

Цифровой рекурсивный формирователь отсчетов сигнала с линейной частотной модуляцией

В.А. Лесников¹, А.В. Частиков², Д.Г. Гарш³, Т.В. Наумович⁴

Вятский государственный университет

¹Vladislav.Lesnikov.RU@ieee.org, ²alchast@mail.ru, ³garsh.denis@yandex.ru, ⁴ntv_new@mail.ru

Аннотация — При реализации некоторых алгоритмов опознавания со сжатием, позволяющих снизить частоту дискретизации и тем самым повысить эффективность реализации алгоритмов цифровой обработки сигналов, например, системы с ЛЧМ-кодированием, необходимо вычисление отсчетов ЛЧМ сигнала. Предлагается алгоритм, требующий минимальное число операций и обеспечивающий возможность быстрой перестройки параметров.

Ключевые слова — линейная частотная модуляция; ЛЧМ; рекурсивный алгоритм; прямой цифровой синтез; цифровой вычислительный синтезатор.

I. ВВЕДЕНИЕ

Сигналы с линейной частотной модуляцией широко используются в радиолокации, гидролокации, в телекоммуникационных системах, при наклонном зондировании ионосферы, при формировании цифровых изображений (digital imaging), гармоническом кодировании речи и т.п.

Во многих из этих приложений требуется когерентное формирование ЛЧМ-сигнала. Одним из способов когерентного формирования ЛЧМ-сигнала является вычисление отсчетов генерируемого сигнала. Помимо упомянутых выше приложений вычисление отсчетов необходимо при реализации некоторых алгоритмов цифровой обработки сигналов, например, алгоритма Блустейна (Bluestein's FFT algorithm) вычисления быстрого преобразования Фурье, алгоритма z-преобразования с использованием ЛЧМ-фильтрации [1], чирплет-преобразования (Chirplet Transform) [2].

Одна из первых реализаций цифрового формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала [3] была основана на предварительном вычислении отсчетов сигнала и записи их в высокоскоростную память (рис. 1).

В работе [4] предложен подход, основанный на формировании отсчетов фазы по квадратичному закону, которыми адресуются таблицы предварительно вычисленных значений косинусоидальной и синусоидальной функций (рис. 2).

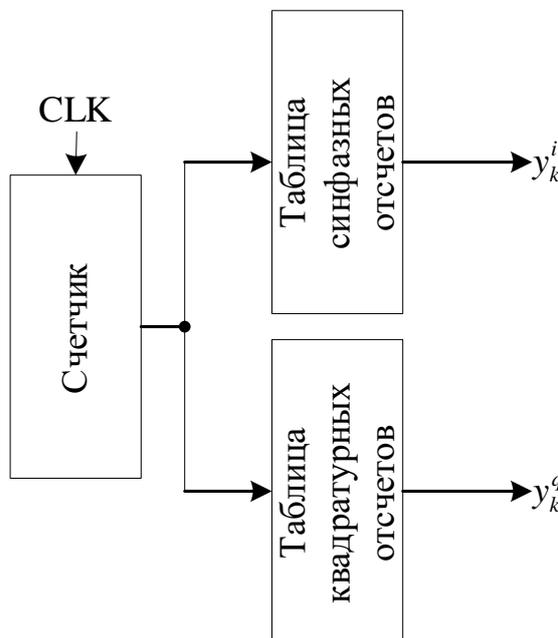


Рис. 1. Простейшая реализация формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала

В [5] описана предложенная Педерсоном [6], [7] схема, основанная на рекурсивном вычислении квадратичной фазы ЛЧМ-сигнала.

Все рассмотренные способы основаны на использовании табличной памяти. Это существенно снижает гибкость формирователя. Изменение параметров сигнала потребует значительного времени. Предлагаемый в данной работе цифровой рекурсивный формирователь свободен от этого недостатка. Предлагаемое техническое решение основано на идеех, опубликованных в [8]-[10].

Предлагаемое устройство относится к классу устройств под названием генераторы отсчетов сигналов с цифровым управлением (Numerically controlled oscillators - NCO), которые в совокупности с цифроаналоговым преобразователем могут быть составной частью цифровых вычислительных синтезаторов (Direct digital synthesizers – DDS) [11].

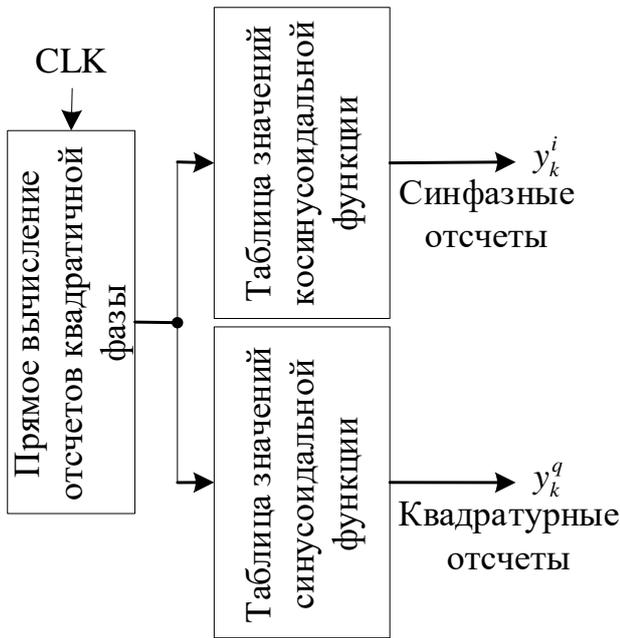


Рис. 2. Реализация формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала с прямым вычислением фазы

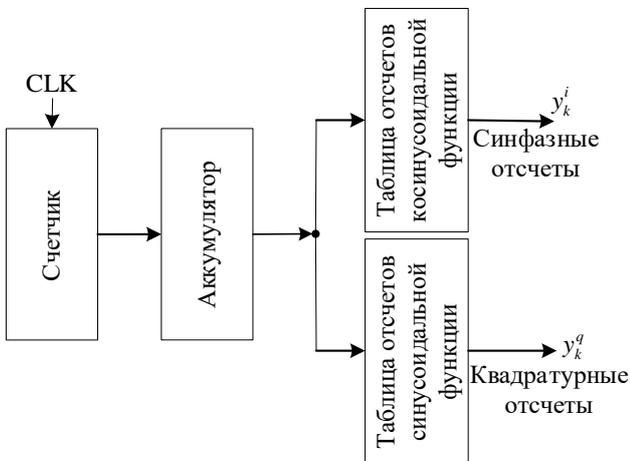


Рис. 3. Реализация формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала с рекурсивным вычислением фазы

II. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ЦИФРОВОГО РЕКУРСИВНОГО ФОРМИРОВАТЕЛЯ ОТСЧЕТОВ ЛЧМ-СИГНАЛА

Комплексные отсчеты ЛЧМ-сигнала описываются выражением

$$y_k = d \exp(j(ak^2T_s^2 + bkT_s + c)), \quad (1)$$

где a , b , c , и d - параметры сигнала. T_s - период дискретизации.

Мгновенная фаза сигнала описывается выражением:

$$\theta = at^2 + bt + c. \quad (2)$$

Мгновенная частота ЛЧМ-сигнала представляет собой производную мгновенной фазы:

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta}{dt} = \frac{2at + b}{2\pi}. \quad (3)$$

При $t = 0$ получим начальное значение мгновенной частоты:

$$\nu_0 = \frac{b}{2\pi}. \quad (4)$$

Из этого выражения определим значение коэффициента b :

$$b = 2\pi\nu_0. \quad (5)$$

Пусть длительность формируемого сигнала равна

$$\tau = \kappa T_s. \quad (6)$$

Тогда конечное значение мгновенной частоты равно

$$\nu_0 + \Delta\nu = \frac{2a\kappa T_s + b}{2\pi}, \quad (7)$$

а девиация равна

$$\Delta\nu = \frac{a\kappa T_s}{\pi}. \quad (8)$$

Из этого выражения получаем значение коэффициента a :

$$a = \frac{\pi\Delta\nu}{\kappa T_s}. \quad (9)$$

Коэффициент c определяется несущей частотой f_0 :

$$c = 2\pi f_0 T_s. \quad (10)$$

Коэффициент d определяет амплитуду сигнала.

III. РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ ОТСЧЕТОВ ЛЧМ-СИГНАЛА

Очевидно, что

$$k^2 = (k-1)^2 + 2k - 1. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (1), получим

$$y_k = d \exp(j(a(k-1)^2 T_s^2 + b(k-1)T_s + c)) * \exp(j(a(2k-1)T_s^2 + bT_s)). \quad (12)$$

Из уравнения (12) получаем рекурсивное соотношение

$$y_k = y_{k-1} w_k, \quad (13)$$

где

$$w_k = \exp\left(j(a(2k-1)T_s^2 + bT_s)\right). \quad (14)$$

После элементарных преобразований получим

$$w_k = \exp\left(j(a(2k-3)T_s^2 + bT_s)\right)\exp(j2aT_s^2). \quad (15)$$

Отсюда можно получить рекурсивное соотношение:

$$w_k = w_{k-1} \exp\{j2aT_s^2\}. \quad (16)$$

Таким образом, цифровой рекурсивный формирователь отсчетов ЛЧМ-сигнала описывается системой уравнений

$$\begin{cases} w_k = gw_{k-1}, \\ y_k = w_k y_{k-1}, \end{cases} \quad (17)$$

где

$$k = 0, 1, \dots, \left\lceil \frac{\tau}{T_s} \right\rceil, \quad (18)$$

$$g = \exp(j2aT_s^2), \quad (19)$$

$\lceil x \rceil$ - наименьшее целое, большее, чем x .

Схема, реализующая систему уравнений (17), представлена на рис. 4.

Для реализации формирователя в арифметике вещественных чисел проведем следующие преобразования:

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w_k + j \operatorname{Im} w_k = (\operatorname{Re} g + j \operatorname{Im} g)(\operatorname{Re} w_{k-1} + j \operatorname{Im} w_{k-1}), \\ \operatorname{Re} y_k + j \operatorname{Im} y_k = (\operatorname{Re} w_k + j \operatorname{Im} w_k)(\operatorname{Re} y_{k-1} + j \operatorname{Im} y_{k-1}). \end{cases} \quad (20)$$

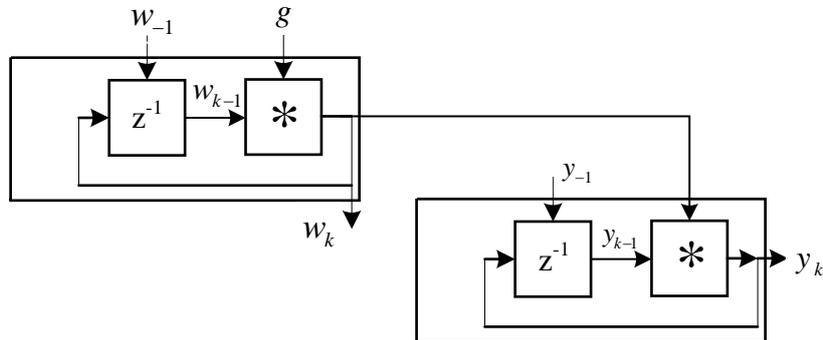


Рис. 4. Реализация предлагаемого формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала в комплексной арифметике

После очевидных преобразований получим

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w_k = \operatorname{Re} g \operatorname{Re} w_{k-1} - \operatorname{Im} g \operatorname{Im} w_{k-1}, \\ \operatorname{Im} w_k = \operatorname{Re} g \operatorname{Im} w_{k-1} + \operatorname{Im} g \operatorname{Re} w_{k-1}, \\ \operatorname{Re} y_k = \operatorname{Re} w_k \operatorname{Re} y_{k-1} - \operatorname{Im} w_k \operatorname{Im} y_{k-1}, \\ \operatorname{Im} y_k = \operatorname{Re} w_k \operatorname{Im} y_{k-1} + \operatorname{Im} w_k \operatorname{Re} y_{k-1}. \end{cases} \quad (21)$$

На рис. 5 показана реализация предлагаемого формирователя в арифметике вещественных чисел в соответствии с системой уравнений (21).

IV. РЕАЛИЗАЦИЯ ЦИФРОВОГО РЕКУРСИВНОГО ФОРМИРОВАТЕЛЯ ОТСЧЕТОВ ЛЧМ-СИГНАЛА

Рекурсивный цифровой формирователь отсчетов ЛЧМ-сигнала состоит из двух блоков.

Первый блок представляет собой формирователь отсчетов комплексного гармонического сигнала:

$$w_k = \exp\left(j(a(2k-1)T_s^2 + bT_s)\right). \quad (22)$$

Параметры этого сигнала определяются константой g (19) и начальными условиями, получаемыми подстановкой в (22) значения $k = -1$:

$$w_{-1} = \exp\left(j(-3aT_s^2 + bT_s)\right). \quad (23)$$

Второй блок генерирует отсчеты y_k комплексного ЛЧМ-сигнала в соответствии с (1). Начальные условия во втором блоке получаются подстановкой в (1) значения $k = -1$ и определяются выражением

$$y_{-1} = d \exp\left(j(aT_s^2 - bT_s + c)\right). \quad (24)$$

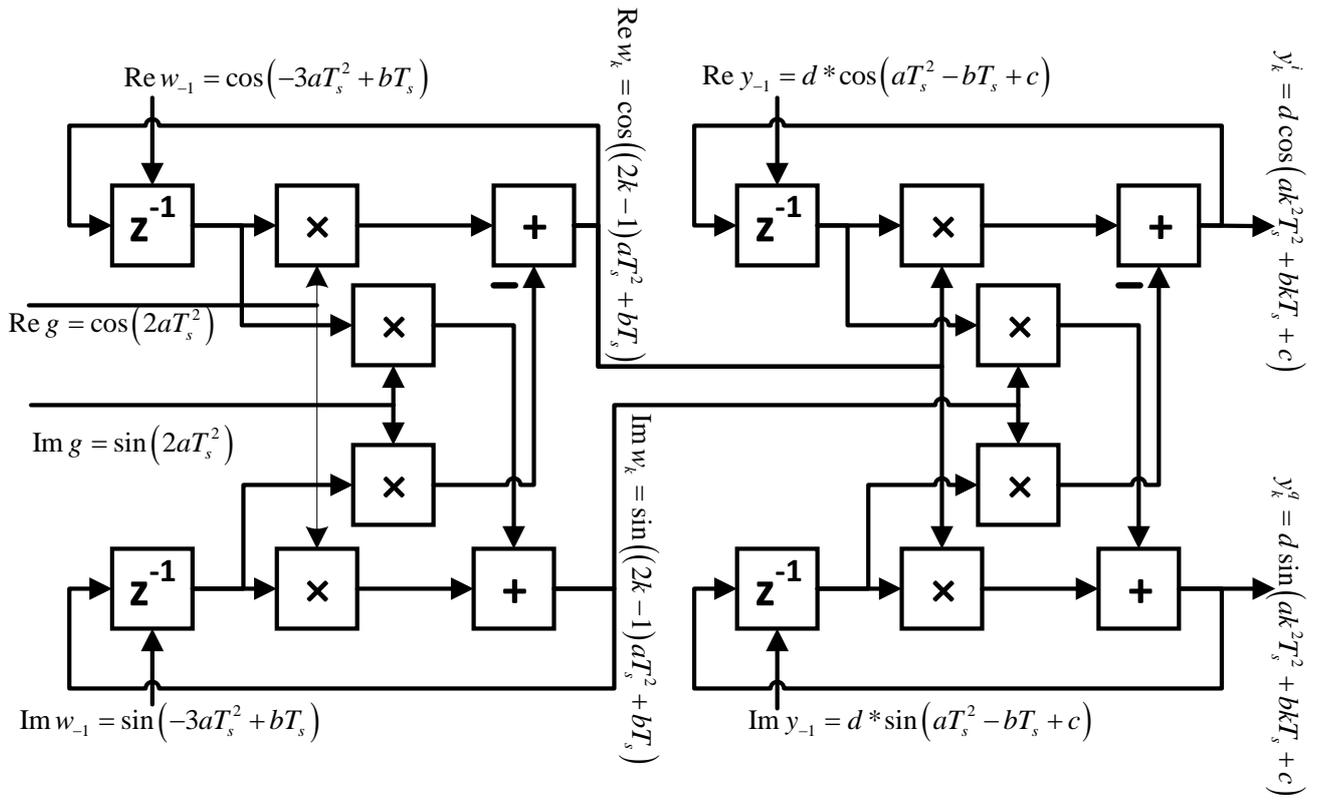


Рис. 5. Реализация цифрового рекурсивного формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала в арифметике вещественных чисел

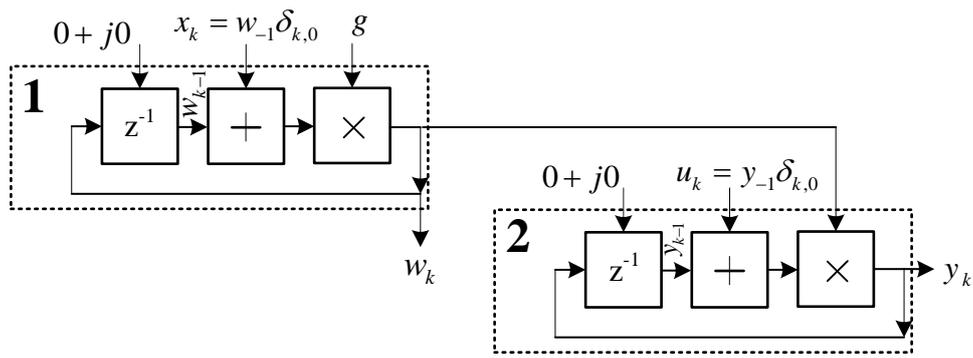


Рис. 6. Эквивалентная схема предлагаемого формирователя отсчетов ЛЧМ-сигнала в комплексной арифметике

V. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ЦИФРОВОГО РЕКУРСИВНОГО ФОРМИРОВАТЕЛЯ ЛЧМ-СИГНАЛА

На рис. 6 представлена схема, на которой установка начальных условий в блоки задержки на рис. 4 заменена подачей эквивалентных входных сигналов.

Входной сигнал первого блока равен

$$x_k = w_{-1} \delta_{k,0}, \quad (25)$$

где

$$\delta_{k,i} = \begin{cases} 1, & \text{if } k=i, \\ 0, & \text{if } k \neq i \end{cases} \quad (26)$$

дельта Кронекера.

Входной сигнал второго блока равен

$$u_k = y_{-1} \delta_{k,0}. \quad (27)$$

Первый блок представляет собой рекурсивный цифровой фильтр с неизменяющимися во времени

комплексными коэффициентами. Работа этого фильтра описывается уравнением:

$$W(z) = g(X(z) + W(z)z^{-1}). \quad (28)$$

Из уравнения (26) получим:

$$W(z) = g \frac{X(z)}{1 - gz^{-1}} = \frac{X(z)}{\exp(-j2aT_s^2) - z^{-1}}. \quad (29)$$

Передаточная функция первого блока равна

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} = \frac{1}{\exp(-j2aT_s^2) - z^{-1}} = \frac{\exp(j2aT_s^2)z}{z - \exp(j2aT_s^2)}. \quad (30)$$

Итак, первый блок – это неустойчивый рекурсивный ЦФ первого порядка с полюсом на единичной окружности z-плоскости

$$z_{p1} = \exp(j2aT_s^2). \quad (31)$$

Блок 2 представляет собой также рекурсивный цифровой фильтр с комплексными изменяющимися во времени коэффициентами. Если ввести понятие «мгновенный полюс» [12], то этот полюс в каждый момент времени $t = kT_s$ меняет свое положение на единичной окружности в z-плоскости.

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе предложен цифровой рекурсивный формирователь отсчетов комплексного сигнала с линейной частотной модуляцией. Формирователь характеризуется минимально возможным объемом памяти и максимально возможной скоростью изменения любых параметров ЛЧМ-сигнала. Сигнал при данной частоте дискретизации полностью определяется всего четырьмя вещественными коэффициентами. На данное устройство получен патент Российской Федерации [13].

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки №8.586.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Meyer-Baese U. Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays. New York City, NY: Springer Science & Business Media, 3rd ed., 2007. 744 p.
- [2] Theodoridis S., Chellappa R. Academic Press Library in Signal Processing: Array and Statistical Signal Processing, vol. 3. Amsterdam: Academic Press, 2013. 1012 p.
- [3] Fenwick R.B., Barry G. H. Sweep-frequency oblique ionospheric sounding at medium frequencies // IEEE Transactions on Broadcasting, 1966. V. BC-12. № 1. P. 25 – 27.
- [4] Vanderkooy J. Another approach to time delay spectrometry // Journal of Audio Engineering Society (JAES). 1986. V. 34. № 7/8. P. 523-538.
- [5] Vankka J., Halonen K.A.I. Direct Digital Synthesizers: Theory, Design and Applications. New York City, NY: Springer Science & Business Media. 2013. 193 p.
- [6] Pedersen P.C., Green Jr. T.J. Digital sweep generator”, USA Patent. № 4943779A. 1990.
- [7] Pedersen P.C. Digital generation of coherent sweep signals // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. 1990. V. 39. № 1. P. 90-95.
- [8] Marques J.S., Almeida L.B. A fast algorithm for generating sinusoids with polynomial phase // 1991 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-91). Toronto, Ont., Canada. 1991. V. 3. P. 2261–2264.
- [9] Marques J.S., Almeida L.B., Tribolet J.M. Harmonic coding at 4.8 kb/s // 1990 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-90). Albuquerque, NM: 1990. V. 1. P. 17–20.
- [10] Kaiser J. On the fast generation of equally spaced values of the Gaussian function $A \cdot \exp(-at^2)$ // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1987. V. 35. № 10. P. 1480–1481.
- [11] Fundamentals of Direct Digital Synthesis (DDS) // Tutorial MT-085. Analog Devices. 2009. 9 p.
- [12] Germain F.G., Werner K.J. Design principles for lumped model discretisation using Möbius transforms // Proc. of the 18th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15). 2015. Trondheim, Norway. P. DAFX-1 – DAFX-8.
- [13] Лесников В.А., Частиков А.В., Гарш Д.Г. Цифровой рекурсивный формирователь отсчетов сигнала с линейной частотной модуляцией. Патент РФ № 2577488. Дата приоритета 17.02.2015. Дата публикации 15.02.2016.

Digital recursive generator of the samples of chirp

V.A. Lesnikov¹, A.V. Chastikov², D.G. Garsh³, T.V. Naumovich⁴

Vyatka State University, Kirov, Russia

¹Vladislav.Lesnikov.RU@ieee.org, ²alchast@mail.ru, ³garsh.denis@yandex.ru, ⁴ntv_new@mail.ru

Keywords — sampling; linear chirp; numerically controlled oscillator; direct digital synthesis; recursive algorithm.

characterized by minimum possible memory size and the minimum time of tuning.

ABSTRACT

It is proposed the recursive generator of complex samples with the linear chirp. The generator is

Linear chirp signals are widely used in radar, sonar, communication applications, oblique ionospheric sounding, digital imaging, test equipment, harmonic coding of speech, etc. The coherent forming of signal is

needed in many of these applications. One way of forming the coherent chip signal is to compute the samples of the generated signal.

The numerically controlled oscillator (NCO) carries out calculation of the signal samples.

One of the first realization of the numerically controlled linear chirp oscillator (NCLCO) has been based on preliminary calculation of the signal samples and store them in high-speed memory [3]. In [4] the approach to coherent sweep generation based on the calculation of the binary words, corresponding to the analytical expression for the quadratic phase of a sampled linear sweep is offered. In [6], [7] the approach based on recursive computation of a quadratic phase of the chirp is offered [5].

All considered methods assume use of a table memory. It significantly reduces flexibility of the former. Change of parameters requires considerable time. Proposed in this paper a recursive technique of forming of the complex samples of the chirp eliminates these disadvantages. Applied recursive technique is based on the ideas described in [8]-[10].

The NCLCO consists of two units. The first unit generates a harmonic complex signal. The parameters of the signal are determined by a complex constant and initial conditions. The second unit generates samples of a complex chirp.

The first unit may be represented as the first order complex IIR digital filter with zero initial conditions. The pole of the transfer function of this filter is on the unit circumference in the z-plane. Thus, the first block is the unstable filter with constant coefficients. The second unit is also the first order unstable complex IIR digital filter. But coefficients of this filter is changed in each step. If to define concept of an instantaneous pole, then it moves on a unit circumference in each step.

This paper proposes the recursive digital coherent generator of complex samples with linear chirp. The generator is characterized by the minimum amount of memory and the possibility of quick adjustment of any parameters. The authors obtained a patent of the Russian Federation [13].

This work is carried out as the subproject within a state contract with the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the demand 8.586.2014/K).

REFERENCES

- [1] Meyer-Baese U. *Digital Signal Processing with Field Programmable Gate Arrays*. New York City, NY: Springer Science & Business Media, 3rd ed., 2007. 744 p.
- [2] Theodoridis S., Chellappa R. *Academic Press Library in Signal Processing: Array and Statistical Signal Processing*, vol. 3. Amsterdam: Academic Press, 2013. 1012 p.
- [3] Fenwick R.B., Barry G. H. Sweep-frequency oblique ionospheric sounding at medium frequencies // *IEEE Transactions on Broadcasting*. 1966. V. 12. № 1. P. 25 – 27.
- [4] Vanderkooy J. Another approach to time delay spectrometry // *Journal of Audio Engineering Society (JAES)*. 1986. V. 34. № 7/8. P. 523-538.
- [5] Vankka J., Halonen K.A.I. *Direct Digital Synthesizers: Theory, Design and Applications*. New York City, NY: Springer Science & Business Media. 2013. 193 p.
- [6] Pedersen P.C., Green Jr. T.J. Digital sweep generator”, USA Patent. № 4943779A. 1990.
- [7] Pedersen P.C. Digital generation of coherent sweep signals // *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 1990. V. 39. № 1. P. 90-95.
- [8] Marques J.S., Almeida L.B. A fast algorithm for generating sinusoids with polynomial phase // *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-91)*. Toronto, Canada. 1991. V. 3. P. 2261–2264.
- [9] Marques J.S., Almeida L.B., Tribolet J.M. Harmonic coding at 4.8 kb/s // *1990 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP-90)*. Albuquerque, NM: 1990. V. 1. P. 17–20.
- [10] Kaiser J. On the fast generation of equally spaced values of the Gaussian function $A \exp(-at)$ // *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1987. V. 35. № 10. P. 1480–1481.
- [11] *Fundamentals of Direct Digital Synthesis (DDS)* // Tutorial MT-085. Analog Devices. 2009. 9 p.
- [12] Germain F.G., Werner K.J. Design principles for lumped model discretisation using möbius transforms // *Proc. of the 18th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-15)*. 2015. Trondheim, Norway. P. DAFX-1 – DAFX-8.
- [13] Lesnikov V.A., Chastikov A.V., Garsh D.G. Цифровый рекурсивный формирователь отсчетов сигнала с линейной частотной модуляцией. RF Patent № 2577488. 2016. (in Russian).