLX. IEEE Trans. on CAD, 1996, vol. 15, no. 3, pp. 273-294.
- [9] Zemliak A.M. Analog system design problem formulation by optimum control theory. IEICE Trans. on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2001, vol. E84A, no. 8, pp. 2029-2041.
- [10] Zemliak A.M. Proektirovanie analogovykh tsepei metodami teorii upravleniya. Izv. VUZ Radioelektronika, 2004, vol. 47, no. 5, pp. 18-28 (in Russian).
- [11] Zemliak A. Analysis of the Lyapunov Function Characteristics for the Minimal-Time Design Strategy. WSEAS Transactions on Circuits and Systems, 2007, vol. 6, no. 1, pp. 110-116.
- [12] Pontryagin, L.S., Boltyanskii, V.G., Gamkrelidze, R.V. Mishchenko, E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y., Interscience Publishers, Inc., 1962.
- [13] Rosen J.B. Iterative Solution of Nonlinear Optimal Control Problems. J. SIAM, Control Series A, 1966, pp. 223-244.
- [14] Fedorenko R.P. Priblizhennoe reshenie zadach optimalnogo upravleniya. Moscow, Nauka, 1978. (in Russian).
- [15] Zemliak A.M. Analiz dinamicheskikh kharakteristik protsessa proektirovaniya analogovykh tsepei. Izv. VUZ Radioelektronika, 2007, vol. 50, no. 11, pp. 26-35 (in Russian).
- [16] Zemliak A.M. Acceleration Effect of System Design Process. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 2002, vol. E85-A. no. 7, pp. 1751-1759.