

Аппроксимация рациональных передаточных функций на основе интегрального критерия точности

М.М. Гурарий, М.М. Жаров, С.Л. Ульянов, Л.С. Ходош

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, gourary@ippm.ru

Аннотация — Статья посвящена описанию нового метода построения редуцированной макромоделли линейной динамической системы в виде рациональной передаточной функции. Метод основан на минимизации погрешности аппроксимации, заданной интегральным критерием. Предусмотрена модификация метода, ориентированная на минимизацию порядка модели при заданной погрешности. Рассмотрено распространение метода на случай векторной передаточной функции. Разработанный вычислительный алгоритм базируется на методе Гаусса-Ньютона. Приводятся примеры применения разработанного метода.

Ключевые слова — линейная система, макромоделль, передаточная функция, рациональная аппроксимация, схемотехническое моделирование.

I. ВВЕДЕНИЕ

В современных электронных устройствах постоянно возрастает влияние линий передач и межсоединений на их производительность. Поэтому в настоящее время задачи проектирования СБИС тесно связаны с учетом высокоскоростных эффектов при передаче сигналов. Это требует анализа больших линейных подсхем, что приводит к значительным вычислительным затратам при моделировании. Затраты могут быть значительно снижены при использовании компактных макромоделей линейных блоков, генерация которых должна включаться в состав средств САПР СБИС. Поэтому разработка методов редуцирования линейных блоков является актуальным направлением в построении алгоритмов и методов моделирования.

В настоящее время широкое распространение получили проекционные методы редуцирования на базе подпространств Крылова [1]. Эти методы включают как простые одноточечные алгоритмы типа PRIMA [2] для одноходовых систем, так и более сложные многоточечные процедуры для многопортовых блоков [3]. Длительное время к существенным недостаткам проекционных методов относилась избыточность редуцированных моделей [4], которая заключалась в излишне высоком порядке модели по сравнению с порядком, необходимым для обеспечения требуемой точности. Для преодоления этого недостатка был предложен ряд эффективных методов [5, 6].

Однако, проекционные методы применимы только к линейным динамическим системам с сосредоточенными параметрами, в то время как моделируемые схемы часто включают блоки с распределенными параметрами. Такие многополюсные блоки могут отображать как реальные подсхемы (например, линии передачи), так и учет электромагнитного взаимодействия между компонентами схемы. Основной подход к описанию такого блока заключается в аппроксимации передаточных функций (ПФ) между его портами рациональными выражениями. Значения ПФ в заданном наборе частотных точек определяются физическими измерениями или полным моделированием. К наиболее распространенным методам построения рациональных ПФ относится метод векторной аппроксимации [7] (Vector Fitting) и некоторые его обобщения [8]. Эти методы эффективны с точки зрения вычислительных затрат, но они также, как и многие проекционные методы могут приводить к избыточно высокому порядку модели. Для того чтобы избежать этого, можно предложить двухэтапный подход к задаче построения модели:

1) получение рациональных ПФ высокого порядка, заведомо обеспечивающих точность аппроксимации существенно выше требуемой;

2) минимизация порядка полученных ПФ при заданных требованиях к погрешности аппроксимации.

Для выполнения первого этапа могут применяться существующие подходы, а вопросам разработки подхода к решению задачи второго этапа посвящена данная работа.

II. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В СКАЛЯРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть задана ПФ в лапласовской области в виде отношения полиномов числителя и знаменателя:

$$H(s) = P(s)/Q(s) = \left(a_0 + \sum_{i=1}^m a_i s^i \right) / \left(b_0 + \sum_{i=1}^n b_i s^i \right). \quad (1)$$

Аппроксимирующая ПФ имеет аналогичную форму пониженного порядка:

$$\tilde{H}(s) = \tilde{P}(s)/\tilde{Q}(s) = \left(a_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i s^i \right) / \left(b_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i s^i \right). \quad (2)$$

Пусть $h(t), \tilde{h}(t)$ представляют переходные характеристики (отклики на ступенчатую функцию) для ПФ (1), (2), т.е. они являются оригиналами $H(s)/s, \tilde{H}(s)/s$ и имеют вид:

$$\begin{aligned} h(t) &= a_0/b_0 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{k_i} d_{ij} t^j \exp r_i t, \\ \tilde{h}(t) &= a_0/b_0 + \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \sum_{j=1}^{\tilde{k}_i} \tilde{d}_{ij} t^j \exp \tilde{r}_i t. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь N, \tilde{N}_i - это количества различных полюсов ПФ (1), (2), а $r_i, \tilde{r}_i, k_i, \tilde{k}_i$ - их значения и кратности, соответственно.

Предлагается определить нормализованную погрешность аппроксимации как:

$$e(\tilde{H}) = e(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{\|\Delta H\|^2}{\|H\|^2} = \frac{\int_0^\infty (h(t) - \tilde{h}(t))^2 dt}{\int_0^\infty (h(t) - h(\infty))^2 dt}. \quad (4)$$

Интеграл в числителе (4) можно рассматривать как квадрат евклидовой нормы погрешности.

Величины a_0, b_0 сохраняют свои значения для аппроксимирующей ПФ так как их отношение определяет статический уровень ($a_0/b_0 = h(\infty)$), который должен быть одинаков для обеих функций, чтобы обеспечить существование интеграла в числителе (4). Кроме того, для существования интегралов в (4) необходимо выполнение условий устойчивости $m \leq n, \tilde{m} \leq \tilde{n}, \operatorname{re}(r_i) < 0, \operatorname{re}(\tilde{r}_i) < 0$. Эти условия предполагаются справедливыми для исходной ПФ (1), а сходимость предлагаемого алгоритма обеспечивает их выполнение для аппроксимирующей ПФ (2).

Для практических целей могут быть сформулирована две задачи аппроксимации:

Задача А. Минимизировать погрешность (4) для заданных порядков числителя и знаменателя \tilde{m}, \tilde{n} :

$$e \rightarrow \min \text{ при условии: } \dim(a) = \tilde{m}, \dim(b) = \tilde{n}.$$

Задача Б. Минимизировать порядок ПФ для заданной погрешности:

$$\tilde{n} \rightarrow \min \text{ при условии: } w(\tilde{a}, \tilde{b}) \leq w_{\max}.$$

III. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Решение сформулированной задачи мы рассмотрим в два этапа. Вначале мы представим решение частной задачи определения числителя ПФ (2) при известном знаменателе. Затем будет представлено решение задачи в целом.

А. Аппроксимация ПФ при известном знаменателе

Рассмотрим случай, когда у аппроксимирующей ПФ (2) знаменатель $\tilde{Q}(s)$ известен, и требуется определить лишь коэффициенты числителя. Разность исходной (1) и аппроксимирующей (2) ПФ может быть записана в виде:

$$\Delta H = \frac{\tilde{P}(s)}{\tilde{Q}(s)} - H(s) = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i \cdot \frac{s^i}{\tilde{Q}(s)} - \left(H(s) + \frac{a_0}{\tilde{Q}(s)} \right). \quad (5)$$

Учитывая, что умножение на лапласовскую переменную s соответствует дифференцированию во временной области, можно получить временной аналог выражения (5) в виде:

$$\Delta h = \tilde{h}(t) - h(t) = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i \cdot u_i(t) - (h(t) - a_0 \cdot u_0(t)), \quad (6)$$

где $u_0(t) \rightarrow 1/\tilde{Q}(s), u_i(t) = d^i u_0/dt^i$.

Таким образом задача А сводится к классической задаче метода наименьших квадратов (МНК) в функциональном пространстве [9]:

$$\left\| \sum_{i=1}^M c_i \cdot f_i(t) - g(t) \right\| \rightarrow \min_{\{c_i\}}. \quad (7)$$

Эта задача решается стандартным алгоритмом МНК на основе ортогонализации Грамма-Шмидта:

1. Ортогонализация функций $f_i(t)$ ($i=1...M$) и формирование ортонормального базиса $z_i(t)$:

$$\langle z_i z_j \rangle = \delta_i^j, \text{ где } \delta_i^j \text{ символ Кронекера.}$$

2. Разложение $g(t)$ по найденному ортогональному базису $z_i(t)$.

3. Определение коэффициентов c_i решением линейной системы с треугольной матрицей, полученной в процессе ортогонализации на шаге 1.

Этот алгоритм может быть непосредственно применен для решения задачи А при известном знаменателе, если задать

$$c_i = \tilde{a}_i, M = \tilde{m}, f_i(t) = u_i(t), g(t) = h(t) - a_0 \cdot u(t). \quad (8)$$

Решение задачи Б при известном знаменателе может быть легко получено, если задать последовательность шагов процесса ортогонализации по возрастанию индекса $i = 1, 2, \dots$ в (8), и на каждом шаге производить оценку остаточной ошибки, прекращая процесс при достижении требуемой точности. Тогда последнее значение индекса равно минимальному порядку $i = \tilde{m}$.

Следует отметить, что вычисление скалярных произведений, необходимых для проведения ортогонализации и проектирования, не требует численного интегрирования так как интегралы вида

$$\langle f_i \cdot f_j \rangle = \int_0^\infty f_i(t) \cdot f_j(t) dt, \langle f_i \cdot g \rangle = \int_0^\infty f_i(t) \cdot g(t) dt \quad (9)$$

могут быть легко вычислены аналитически для функций вида (3) и их производных. В Приложении I приведен вывод выражений для вычисления скалярных произведений вида (9) по значениям вычетов в точках полюсов изображения одного из сомножителей.

В. Общий вычислительный алгоритм

Для решения общей задачи минимизации функции вида (4) приведенный выше алгоритм непосредственно не может быть использован из-за нелинейной зависимости ПФ от коэффициентов знаменателя. Для получения решения в этом случае можно использовать метод Гаусса-Ньютона [10], построив итерационный процесс, на каждом шаге которого производится линейризация ПФ по коэффициентам знаменателя и решается соответствующая задача МНК.

Пусть $\tilde{H}_{init}(s)$ - некоторая начальная аппроксимация ПФ. Предполагая отклонение новой аппроксимации $\tilde{H}(s)$ от предыдущей достаточно малым, запишем ее значение после линейризации как

$$\tilde{H}(s) = \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}} = \frac{\tilde{P}_{init} + (\tilde{P} - \tilde{P}_{init})}{\tilde{Q}_{init} + (\tilde{Q} - \tilde{Q}_{init})} \approx \frac{\tilde{P}_{init}}{\tilde{Q}_{init}} + \frac{\tilde{P}}{\tilde{Q}_{init}} - \frac{\tilde{P}_{init}}{\tilde{Q}_{init}^2} \tilde{Q}.$$

Тогда отклонение вида (5) запишется в виде

$$\Delta H \approx \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \frac{\tilde{a}_i s^i}{\tilde{Q}_{init}} - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \frac{\tilde{b}_i s^i \tilde{P}_{init}}{\tilde{Q}_{init}^2} - \left(H - \frac{\tilde{P}_{init} - a_0}{\tilde{Q}_{init}} + \frac{b_0 \tilde{P}_{init}}{\tilde{Q}_{init}^2} \right). \quad (10)$$

Дополнительно к функциям $u_i(t)$, определенным в (6), определим лапласовские функции $V_i(s)$ и их оригиналы $v_i(t)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \tilde{P}_{init}(s) / \tilde{Q}_{init}^2(s), V_i(s) = s^i V_0(s), \\ G(s) &= H(s) - (\tilde{P}_{init}(s) - a_0) / \tilde{Q}_{init}(s) + b_0 V_0(s), \\ v_i(t) &\rightarrow V_i(s), v_i(t) = d^i v_0 / dt^i, g(t) \rightarrow G(s). \end{aligned} \quad (11)$$

Тогда (10) во временной области примет вид

$$\Delta h = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i \cdot u_i(t) - \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{b}_i \cdot v_i(t) - g(t). \quad (12)$$

Для отклонения вида (12) задачи **A** и **B** также можно решить с помощью МНК. Для этого нужно вместо (8) задать последовательность коэффициентов в (7) как:

$$c_{2i-1} = \tilde{b}_i, f_{2i-1} = v_i, c_{2i} = \tilde{a}_i, f_{2i} = u_i \quad (i=1, 2, \dots). \quad (13)$$

Тогда после определения c_i ($i=1, \dots, N_{min}$) с помощью МНК коэффициенты числителя и знаменателя (\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) находятся из выражений (13). Порядки числителя и

знаменателя либо равны между собой ($\tilde{m} = \tilde{n} = N_{min} / 2$ для чётных N_{min}), либо отличаются на 1 ($\tilde{n} = (N_{min} + 1) / 2$, $\tilde{m} = \tilde{n} - 1$ для нечетных N_{min}).

Описанные алгоритмы для решения задач **A**, **B** можно назвать одношаговыми. Они не обеспечивают точного решения исходных задач (**A**, **B**) из-за приближенного равенства в (10), являющегося следствием линейризации. Точные решения могут быть получены применением итерационного процесса Гаусса-Ньютона. На каждой итерации для заданной начальной аппроксимации ПФ $\tilde{H}_{init}(s)$ определяется новая аппроксимация $\tilde{H}(s)$ (коэффициенты \tilde{a}_i, \tilde{b}_i) из соответствующего одношагового алгоритма (12), (13). Для выполнения следующей итерации берется $\tilde{H}_{init} = \tilde{H}$. Процесс прекращается, когда изменение ошибки (4) на шаге становится достаточно малым (критерий малости определяется пользователем).

IV. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗАДАЧИ НА ВЕКТОРНЫЙ СЛУЧАЙ

В большинстве случаев линейные блоки ИС имеют несколько портов, передача сигналов между которыми может быть определена с помощью векторной рациональной ПФ. Поэтому в этом разделе мы рассмотрим распространение предложенного подхода на векторный случай. При этом предполагается [7], что блок является единой динамической системой с общим набором полюсов, и поэтому векторная задача предполагает одинаковый знаменатель для всех ПФ. То есть исходная и аппроксимирующая ПФ представляют собой вектора из K компонентов вида

$$H^{(k)}(s) = P^{(k)}(s) / Q(s), \tilde{H}^{(k)}(s) = \tilde{P}^{(k)}(s) / \tilde{Q}(s),$$

где $Q(s), \tilde{Q}(s)$ имеют такой же вид, как в (1), (2), а

$$P^{(k)}(s) = a_0^{(k)} + \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} s^i, \tilde{P}^{(k)}(s) = a_0^{(k)} + \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i^{(k)} s^i$$

Задачей аппроксимации является определение коэффициентов $\tilde{b}_i, \tilde{a}_i^{(k)}$ ($k=1, \dots, K$), обеспечивающих минимум отклонения

$$e(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{k=1}^K w_k^2 \left\| \Delta H^{(k)} \right\|^2 = \sum_{k=1}^K \left\| w_k \cdot \Delta H^{(k)} \right\|^2 \rightarrow \min. \quad (14)$$

Здесь w_k - весовые коэффициенты, а $\left\| \Delta H^{(k)} \right\|^2$ соответствует числителю выражения (4). В (14) мы не используем относительную погрешность (4) так как множитель вида $1 / \left\| H^{(k)} \right\|^2$ можно учесть в значении w_k .

Для решения задачи (14) запишем линеаризованное выражение вида (12) для временной погрешности k -й компоненты векторной переходной характеристики (оригинала $H^{(k)}(s)/s$)

$$\Delta h^{(k)} = \sum_{i=1}^{\tilde{m}} \tilde{a}_i^{(k)} \cdot u_i^{(k)}(t) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i \cdot v_i(t) - g^{(k)}(t). \quad (15)$$

Здесь $u_i^{(k)}(t)$, $g^{(k)}(t)$ определяются так же, как $u_i(t)$, $g(t)$ в (6), (8) при замене $P(s)$ на $P^{(k)}(s)$, а $v_i(t)$ сохраняют свое определение из (11). Теперь определим следующие вектора размера K

$$\begin{aligned} \Delta \bar{h}(t) &= \{w_1 \cdot \Delta h^{(1)}(t), \dots, w_K \cdot \Delta h^{(K)}(t)\}, \\ \bar{g}(t) &= \{w_1 \cdot g^{(1)}(t), \dots, w_K \cdot g^{(K)}(t)\}, \\ \bar{v}_i(t) &= \{w_1 \cdot v_i(t), \dots, w_K \cdot v_i(t)\}, \\ \bar{u}_{ik}(t) &= \{0, \dots, w_k \cdot u_i^{(k)}(t), \dots, 0\} \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что в векторе $\bar{u}_{ik}(t)$ ненулевой является лишь k -я компонента вектора.

С учетом (16) равенство (15) эквивалентно

$$\Delta \bar{h}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{\tilde{m}_k} \tilde{a}_i^{(k)} \cdot \bar{u}_{ik}(t) - \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \tilde{b}_i \cdot \bar{v}_i(t) - \bar{g}(t), \quad (17)$$

а задача оптимизации (14) представляется как

$$e(\tilde{a}, \tilde{b}) = \|\Delta \bar{h}(t)\|^2 \rightarrow \min_{\tilde{a}, \tilde{b}}, \quad (18)$$

где $\|\Delta \bar{h}(t)\|^2$ евклидова норма вектора $\Delta \bar{h}(t)$.

Задача (17), (18) также является стандартной задачей МНК аппроксимации вектора $\bar{g}(t)$. Для ее решения методом ортогонализации не нужно формировать полные вектора (16), а достаточно получить значения их скалярных произведений, которые, как легко убедиться, представляются в виде

$$\begin{aligned} \langle \bar{u}_{ik} \cdot \bar{u}_{jn} \rangle &= \delta_n^k \langle u_{ik} \cdot u_{jk} \rangle, \langle \bar{u}_{ik} \cdot \bar{v}_j \rangle = \langle u_{ik} \cdot v_j \rangle, \\ \langle \bar{v}_i \cdot \bar{v}_j \rangle &= K \langle v_i \cdot v_j \rangle, \langle \bar{v}_i \cdot \bar{g} \rangle = \sum_{k=1}^K \langle v_i \cdot g^{(k)} \rangle. \end{aligned}$$

Последовательность обработки векторов в процессе ортогонализации, обеспечивающая решение задачи Б, должна быть следующей

$$\begin{aligned} &\bar{v}_1(t), \bar{u}_{1,1}(t), \bar{u}_{1,2}(t), \dots, \bar{u}_{1,K}(t), \\ &\bar{v}_2(t), \bar{u}_{2,1}(t), \bar{u}_{2,2}(t), \dots, \bar{u}_{2,K}(t), \\ &\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ &\dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \\ &\bar{v}_{\tilde{n}}(t), \bar{u}_{\tilde{n},1}(t), \bar{u}_{\tilde{n},2}(t), \dots, \bar{u}_{\tilde{n},K}(t). \end{aligned}$$

V. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проверки предложенного подхода была разработана экспериментальная программа редуцирования скалярных ПФ. Ее применение к ряду тестовых задач подтвердило практическую эффективность представленных алгоритмов. Тестовые примеры включали как активные (усилительные), так и пассивные (RC, RLC) схемы с различным распределением полюсов ПФ. Производилось сравнение с другими известными методами редуцирования. Оценивались такие свойства алгоритма как сохранение устойчивости схем со сложными частотными ПФ и способность к автоматическому получению порядка модели. Тестовые примеры включали как активные, так и пассивные схемы с действительными и комплексно-сопряженными полюсами ПФ.

Таблица 1

Результаты тестов. Порядок и погрешность редуцированных передаточных функций

Исх. ПФ	Значения допуска:							
	10^{-1}		10^{-3}		10^{-5}		10^{-7}	
m/n	m/n	%	m/n	%	m/n	%	m/n	%
4/12	3/3	70	2/8	30	4/8	3	6/10	6
6/10	0/1	30	1/7	4	2/8	10	4/10	20
0/17	1/2	20	3/3	90	3/5	50	4/6	40
0/22	0/1	90	1/3	50	2/3	70	3/3	40

Табл. 1 содержит результаты редуцирования порядка ПФ (задача Б) для некоторых тестовых схем. Для каждой схемы указаны в виде m/n порядки ее числителя (m) и знаменателя (n). Далее в строке приведены характеристики редуцированной ПФ для различных значений допустимой погрешности: порядки числителя/знаменателя и величина погрешности в процентах от допуска. Схемы, представленные в таблице (в порядке следования строк):

1. RLC эквивалент длинной линии [11].
2. RLC эквивалент длинной линии [12].
3. RC-дерево [13].
4. Операционный усилитель $\mu a741$.

На рис. 1 для двух значений допусков схемы 2 приведены графики полученных ПФ.

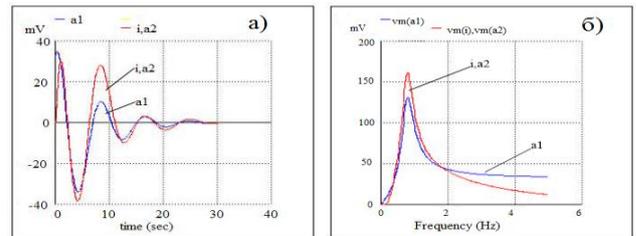


Рис. 1. Временные (а) и частотные (б) графики исходной (i) и редуцированных ПФ примера 2 с допусками 10^{-1} (a1) и 10^{-7} (a2)

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен новый подход к задаче редуцирования рациональной ПФ. Подход основан на минимизации погрешности аппроксимации исходной ПФ. Основное назначение процедуры – генерация макромодели минимального порядка, обеспечивающей требуемую точность. Для оценки погрешности аппроксимации используется нормализованная интегральная среднеквадратичная ошибка временного отклика, благодаря чему от пользователя не требуется задания множества узловых точек. Алгоритм реализации разработанного метода основан на итерационном процессе Гаусса-Ньютона.

В рамках предложенного подхода рассмотрено решение двух типов аппроксимационных задач:

- минимизация погрешности аппроксимации при заданном порядке редуцированной модели;
- минимизация порядка модели при заданном допуске на погрешность аппроксимации.

Представлено обобщение разработанного метода на случай векторной ПФ.

Численные расчеты на тестовых примерах различных типов подтвердили эффективность предложенного подхода.

VII. ПРИЛОЖЕНИЕ I. РАСЧЕТ СКАЛЯРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ОРИГИНАЛОВ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯМ ЛАПЛАСА

Здесь мы выведем формулы для расчета скалярных произведений вида (9) по соответствующим изображениям. Рассмотрим скалярное произведение функций $e(t)$ и $r(t)$

$$\langle e \cdot r \rangle = \int_0^{\infty} e(t) \cdot r(t) dt. \quad (19)$$

Обозначим $p(t) = e(t) \cdot r(t)$ и

$$w(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau = \int_0^t e(\tau) \cdot r(\tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\text{тогда из (19) имеем: } \langle e \cdot r \rangle = w(\infty). \quad (21)$$

Пусть изображения функций $e(t)$, $r(t)$, $p(t)$, $w(t)$ имеют соответственно вид $E(s)$, $R(s)$, $P(s)$, $W(s)$. Тогда, учитывая, что интегрирование оригинала по времени соответствует делению изображения на s [14], получим из (20):

$$W(s) = \frac{P(s)}{s} \text{ или } P(s) = s \cdot W(s). \quad (22)$$

Учитывая, что для любых функций $f(t) \rightarrow F(s)$ справедливо [14]: $\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$, получим из (22), (21)

$$\langle e \cdot r \rangle = w(\infty) = P(0). \quad (23)$$

Из теоремы умножения оригиналов [14], получаем

$$p(t) = e(t) \cdot r(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} E(z) \cdot R(s-z) dz = P(s),$$

откуда, учитывая (23), получаем

$$\langle e \cdot r \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{\lambda-j\infty}^{\lambda+j\infty} E(z) \cdot R(-z) dz. \quad (24)$$

Мы рассматриваем рациональные функции, в которых порядок числителя меньше порядка знаменателя, откуда следует, что функция $E(s)V(s)$ имеет порядок $1/s^2$, поэтому можно взять $\lambda=0$ в (24) и получить

$$\langle e \cdot r \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} E(z) \cdot R(-z) dz. \quad (25)$$

Для вычисления (25) можно использовать теорему о вычетах

$$\langle e \cdot r \rangle = \frac{1}{2\pi j} \oint F(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n \text{Res } F(z), \quad (26)$$

$$\text{где } \text{Res } F(a) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^m} [(z-a)^m \cdot F(z)]. \quad (27)$$

Контур интегрирования в (26) можно выбрать в виде полуокружности (рис. 2).

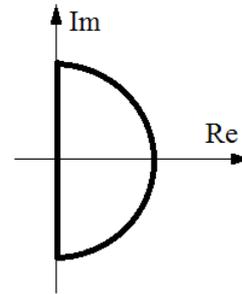


Рис. 2. Контур интегрирования на комплексной плоскости для вычисления интеграла (26)

Полюса подынтегральной функции внутри контура совпадают с полюсами рациональной функции $V(-z)$, т.е. они равны $-s_k$. Полюса функции $E(z)$ расположены в левой полуплоскости и в данную область – на рис. 1 не попадают. Это является следствием устойчивости рассматриваемых ПФ, для которых все полюса имеют отрицательные действительные части.

При достаточно большом радиусе полуокружности интегралом по дуге на рис. 1 можно пренебречь вследствие порядка $1/s^2$ подынтегральной функции и получить окончательное выражение

$$\langle e \cdot r \rangle = \sum_{k=1}^n \text{Res } E(z_k) \cdot V(-z_k). \quad (28)$$

Следовательно, для вычисления скалярного произведения (9) достаточно вычислять значение исходной передаточной функции и некоторого количества ее производных (в соответствии с (27)) в точках отрицательных полюсов текущей рациональной аппроксимации. Отметим, что из приведенного вывода выражения (28) следует, что оно справедливо и применимо, в случае, когда $E(s)$ не является рациональной функцией.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Grimme E. Krylov Projection Methods for Model Reduction. PhD thesis. - Urbana-Champaign: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1997.
- [2] Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L.T.: PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. - 1998. - Vol. 17.- No 8 - P. 645–654.
- [3] Elfadel I.M., Ling D. L. A block rational Arnoldi algorithm for multipoint passive model-order reduction of multiport RLC networks // in Proc. Int. Conf. Comput.-Aided Des. - Nov. 1997. - P. 66–71.
- [4] Heres P.J., Schilders W.H.A. Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction. / In A. Anile, G. Ali and G. Mascali, editors. Scientific Computing in

Electrical Engineering, Vol. 9. - Berlin Heidelberg:Springer, 2006.

- [5] Phillips J. R., Silveira L. M. Poor Man's TBR: A simple model reduction scheme // IEEE Trans. Computer-Aided Design. - 2005. - Vol. 24. - No. 1. - P. 43-55.
- [6] Gourary M. M., Zharov M. M., Ulyanov S.L. Model Order Reduction by State Vector Selection (SVS) Approach // European Conf. on Circuit Theory and Design, Dresden, September 2013, paper 79.
- [7] Gustavsen B. and Semlyen A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting // IEEE Trans. Power Delivery- 1999. - vol. 14. - No. 3. - P. 1052-1061.
- [8] Hendrickxa W., Deschrijverb D., Knockaertb L., Dhaeneb T., Magnitude Vector Fitting to interval data // Mathematics and Computers in Simulation. – 2009. - vol. 80. - No. 3. – P. 572–580.
- [9] Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1972. - 400 с.
- [10] Крянев А.В., Лукин Г.В., Удудян Д.К. Метрический анализ и обработка данных. - М.: Физматлит, 2012. - 280 с.
- [11] Liao H., Dai W., Capturing Time-of-Flight Delay for Transient Analysis Based on Scattering Parameter Macromodel // in Proc. of the Euro-DAC, 1994., P.412-417.
- [12] Nguen T.V., Efficient Simulation of Lossy and Dispersive Transmission Lines // Proc. of the 31th ACM/IEEE Design Automation Conf., 1994, P. 622-627.
- [13] Liao H., Dai W., Chang F.Y. S-Parameter Based Macro Model of Distributed-Lumped Networks Using Exponentially Decayed Polynomial function // Proc. of the 30th ACM/IEEE Design Automation Conf., 1993, P. 726-731.
- [14] Александров И.А. Операционное исчисление и его применения. - Томск : Издательство ТГУ, 2013. - 143 с.

Rational Transfer Functions Approximation on the Base of Integral Accuracy Criterion

M.M. Gourary, S.L. Ulyanov, M.M. Zharov, L.S. Khodosh

Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences (IPPM RAS),
gourary@ippm.ru

Keywords — linear system, macromodel, transfer function, noise analysis, rational approximation, circuit simulation

examples presented in the paper confirm the method efficiency.

ABSTRACT

The paper presents a new approach to the construction of reduced linear system in the form of rational transfer functions. The approach is based on the minimization of approximation error defined by an integral criterion. The approach modification aimed at the model order minimization under the given error norm is also provided. The approach extension to the case of vector transfer functions is considered. The developed computational algorithm is based on the Gauss-Newton method. Testing

REFERENCES

- [1] Grimme E. Krylov Projection Methods for Model Reduction. PhD thesis. University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, IL, 1997.
- [2] Odabasioglu A., Celik M., Pileggi L.T.: PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm. IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 17, No 7, P. 645–654, 1998.
- [3] Elfadel I.M., Ling D. L. A block rational Arnoldi algorithm for multipoint passive model-order reduction of multiport

- RLC networks. in Proc. Int. Conf. Comput.-Aided Des., Nov. 1997, P. 66–71.
- [4] Heres P.J., Schilders W.H.A. Orthogonalisation in Krylov subspace methods for model order reduction. In A. Anile, G. Ali and G. Mascali, editors. Scientific Computing in Electrical Engineering, Vol. 9, Berlin Heidelberg:Springer, 2006.
- [5] Phillips J. R., Silveira L. M. Poor Man's TBR: A simple model reduction scheme. IEEE Trans. Computer-Aided Design, Vol. 24, No. 1, P. 43-55, 2005.
- [6] Gourary M. M., Zharov M. M., Ulyanov S.L. Model Order Reduction by State Vector Selection (SVS) Approach. European Conf. on Circuit Theory and Design, Dresden, September 2013, paper 79.
- [7] Gustavsen B. and Semlyen A., Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting, IEEE Trans. Power Delivery, vol. 14, No. 3, P. 1052-1061, 1999.
- [8] Hendrickxa W., Deschrijverb D., Knockaertb L., Dhaeneb T., Magnitude Vector Fitting to interval data. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 80, No. 3, P. 572–580, 2009.
- [9] Hemming R.V., Chislennye metody dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. Moscow, Nauka publ., 1972, 400 p. (in Russian).
- [10] Krjaneev A.V., Lukin G.V., Udumjan D.K., Metricheskij analiz i obrabotka dannyh, Moscow, Fizmatlit publ., 2012, 280 p. (in Russian).
- [11] Liao H., Dai W., Capturing Time-of-Flight Delay for Transient Analysis Based on Scattering Parameter Macromodel, in Proc. of the Euro-DAC, P. 412-417, 1994.
- [12] Nguen T.V., Efficient Simulation of Lossy and Dispersive Transmission Lines, Proc. of the 31th ACM/IEEE Design Automation Conf., P. 622-627, June 1994.
- [13] Liao H., Dai W., Chang F.Y.. S-Parameter Based Macro Model of Distributed-Lumped Networks Using Exponentially Decayed Polynomial function. Proc. of the 30th ACM/IEEE Design Automation Conf., P. 726-731, June 1993.
- [14] Aleksandrov I.A., Operacionnoe ischislenie i ego primenenija, TGU publ., Tomsk, 2013, 143 p. (in Russian).