УДК 517.518.85:517.443

Особенности преобразования гармонического сигнала ограниченной длительности по теореме отсчетов

Г.С. Ханян

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, khanyan@rtc.ciam.ru

Аннотация **— Работа посвящена исследованию теоремы отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона как инструмента преобразования базового объекта фурье-анализа – гармонического сигнала ограниченной длительности, априори не удовлетворяющего условиям теоремы. Показана многозначность результата преобразования, выявлены побочные эффекты – смещение и наложение частот, исчезновение сигнала. Получены формулы, определяющие границы применимости теоремы.**

Ключевые слова **— фурье-анализ, цифровая реализация сигнала, индекс частотной полосы, логическая дельта-функция, наложение ветвей.**

I. Введение

Теорема отсчетов на протяжении более чем восьми десятилетий остается предметом интереса в области теории информации и ее приложений.

Существует обширная литература по этой теме, полный обзор которой не представляется возможным, поэтому ограничимся кратким списком работ классиков [1-3], обобщением теоремы на случай неравномерной дискретизации [4] и сборником трудов по современным методам ее анализа [5].

Исследования автора в этой области [6, 7] отличаются особым подходом в раскрытии математической эстетики соотношений фурье-анализа, одним из разделов которого и является теорема отсчетов. Применяемый метод доказательства теоремы является прямым – в формулу интерполяции отсчетов подставляется цифровая реализация гармонического сигнала, и в процессе анализа полученного результата преобразования естественным образом вытекают условия применимости теоремы и эффекты, их нарушающие. Именно при таком подходе абстрактный параметр G в ядре преобразования приобретает смысл индекса частотной полосы, в которой должен находиться сигнал, восстанавливаемый по своим отсчетам, и в которую, как выясняется, попадает результат интерполяции сигнала из другой частотной полосы. Многие авторы поступают наоборот: сначала выдвигают предположения о природе сигнала (о финитности его спектра, периодичности и т.п.), затем применяют теорему Планшереля о свертке для доказательства собственно теоремы отсчетов. Естественно, что такие явления, как открытые в настоящей работе эффекты удвоения и обнуления сигнала, остаются за рамками ожидаемых результатов.

Целью работы является также демонстрация эффективности применяемого математического аппарата – симбиоза тригонометрии с операциями взятия целой и дробной части числа $x = [x] + \{x\}$, с обобщением символа Кронекера – «логической» дельта-функции Δ_B, равной 1 при истинности булевой переменной B, и 0 – при ее ложности, с приемами решения систем и совокупностей неравенств и пр.

II. Постановка задачи

Рассмотрим сигнал $s(t)$ ограниченной длительности T, дискретизованный с частотой F так, что его цифровая реализация $s_k \equiv s(t_k)$ представляет собой последовательность $N = FT$ отсчетов, полученных в равноотстоящие моменты времени $t_k = t_0 + k/F$; $k = 0, 1, \dots, N\text{-}1$ с произвольным началом t_0.

Одним из способов цифровой обработки числовых данных s_k является преобразование

$$s'_{n+\nu} = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \frac{\sin \pi(G+1)(n+\nu-k) - \sin \pi G(n+\nu-k)}{N \sin \pi(n+\nu-k)/N} \quad (1)$$

с параметром G, переводящее последовательность s_k в функцию $s'(t) \equiv s'(t_{n+\nu}) \equiv s'_{n+\nu}$ непрерывного времени t, задаваемого двумя переменными – целочисленным номером отсчета n и дробной добавкой ν к нему: $t \equiv t_{n+\nu} = t_0 + (n+\nu)/F$; $n = 0,1,\dots,N\text{–}1$; $0 \le \nu < 1$; $t_0 \le t < t_0 + T$.

Основной теоретический вопрос состоит в том, при каких ограничениях на функцию $s(t)$ и параметр ядра G преобразование (1) является тождественным: $s'(t) = s(t)$. В прикладном аспекте вопрос этот задается в двух разделах: в вычислительной математике – как задача интерполяции, в задачах кодирования и передачи сигналов, в радиотехнике и т.п. – как теорема отсчетов. Ответу на этот вопрос с обеих точек зрения были посвящены две предыдущие работы автора. В работе [6] было проведено строгое доказательство теоремы отсчетов для сигнала ограниченной длительности при $G \ge 0$, в работе [7] путем численного моделирования были исследованы интерполирующие свойства преобразования (1) при $G = 0$. В настоящей работе вопрос ставится шире: во что преобразуется сигнал, необязательно отвечающий условиям теоремы? Единственным предположением о природе сигнале является то, что он представляет собой суперпозицию гармонических колебаний, поэтому, в силу линейности преобразования (1), достаточно исследовать его воздействие на гармонический сигнал

$$s(t) = a\cos(2\pi f t + \varphi); \quad a > 0; \quad f \geq 0; \quad -\pi < \varphi \leq \pi \qquad (2)$$

с амплитудой a, частотой f и начальной фазой φ.

Нетрудно показать, что преобразование (1) остается инвариантным при замене G на $|G+1/2|-1/2$. Это означает, что «критическим» (центральным) значением индекса G является не его «классическое» значение $G = 0$, а полуцелое число $G = -1/2$, поэтому достаточно исследовать свойства преобразования (1) при $G \geq -1/2$.

III. Вычисление преобразования

Ключевой операцией вычисления преобразования (1) является суммирование конечной геометрической прогрессии со знаменателем q, представимым или не представимым в виде корня N-й степени из единицы:

$$\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^N}{1-q}, & q \neq e^{i2\pi K/N} \\ N \sum\limits_{I=-\infty}^{+\infty} \Delta_{K=IN}, & q = e^{i2\pi K/N} \end{cases}, \qquad (3)$$

где $K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ пробегает всё множество целых чисел в верхней части формулы, но принимает заданное значение из этого множества в ее нижней части.

Второй случай этой формулы, благодаря наличию дельта-функции, обещающей упрощение громоздких выкладок, диктует стремление к составлению некоторого целочисленного выражения K из параметров сигнала (2) и ядра преобразования (1). Однако для того чтобы свести правую часть (1) к сумме комплексных экспонент q^k, необходимо избавиться от тригонометрического знаменателя в ядре преобразования. Сделать это можно, лишь предположив, что GN – целое число. Искомую форму правая часть (1) приобретает путем введения двузначных индексов суммирования j и J для слагаемых формулы Эйлера и индекса L для нумерации синусоид в числителе ядра:

$$\begin{gathered} s'_{n+\nu} = \frac{a}{4N} \sum_{j=\pm 1} \sum_{J=\pm 1} \sum_{L=\Delta_{G=0}}^{\Delta_{G\neq -1}} (-1)^{L+1} \operatorname{sgn}(G+L) \times \\ \times \sum_{k=0}^{N-1} e^{ij(2\pi f t_k + \varphi)} \sum_{l=0}^{N|G+L|-1} e^{i2\pi J(l-(N|G+L|-1)/2)(n+\nu-k)/N} \end{gathered}. \qquad (4)$$

В самом деле, если просуммировать экспоненты в (4) по верхней формуле (3) и перейти обратно к тригонометрическим функциям, то мы вернемся к (1). Чтобы избежать такой тавтологии, нужно обязательно поменять в (4) порядок суммирования по индексам k и l:

$$\begin{gathered} s'_{n+\nu} = \frac{a}{4N} \sum_{j=\pm 1} \sum_{J=\pm 1} e^{ij(2\pi f t_0 + \varphi)} \sum_{L=\Delta_{G=0}}^{\Delta_{G\neq -1}} (-1)^{L+1} \operatorname{sgn}(G+L) \times \\ \times \sum_{l=0}^{N|G+L|-1} e^{i2\pi J \frac{l-(N|G+L|-1)/2}{N}(n+\nu)} \sum_{k=0}^{N-1} e^{i2\pi \frac{jfT + JN|G+L|/2 - J/2 - Jl}{N} k} \end{gathered}. \qquad (5)$$

Используем теперь второй случай формулы (3) для вычисления суммы по k в (5), отведя роль параметра K числителю в показателе экспоненты:

$$K = jfT + JN|G+L|/2 - J/2 - Jl. \qquad (6)$$

В результате вычисления сумма по k превращается в Δ-функцию, оставляющую в сумме по l единственное слагаемое с номером $l = jJfT + (N|G+L|-1)/2 - IJN$, определяемое из (6), и образуется другая Δ-функция, указывающая диапазон изменения l в сумме (5) по l:

$$\begin{gathered} s'_{n+\nu} = \frac{a}{4} \sum_{I=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=\pm 1} \sum_{J=\pm 1} \sum_{L=\Delta_{G=0}}^{\Delta_{G\neq -1}} (-1)^{L+1} \operatorname{sgn}(G+L) \times \\ \times e^{ij(2\pi f t + \varphi) - i2\pi IF(t-t_0)} \Delta_{0 \leq l \leq N|G+L|-1} \end{gathered}. \qquad (7)$$

Подставив это l в (7) и произведя суммирование по j, J, L, приходим к окончательному результату

$$s'_{n+\nu} = \sum_{I=-\infty}^{+\infty} s^I_{n+\nu} D_I, \qquad (8)$$

$$s^I_{n+\nu} = a\cos(2\pi(f + IF)t_{n+\nu} + (\varphi - 2\pi IFt_0)), \qquad (9)$$

$$\begin{gathered} D_I = \Delta_{|fT+IN| \leq (N|G+1|-1)/2} \operatorname{sgn}(G+1) - \\ - \Delta_{|fT+IN| \leq (N|G|-1)/2} \operatorname{sgn} G, \end{gathered} \qquad (10)$$

означающему разложение преобразованного сигнала (1) в бесконечный ряд (8) по копиям (9) преобразуемого сигнала (2), смещенным по частоте на IF и по фазе на $-2\pi IFt_0$. Назовем I-е слагаемое ряда (8) I-й ветвью преобразованного сигнала – термином, заимствованным из теории многозначных функций. Весовой множитель (10) при смещенном сигнале (9) в разложении (8) назовем индикатором ветви. Это композиция логических дельта-функций, указывающая частотный диапазон существования ветви.

Отмеченные выше требования целочисленности GN и K накладывают установленные в [1] ограничения на параметры преобразования (1) и сигнала (2):

$$\mu = \left\{ \frac{N(|G| + \operatorname{sgn} G + 1) + 1}{2} \right\}, \quad G(G+1)\left\{ \frac{N}{2} \right\} = \{GN\} = 0. \qquad (11)$$

Это значит, во-первых, что разрешены лишь квантованные с шагом $1/N$ значения индекса полосы:

$$G = g + \gamma; \quad g \equiv [G] = 0, \pm 1, \ldots; \quad \gamma \equiv \{G\} = 0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}. \qquad (12)$$

Во-вторых, число отсчетов N может быть любым только в классической формулировке теоремы – при $G = 0$ и $G = -1$ (для других значений G – N четно). В-третьих, дробная часть $\mu = \{fT\}$ безразмерной частоты сигнала fT может принимать лишь одно из двух значений: $\mu = 0$ или $\mu = 1/2$, в то время как целая часть $m = [fT]$ может быть и четным, и нечетным числом.

IV. Исследование наложения ветвей

Формулы (8)-(10) описывают преобразованный сигнал весьма неопределенным образом. Причина кроется в том, что смещенная частота сигнала $|fT+IN|$ заключена в модульные скобки, и для некоторой ветви I' вполне возможно существование «зеркальной» ветви I'', интервал определения которой пересекается с интервалом определения I'. В спектральном анализе это явление называется наложением частот.

Для облегчения анализа наложения ветвей (который, как наметили выше, проведем для $G \ge -1/2$) удобно иметь дело не с безразмерной частотой $m+\mu = fT$, а с безразмерной частотой $p = f/F$, учитывая при этом, где необходимо, что эта переменная – дискретная с шагом $1/N$. Для «баланса» размерностей введем безразмерное время $q = Ft$, и тогда сигнал (9) примет вид:

$$s^I_{n+\nu} = a\cos(2\pi p q_{n+\nu} + \varphi + 2\pi I \nu)\,, \tag{13}$$

а логический индикатор (10) после деления всех неравенств на N будет (с границами P_0 и P_1) выглядеть так:

$$\begin{aligned} &D_I = (1-\operatorname{sgn} G)\Delta_{|p+I|\le P_0} + \Delta_{P_0<|p+I|\le P_1};\\ &P_0 = (|G|-1/N)/2, \quad P_1 = (G+1-1/N)/2. \end{aligned} \tag{14}$$

Область наложения ветвей I' и I'' должна с необходимостью определиться из системы неравенств

$$D_{I'} \ne 0, \quad D_{I''} \ne 0\,, \tag{15}$$

которую целесообразно решать отдельно для каждой из Δ-функций (14) – в интервалах постоянства знака G.

A. Положительный индекс $G > 0$

Поскольку $\operatorname{sgn} G = 1$, то в роль вступает правая Δ-функция в (14), где $P_0 = (G-1/N)/2 \ge 0$, $P_1 = P_0 + 1/2$, и задача сводится к системе неравенств

$$\begin{cases} \Delta_{P_0<|p+I'|\le P_1} = 1 \\ \Delta_{P_0<|p+I''|\le P_1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 < |p+I'| \le P_1 \\ P_0 < |p+I''| \le P_1 \end{cases}. \tag{16}$$

Очевидно, что если одно из подмодульных выражений равно 0, то система (16) несовместна, поэтому начнем анализ наложения с рассмотрения ситуаций $j = \pm 1$, когда оба выражения одновременно положительны ($j = 1$ или одновременно отрицательны ($j = -1$):

$$\begin{cases} P_0 - jI' < jp \le P_1 - jI' \\ P_0 - jI'' < jp \le P_1 - jI'' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 - jI' < jp \le P_1 - jI'' \\ P_0 - jI'' < jp \le P_1 - jI' \end{cases}. \tag{17}$$

Для получения содержательного результата мы поменяли местами правые части двойных неравенств левой системы (17). Такой обмен можно сделать по правилам булевой алгебры: каждое двойное неравенство есть логическое произведение $A_1 \wedge A_2$ его левой A_1 и правой A_2 частей, а система двух таких неравенств – логическое выражение $(A_1 \wedge A_2) \wedge (B_1 \wedge B_2)$, которое в силу коммутативности и дистрибутивности произведения можно записать и как систему $(A_1 \wedge B_2) \wedge (B_1 \wedge A_2)$.

Согласование границ двойных неравенств правой системы (17) – левая граница должна уступать правой – приводит, с учетом целочисленности номеров I' и I'', к тривиальному совпадению ветвей:

$$\begin{cases} P_0 - jI' < P_0 + 1/2 - jI'' \\ P_0 - jI'' < P_0 + 1/2 - jI' \end{cases} \Leftrightarrow |j(I'-I'')| < 1/2 \Leftrightarrow I' = I''\,. \tag{18}$$

Таким образом, когда оба подмодульных выражения одновременно неположительны или одновременно неотрицательны, наложение ветвей отсутствует.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда подмодульные выражения имеют разные знаки (одно из них – положительно, другое – отрицательно):

$$\begin{cases} P_0 < j(p+I') \le P_1 \\ P_0 < -j(p+I'') \le P_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_0 - jI' < jp < -P_0 - jI'' \\ -P_1 - jI'' \le jp \le P_1 - jI' \end{cases}. \tag{19}$$

Согласование границ в правой системе (19) приводит (в силу универсального неравенства $x-1 < [x] \le x$) к следующей взаимосвязи I' и I''

$$\begin{cases} 2P_1 - 1 < j(I'-I'') \\ j(I'-I'') \le 2P_1 \end{cases} \Leftrightarrow j(I'-I'') = [2P_1]\,, \tag{20}$$

учитывая которую, придаем левой системе (19) форму:

$$\begin{cases} P_0 < j(p+I') \le P_1 \\ [2P_1] - P_1 \le j(p+I') < [2P_1] - P_0 \end{cases}. \tag{21}$$

В обоих неравенствах этой системы левая граница меньше правой, и к тому же, неотрицательна. Это позволяет объектом сравнения в (21) считать $|p+I'|$ вместо $j(p+I')$, и, подставив в эту формулуP_0 и P_1, представить ее в виде:

$$\begin{cases} (g+\gamma-1/N)/2 < |p+I'| \le (g+\gamma+1-1/N)/2 \\ (g-\gamma-1+1/N)/2 + \operatorname{sgn}\gamma \le |p+I'| < (g-\gamma+1/N)/2 + \operatorname{sgn}\gamma \end{cases}.$$

Раскроем модульные скобки в обоих неравенствах этой системы, добавим ко всем частям $\pm g/2$, и, учитывая дискретность безразмерной частоты p с шагом $1/N$, сделаем все возникающие неравенства нестрогими:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} (\gamma+1/N)/2 \le |p+I'| - g/2 \le (\gamma+1-1/N)/2 \\ -(\gamma+1-1/N)/2 \le -|p+I'| + g/2 \le -(\gamma+1/N)/2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \operatorname{sgn}\gamma - (\gamma+1-1/N)/2 \le |p+I'| - g/2 \le \operatorname{sgn}\gamma - (\gamma+1/N)/2 \\ (\gamma+1/N)/2 - \operatorname{sgn}\gamma \le g/2 - |p+I'| \le (\gamma+1-1/N)/2 - \operatorname{sgn}\gamma \end{array}\right. \end{cases}.$$

В соответствии со знаком смещенной частоты $p+I'$ мы снова заключили эту величину в модульные скобки, после чего выяснилось, что нижние неравенства в обеих совокупностях полученной системы представляют собой не что иное, как переориентированные верхние неравенства. Вычитая из всех частей этих неравенств 1/2, получаем:

$$\begin{cases} (\gamma-1+1/N)/2 \le |p+I'| - (g+1)/2 \le (\gamma-1/N)/2 \\ \operatorname{sgn}\gamma + (1/N-\gamma)/2 - 1 \le |p+I'| - (g+1)/2 \le \operatorname{sgn}\gamma - (\gamma+1+1/N)/2 \end{cases}. \tag{22}$$

Пусть $\gamma = 0$. Система (22), очевидно, несовместна:

$$\begin{cases}-1/2+1/N/2\le |p+I'|-g/2-1/2\le -1/N/2\\ 1/N/2-1\le |p+I'|-g/2-1/2\le -1/2-1/N/2\end{cases}. \qquad (23)$$

Допустим теперь, что $0<\gamma<½$. Сравним границы:

$$\begin{cases}(\gamma-1+1/N)/2<1+(1/N-\gamma)/2-1\Leftrightarrow\gamma<1/2\\ (\gamma-1/N)/2<1-(\gamma+1+1/N)/2\Leftrightarrow\gamma<1/2\end{cases}.$$

Мы получили из (22) следствие $\gamma<1/2$, подтверждающее наше допущение о γ, и можем (с учетом $g+1=-[-G]$) привести (22) к двойному неравенству

$$-(\gamma-1/N)/2\le |p+I'|+[-G]/2\le(\gamma-1/N)/2. \qquad (24)$$

Ясно, что сравнение границ в случае $½\le\gamma<1$ приведет к следствию $\gamma\ge 1/2$, и система (22) запишется как

$$(\gamma-1+1/N)/2\le |p+I'|+[-G]/2\le(1-\gamma-1/N)/2. \qquad (25)$$

Левые и правые части неравенств (24) и (25) равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, что позволяет записать их в однонаправленной форме:

$$\left[\begin{array}{ll}\big||p+I'|+[-G]/2\big|\le(\gamma-1/N)/2, & 0<\gamma<1/2\\ \big||p+I'|+[-G]/2\big|\le(1-\gamma-1/N)/2, & \gamma\ge 1/2\end{array}\right.. \qquad (26)$$

Нетрудно показать, что выражение $1/2-|\gamma-1/2|$ равно γ при $\gamma<½$, и $1-\gamma$ при $\gamma\ge½$, что позволяет записать совокупность (26) в виде единого неравенства

$$\big||p+I'|+[-G]/2\big|\le(1/2-|\{G\}-1/2|-1/N)/2, \qquad (27)$$

описывающего условие наложения ветви I'' на ветвь I'.

К условию (27) следует добавить вытекающую из (20) формулу $|I'-I''|=[2P_1]=-[-G]$, выражающую связь между ветвями и позволяющую записать левую часть (27) в виде $\big||p+I'|-|I'-I''|/2\big|=\big||p+I'|-|(p+I')-(p+I'')|/2\big|$. Учитывая, что (20) было выведено для случая, когда знаки смещенных частот $p+I'$ и $p+I''$ противоположны, заменяем в итоговом выражении модульные скобки на круглые: $|(p+I')-((p+I')-(p+I''))/2|=|p+(I'+I'')/2|$, и тогда условие наложения (27) приобретает симметричную относительно номеров ветвей форму:

$$\begin{cases}|I'-I''|=-[-G]\\ |p+(I'+I'')/2|\le(1/2-|\{G\}-1/2|-1/N)/2\end{cases}. \qquad (28)$$

Условия (27)-(28) получены для $\gamma>0$. Если формально положить в них $\gamma=0$, то оба неравенства не будут выполняться (из-за отрицательности правой части при неотрицательности левой части), что согласуется с отрицательным результатом (23), полученным непосредственно. Это означает, что условия (27)-(28) распространяются на все значения $0\le\gamma<1$ и, следовательно, охватывают все значения $G>0$.

B. Классический индекс полосы G = 0

В этом случае из (14) видно, что $P_0<0$, $0\le P_1<1/2$ и (15) сводится к системе

$$\begin{cases}-P_1\le p+I'\le P_1\\ -P_1\le p+I''\le P_1\end{cases}\Leftrightarrow |I'-I''|\le 2P_1<1\Leftrightarrow I'=I'',$$

согласование границ которой так же, как и в (18), привело к совпадению номеров ветвей.

Таким образом, в классической формулировке теоремы проблема наложения частот отсутствует, что всегда было известно «по умолчанию». Это позволяет распространить условия (27)-(28) на все неотрицательные значения индекса полосы $G\ge 0$.

C. Отрицательный индекс G < 0

Индикатор (14) представляет собой выражение

$$\begin{array}{l}D_I=2\Delta_{|p+I|\le P_0}+\Delta_{P_0<|p+I|\le P_1}\\ P_0=-(G+1/N)/2,\ \ P_1=(G+1-1/N)/2\end{array}, \qquad (29)$$

в котором фигурируют две логические дельта-функции, области определения которых не пересекаются. Поэтому возможны три случая наложения частот – по числу сочетаний одновременного неравенства нулю этих дельта-функций для ветвей I' и I'':

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_{|p+I'|\le P_0}=\Delta_{|p+I''|\le P_0}=1\\ \Delta_{|p+I'|\le P_0}=\Delta_{P_0<|p+I''|\le P_1}=1\\ \Delta_{P_0<|p+I'|\le P_1}=\Delta_{P_0<|p+I''|\le P_1}=1\end{array}\right.. \qquad (30)$$

Рассмотрим два случая раскрытия модульных скобок в (30): когда $p+I'$ и $p+I''$ одновременно либо неотрицательны, либо неположительны, и когда у них разные знаки.

В первом случае сочетания знаков, введя, как для (21), индикатор знака $j=\pm1$ и применив, как в (17), перестановку правых частей неравенств, имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le j(p+I')\le P_0\\ 0\le j(p+I'')\le P_0\end{cases}\\ \begin{cases}0\le j(p+I')\le P_0\\ P_0<j(p+I'')\le P_1\end{cases}\\ \begin{cases}P_0<j(p+I')\le P_1\\ P_0<j(p+I'')\le P_1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-jI'\le P_0-jI''\\ -jI''\le P_0-jI'\end{cases}\Leftrightarrow |I''-I'|\le P_0\\ \begin{cases}-jI'\le P_1-jI''\\ P_0-jI''<P_0-jI'\end{cases}\Leftrightarrow 0<j(I''-I')\le P_1\\ \begin{cases}P_0-jI'<P_1-jI''\\ P_0-jI''<P_1-jI'\end{cases}\Leftrightarrow |I''-I'|<P_1-P_0\end{array}\right.. \qquad (31)$$

Подставив в (31) значения границ P_0 и P_1 из (29), и произведя оценку правых границ неравенств сверху (с учетом диапазона индекса $-1/2\le G<0$), получаем:

$$\left[\begin{array}{l}0\le |I''-I'|\le(-G-1/N)/2\le(1/2-1/N)/2<1/4\\ 0<j(I''-I')\le(G+1-1/N)/2<(1-1/N)/2<1/2\\ 0\le |I''-I'|<P_1-P_0=G+1/2<1/2\end{array}\right.. \qquad (32)$$

Очевидно, что цепочки неравенств в первой и третьей строках (32) дают решение $I'=I''$, цепочка же неравенств второй строки не может быть удовлетворена ни при каких целых значениях I' и I''.

Во втором случае сочетания знаков имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0 \le j(p+I') \le P_0\\ 0 \le -j(p+I'') \le P_0\end{cases}\\ \begin{cases}0 \le j(p+I') \le P_0\\ P_0 < -j(p+I'') \le P_1\end{cases}\\ \begin{cases}P_0 < j(p+I') \le P_1\\ P_0 < -j(p+I'') \le P_1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0 \le j(I'-I'') \le 2P_0\\ P_0 < j(I'-I'') \le P_0+P_1\\ 2P_0 < j(I'-I'') \le 2P_1\end{array}\right. . \quad (33)$$

Подставив в (33) значения границ P_0 и P_1 из (29), и произведя оценку границ, на этот раз получаем:

$$\left[\begin{array}{l}0 \le j(I'-I'') \le -G-1/N \le 1/2-1/N < 1/2\\ 0 \le (-G-1/N)/2 < j(I'-I'') \le 1/2-1/N < 1/2\\ 0 \le -G-1/N < j(I'-I'') \le G+1-1/N < 1-1/N < 1\end{array}\right. . \quad (34)$$

Все три цепочки неравенств в (34) дают решение $I'=I''$. Замена I'' на I' в (30) приводит, так же, как и в первом случае сочетания знаков подмодульных выражений, к исключению второй строки из этой совокупности, поскольку области определения дельта-функций при одинаковом номере ветви здесь не пересекаются. В первой же и третьей строках происходит слияние областей определения в одну, и тогда условия (30) и вытекающее из них решение системы (15) суть

$$\begin{cases}I' = I''\\ \left[\begin{array}{l}\Delta_{|p+I'|\le P_0} = 1\\ \Delta_{P_0<|p+I'|\le P_1} = 1\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}I' = I''\\ \left[\begin{array}{l}D_{I'} = 2\\ D_{I'} = 1\end{array}\right.\end{cases} . \quad (35)$$

Нижние равенства в совокупностях (35) не представляют интереса, поскольку так же, как и для установленных выше целых неотрицательных значений G, означают всего лишь смещение частоты и фазы сигнала (13). Верхние же равенства означают удвоение амплитуды смещенного сигнала, что можно трактовать как «автоналожение» – наложение смещенного сигнала само на себя. Попытаемся вывести это явление из условий (28), установленных для $G \ge 0$. Считая формально $-1/2 \le G < 0$, вычисляем значения фигурирующих там выражений: $-1=[G]$, т.к. $-1 \le G < 0$; $[-G]= 0$, т.к. $0 \le -G < 1$; $\{G\} = \{1+G\} = 1+G$, $|\{G\}-1/2| = \{G\}-1/2$, т.к. $(1+G)-1/2 \ge 0$. Переписываем (28), учитывая эти факты:

$$\begin{cases}|I'-I''| = 0\\ |p+(I'+I'')/2| \le (1-\{G\}-1/N)/2\end{cases},$$

что полностью согласуется как с (14), так и с (35):

$$\begin{cases}I' = I''\\ |p+I'| \le (-[G]-\{G\}-1/N)/2 =\\ = (-G-1/N)/2 = (|G|-1/N)/2 = P_0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}I' = I''\\ D_{I'} = 2\end{cases}.$$

Таким образом, мы распространили условия наложения (27)-(28) на все значения индекса $G \ge -1/2$.

V. Явление исчезновения сигнала

Одним из возможных результатов преобразования (1) является исчезновение сигнала: $s'(t) = 0$. Предпосылкой этому интересному явлению служит то, что периодически повторяющиеся с периодом 1 области определения индикаторов ветвей (14) покрывают частотную ось не полностью, а именно – от верхней границы существования I-й ветви до нижней границы следующей I+1-й ветви имеет место $D_I = 0$ и формально можно считать, что там $s^I(t) = 0$. В зависимости от знака индекса G из формулы (14) усматриваются следующие случаи местоположения смещенной частоты $p+I$ в зоне обнуления I-й ветви сигнала:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}G > 0\\ \left[\begin{array}{l}P_1 < p+I \le P_0+1\\ -P_0-1 \le p+I < -P_1\end{array}\right. \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P_1-1/2 < p+I-1/2 \le P_0+1/2\\ -P_0-1/2 \le p+I+1/2 < -P_1+1/2\end{array}\right. \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P_0 < |p+I|-1/2 \le P_1, \quad p+I \ge 0\\ -P_1 \le -|p+I|+1/2 < -P_0, \quad p+I \le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow P_0 < \| p+I|-1/2| \le P_1\end{cases}\\ \begin{cases}G \le 0\\ \left[\begin{array}{l}P_1 < p+I < -P_1+1, \quad p+I \ge 0\\ P_1-1 < p+I < -P_1, \quad p+I \le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow\\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}P_1+1/N-1/2 \le |p+I|-1/2 \le -P_1-1/N+1/2\\ P_1+1/N-1/2 \le 1/2-|p+I| \le -P_1-1/N+1/2\end{array}\right.\\ \Leftrightarrow \| p+I|-1/2| \le -P_1-1/N+1/2 =\\ = -(G+1-1/N)/2-1/N+1/2 = (-G-1/N)/2 =\\ = (|G|-1/N)/2 = P_0 \Leftrightarrow \| p+I|-1/2| \le P_0\end{cases}\end{array}\right. .$$

Фактически мы образовали логическую функцию

$$C_I = \frac{1-\operatorname{sgn} G}{2}\Delta_{\| p+I|-1/2| \le P_0} + \frac{1+\operatorname{sgn} G}{2}\Delta_{P_0 < \| p+I|-1/2| \le P_1}$$

с P_0 и P_1 из (14), ненулевое значение которой указывает на то, что смещенная частота $p+I$ попадает в зону обнуления I-й ветви. Однако условие обнуления I-й ветви $C_I \ne 0$ не является достаточным для обнуления всего сигнала $s'(t)$, поскольку на область определения C_I может наложиться область определения некоторой «зеркальной» ветви с ненулевым индикатором D_I. Поэтому задача сводится к решению системы неравенств

$$C_{I'} \ne 0, \quad C_{I''} \ne 0 . \quad (36)$$

Эта система отличается от системы неравенств (15), определяющей условия наложения ветвей I' и I'', лишь тем, что вместо $|p+I|$ объектом сравнения во всех неравенствах выступает $\| p+I|-1/2|$, и нам остается только выписать готовое решение на основе (27):

$$\| p+I|-1/2|+[-G]/2| \le (1/2-|\{G\}-1/2|-1/N)/2 . \quad (37)$$

Видно, что при целых значениях G обнуления сигнала не происходит, равно как и наложения. Напротив, при полуцелых G зона обнуления сигнала максимальна: $(G–1/N)/2<||p+I|–1/2|\le(G+1–1/N)/2$.

VI. Существование ветви сигнала в чистом виде

Ветвь преобразованного сигнала с номером I существует в чистом виде (13), если $s'(t)=s^I(t)$. Для этого необходимо, чтобы индикатор ветви $D_I=1$ и интервал, удовлетворяющий этому условию, не пересекался с интервалом наложения другой ветви. Нужно убедиться и в том, что пересекаться с этой ветвью может только интервал обнуления другой ветви. Таким образом, задача сводится к системе соотношений, состоящей из равенства $D_I=1$, отрицания условия наложения (27) и утверждения условия обнуления (37):

$$\begin{cases}(|G|-1/N)/2<|p+I|\le(G+1-1/N)/2\\ \left[\begin{array}{l}||p+I|+[-G]/2|>P\\ |||p+I|-1/2|+[-G]/2|\le P\end{array}\right.\\ P=(1/2-|\{G\}-1/2|-1/N)/2\end{cases}, \quad (38)$$

где P обозначает совпадающие между собой правые части однонаправленных неравенств (27) и (37).

Рассмотрим три случая по отношению к знаку индекса G в верхнем неравенстве системы (38).

Начнем с $G=g=\gamma=0$. Выше мы установили, что при $\gamma=0$ нет ни наложения сигналов, ни исчезновения сигнала, поэтому в системе остается лишь верхнее двойное неравенство с отрицательной левой частью, и систему (38), ввиду неотрицательности абсолютной величины любого числа, можно записать так:

$$\begin{cases}G=0\\ 0\le|p+I|\le(1-1/N)/2\end{cases}. \quad (39)$$

Перейдем к $G\neq0$, $\gamma\neq0$. Раскроем в (38) все внешние по отношению к $|p+I|$ модульные скобки:

$$\begin{cases}(|G|-1/N)/2<|p+I|\le(G+1-1/N)/2\\ \left[\begin{array}{l}P+(g+1)/2<|p+I|\\ |p+I|<-P+(g+1)/2\\ -P+g/2+1\le|p+I|\le P+g/2+1\\ -P-g/2\le|p+I|\le P-g/2\end{array}\right.\end{cases}. \quad (40)$$

Проанализируем систему (40) для $G>0$. Здесь возможны два случая по γ. В первом из них $0<\gamma<1/2$, $P=(\gamma–1/N)/2$, и система принимает вид:

$$\begin{cases}(G-1/N)/2<|p+I|\le(G+1-1/N)/2\\ \left[\begin{array}{l}(G+1-1/N)/2<|p+I|\\ |p+I|<(G+1+1/N)/2-\gamma\\ (G+1/N)/2+1-\gamma\le|p+I|\le(G-1/N)/2+1\\ -(G-1/N)/2\le|p+I|\le-(G+1/N)/2+\gamma\end{array}\right.\end{cases}. \quad (41)$$

Верхнее неравенство (41) совместно только со вторым неравенством внутренней совокупности, отсюда:

$$\begin{cases}G>0,\ \ 0\le\gamma<1/2\\ (G-1/N)/2<|p+I|\le(G+1-1/N)/2-\gamma\end{cases}. \quad (42)$$

Во втором случае $1/2\le\gamma<1$, $P=(1–\gamma–1/N)/2$, и система (40), с учетом дискретности p, принимает вид:

$$\begin{cases}(G-1/N)/2<|p+I|\le(G+1-1/N)/2\\ \left[\begin{array}{l}(G-1/N)/2+1-\gamma<|p+I|\\ |p+I|\le(G-1/N)/2\\ (G+1-1/N)/2<|p+I|\le(G+3-1/N)/2-\gamma\\ (1/N-1-G)/2+\gamma\le|p+I|\le(1-G-1/N)/2\end{array}\right.\end{cases}. \quad (43)$$

Верхнее неравенство (43) совместно только с первым неравенством внутренней совокупности, отсюда:

$$\begin{cases}G>0,\ \ 1/2\le\gamma<1\\ (G-1/N)/2+1-\gamma<|p+I|\le(G+1-1/N)/2\end{cases}. \quad (44)$$

Проанализируем систему (40) для $G<0$. В этом случае $g=–1$, $1/2\le\gamma<1$, $P=(1–\gamma–1/N)/2$, и мы имеем:

$$\begin{cases}(1-\gamma-1/N)/2<|p+I|\le(\gamma-1/N)/2\\ \left[\begin{array}{l}(1-\gamma-1/N)/2<|p+I|\\ |p+I|<-(1-\gamma-1/N)/2\\ (\gamma+1/N)/2\le|p+I|\le1-(\gamma+1/N)/2\\ (\gamma+1/N)/2\le|p+I|\le1-(\gamma+1/N)/2\end{array}\right.\end{cases}. \quad (45)$$

Верхнее неравенство (45) совместно только с первым неравенством внутренней совокупности, отсюда:

$$\begin{cases}G<0,\ \ 1/2\le\gamma<1\\ (1-\gamma-1/N)/2<|p+I|\le(\gamma-1/N)/2\end{cases}. \quad (46)$$

Займемся теперь обобщением рассмотренных случаев. Выше отмечалось, что положив в (42) формально $\gamma=0$, мы оставим в (38) лишь верхнее неравенство, которое при $G=0$ даст (39), и тогда можно считать для неравенства (42), что $G\ge0$, $\gamma\ge0$. Но при этом мы больше не имеем права строгую левую часть этого неравенства превращать в нестрогую, т.к. она станет положительной и нулевое решение $p+I=0$ «выпадет» из (39). Что касается случая $G<0$, то его можно свести к $G>0$, $1/2\le\gamma<1$. С этой целью приравняем левые и правые части двойных неравенств (44) и (46):

$$\begin{cases}(g+\gamma-1/N)/2+1-\gamma=(1-\gamma-1/N)/2\\ (g+\gamma+1-1/N)/2=(\gamma-1/N)/2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g=-1\\ g=-1\end{cases}.$$

Получили правильный ответ для целой части G.

Остается теперь объединить неравенства (42), (44). Сначала симметризуем эти неравенства, вычитая из всех их трех частей координату середины интервала:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0\le\gamma<1/2\Leftrightarrow[\gamma+1/2]=0\\ ||p+I|-g/2-1/4|<(1/2+1/N-\gamma)/2\end{cases}\\ \begin{cases}1/2\le\gamma<1\Leftrightarrow[\gamma+1/2]=1\\ ||p+I|-g/2-1/4-1/2|<(\gamma-1+1/N+1/2)/2\end{cases}\end{array}\right.. \quad (47)$$

Используя нулевое и единичное значения выражения $[\gamma+1/2]$ в качестве индикатора случаев, представляем совокупность (47) в виде единого неравенства

$$||p+I|-([G+1/2]+1/2)/2|<(|\{G\}-1/2|+1/N)/2 \quad (48)$$

в качестве условия существования I-й ветви сигнала в чистом виде для всех значений $G \geq -1/2$.

VII. Обобщение на докритический индекс G

Условия (48), (28) и (37), описывающие существования ветви сигнала в чистом виде, наложения двух ветвей и исчезновения сигнала соответственно, получены для $G \geq -1/2$. Для распространения их на $G < -1/2$ мы должны сделать в них замену $G = |G'+1/2|-1/2$ и в итоговых выражениях переименовать G' в G обратно. Заметим, что индекс G фигурирует в указанных условиях в трех выражениях: $[G+1/2]$, $|\{G\}-1/2|$, $[-G]$. Первое из этих выражений превращается в $[G+1/2] = [|G'+1/2|-1/2+1/2] = [|G'+1/2|]$, т.е. $G+1/2$ просто заключается в модульные скобки. Второе выражение приобретает вид $|\{G\}-1/2| = |\{|G'+1/2|-1/2\}-1/2|$. В зависимости от знака подмодульного выражения и с учетом того, что выражения в фигурных скобоках определены с точностью до целого числа, имеем либо $|\{G'+1/2-1/2\}-1/2| = |\{g'+\gamma'\}-1/2| = |\{\gamma'\}-1/2| = |\gamma'-1/2| = |\{G'\}-1/2|$, либо $|\{-G'-1/2-1/2\}-1/2| = |\{-g'-\gamma'-1\}-1/2| = |\{1-\gamma'\}-1/2| = |1-\gamma'-1/2| = |1/2-\gamma'| = |\{G'\}-1/2|$, т.е. $|\{G\}-1/2|$ остается инвариантным. Третье выражение преобразуетя так: $[-G] = [-|G'+1/2|+1/2] = [-|g'+\gamma'+1/2|+1/2]$, что в зависимости от знака подмодульного выражения и с учетом того, что целое число можно внести и вынести из квадратных скобок, выглядит либо как $[-g'-\gamma'-1/2+1/2] = [-g'-\gamma'] = -g' + [-\gamma'] = -g' - \operatorname{sgn}\gamma'$, либо как $[g'+\gamma'+1/2+1/2] = [g'+\gamma'+1] = g'+1+[\gamma'] = g'+1$. Предположим, что $\gamma' \neq 0$. Тогда первое из этих выражений равно $-g'-1$; оно отрицательно при $g' > -1$ и положительно при $g' < -1$. Напротив, второе выражение $g'+1$ отрицательно при $g' < -1$ и положительно при $g' > -1$. При $g' = -1$ оба выражения равны нулю. Ясно, что эти три случая можно записать как $[-G] = -|g'+1| = -|[G']+1|$. Что касается значения $\gamma' = 0$, то в этом случае замена $G = g + \gamma$ на $|g'+\gamma'+1/2| - 1/2$ дает $G = |g'+1/2|-1/2$, что равно либо g', либо $-g'-1$, т.е. G изначально является целым числом. Но этот случай можно игнорировать, поскольку выражение $[-G]$ встречается только в (28) и (37), касающихся эффектов наложения частот и исчезновения сигнала, не имеющих места для целых G. Таким образом, выражение $[-G]$ можно заменить на $-|[G]+1|$.

VIII. Результаты преобразования сигнала

Подводя итоги исследования, записываем все случаи преобразования (1) сигнала (2) с дробной частью μ безразмерной частоты fT из (11) для всех значений G, квантованных по (12) с шагом $1/N$.

1) Преобразованный сигнал есть ветвь с номером I в чистом виде, т.е. представляет собой косинусоиду

$$s'(t) = s^I(t) = a\cos(2\pi(f + IF)t + (\varphi - 2\pi IFt_0)),$$

если смещенная частота $f+IF$ при заданном индексе G удовлетворяет неравенству

$$\| f/F + I| - ([|G+1/2|] + 1/2)/2| < (|\{G\} - 1/2| + 1/N)/2.$$

Собственно теореме отсчетов удовлетворяет только нулевая ветвь: при $I = 0$ получаем $s'(t) = s(t)$.

Положительные значения I соответствуют модуляции сигнала – переводу его спектра в G-полосу со сдвигом на IF, отрицательные – демодуляции.

2) При условиях наложения ветвей I' и I''

$$\begin{cases} |I' - I''| = |[G] + 1| \\ |f/F + (I' + I'')/2| \leq (1/2 - |\{G\} - 1/2| - 1/N)/2 \end{cases}$$

преобразованный сигнал является бигармоническим, или амплитудно-модулированным:

$$s'_{n+\nu} = a\cos(2\pi pq_{n+\nu} + \varphi + 2\pi I'\nu) + a\cos(2\pi pq_{n+\nu} + \varphi + 2\pi I''\nu) =$$
$$= 2a\cos\pi(I' - I'')\nu\cos(2\pi pq_{n+\nu} + \varphi + \pi(I' + I'')\nu).$$

Максимальное наложение имеет место при полуцелом индексе G. Нет наложения при целом индексе G. При отрицательном индексе G в качестве частного случая «автоналожения» имеет место явление удвоение сигнала: $s'(t) = 2s(t)$.

3) При удовлетворении неравенства

$$\|| f/F + I| - 1/2| - |[G] + 1|/2| \leq (1/2 - |\{G\} - 1/2| - 1/N)/2$$

происходит полное исчезновение сигнала: $s'(t) = 0$.

IX. Заключение

1) Проведено дальнейшее исследование операции преобразования гармонического сигнала по теореме отсчетов в формулировке работы [6].

2) Показано, что преобразованный сигнал многозначен – распадается на ветви, являющиеся либо точной или смещенной по частоте и фазе копией исходного сигнала, либо наложением двух таких ветвей, либо тождественным нулем.

3) Исследование теоремы отсчетов следует продолжить в направлении углубления теории фурье-анализа и поиска приложений при разработке устройств современной электроники (детектирование сигнала, интерполяция и т.п.).

Литература

[1] Whittaker E.T., “On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory,” in Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 35, 1915, pp. 181-194.

[2] Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. – М.: “Всесоюзн. энергетич. комитет”, 1933.

[3] Shannon C.E., “Communication in the presence of noise,” in Proc. IRE, vol. 37, 1949, pp. 10-21.

[4] Kohlenberg A., “Exact interpolation of band-limited functions,” in J. Appl. Phys., vol. 24, no. 12, Dec. 1953, pp. 1432-1436.

[5] John J. Benedetto and Paulo J. S. G. Ferreira, Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin, 2001.

[6] Ханян Г.С. Теорема отсчетов для сигнала конечной длительности с необязательно нулевым индексом

частотной полосы // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 2 (139). – С. 20-25.
[7] Ханян Г.С. Теорема отсчетов в приложении к задаче интерполирования данных // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2014. Сборник трудов / под общ. ред. академика РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2014. Часть IV. С. 101-104.

Features of Limited Duration Harmonic Signal Transform by Sampling Theorem

G.S. Khanyan

Central Institute of Aviation Motors, Moscow, khanyan@rtc.ciam.ru

***Keywords* — Fourier analysis, digital realization of signal, frequency band index, logical delta-function, branch overlay.**

Abstract

For more than eight decades the sampling theorem has remained the subject of interest in the field of information theory and its applications. The author's research in this area is distinguished by a particular approach to the disclosure of mathematical aesthetics of Fourier analysis. The theorem proof method used is direct – a digital realization of harmonic signal is substituted into interpolation formula, and in the process of analyzing the conversion result the conditions of the theorem validity and the peculiar effects of its violation follow naturally. It can be argued that these interesting effects are hardly covered in literature, and the aim of the work is to fill this gap.

The harmonic signal $s(t) = a\cos(2\pi ft+\varphi)$ of limited duration T is sampled with frequency F, so that its digital realization is a sequence of $N = FT$ equidistant readings $s(t_k)$ obtained at instants $t_k = t_0+k/F$; $k = 0,1,\dots, N-1$ with an arbitrary start time t_0. The integral transform $s'(t)$ is calculated, which is a convolution of $s(t_k)$ sequence with Dirichlet kernel (used in the Fourier series theory), which depends on continuous time t, length of digital realization N, and frequency band index G – a parameter generalizing classical statement $0 \le f < F/2$ of the theorem to the case $GF/2 < F_{low} \le f \le F_{up} < (G+1)F/2$ of band-pass filtering with cut-off frequencies F_{low} and F_{up} depending on G.

The main theoretical question is, under what restrictions on both signal and kernel parameters this transform is an identity: $s'(t) = s(t)$.

The transform result (computable only for quantized with a step of $1/N$ values of index G, and for integer or half-integer values of signal dimensionless frequency fT) is the expansion of the function $s'(t)$ into an infinite series (with summation index I) of transformed signal copies (branches) $s^I(t)$, shifted in frequency by IF and in phase by $-2\pi IFt_0$ – each in its own frequency band, the boundaries of which depend on G in a manner that no more than two such domains may intersect.

In the case of intersection (frequencies overlay), the terms of which are set by inequality, the transform result is a biharmonic signal (with a certain frequency difference and phase shift of its components). The overlay area size depends on the fractional part of index G. The widest of possible (complete) overlay area is achieved at half-integer values of G (at the critical index $G = -1/2$ this overlay turns into the signal double gaining: $s'(t) = 2s(t)$ – the self-imposition of the branch $I = 0$). There is no frequency overlay for integer values of G.

The branch of number I may exist in a pure form (and not only for integer G) if the signal's offset frequency has satisfied another inequality. Actually the sampling theorem is satisfied only in this case, for zero branch only: $s'(t) = s^0(t) = s(t)$.

In the rest nodes on parameters' plane (G, fT) a very interesting phenomenon takes place – complete disappearance of the signal after its conversion: $s'(t) = 0$.

Sampling theorem study should be continued in direction of deepening the Fourier analysis theory and searching for relevant applications while developing modern electronics devices (signal detecting, interpolation, etc.).

References

[1] Whittaker E.T., "On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory," in Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 35, 1915, pp. 181-194.
[2] Kotelnikov V.A., "On the carrying capacity of "ether" and wire in telecommunications," Proceedings of 1st all-union congress on the technical reconstruction of communication and the development of low-current industry, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933 (in Russian).
[3] Shannon C.E., "Communication in the presence of noise," in Proc. IRE, vol. 37, 1949, pp. 10-21.
[4] Kohlenberg A., "Exact interpolation of band-limited functions," in J. Appl. Phys., vol. 24, no. 12, Dec. 1953, pp. 1432-1436.
[5] John J. Benedetto and Paulo J. S. G. Ferreira, Modern Sampling Theory: Mathematics and Applications, Birkhäuser, Boston – Basel – Berlin, 2001.
[6] Khanyan G.S. Sampling theorem for finite duration signal with a non-obligatory zero index of the frequency band. Izvestiia Yuzhn. Feder. Universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2013, no. 2 (139), pp. 20-25 (in Russian).
[7] Khanyan G.S. Sampling theorem applied to data interpolation problem. Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem – 2014. Sbornik trudov / pod obshch. red. akademika RAN A.L. Stempkovskogo. M.: IPPM RAN, 2014, vol. IV, pp. 101-104 (in Russian). Available at: http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D055.pdf. Accessed 09.02.2016.