

Аппроксимация центрального распределения хи-квадрат для оперативного расчета вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя

В.А. Лесников¹, А.В. Частиков², Т.В. Наумович³, Д.В. Дубовцев⁴

Вятский государственный университет

¹Vladislav.Lesnikov.RU@ieee.org, ²alchast@mail.ru, ³ntv_new@mail.ru, ⁴dimonetheone@ya.ru

Аннотация — Несмотря на простоту реализации энергетического обнаружителя в системах когнитивного радио, его применение ограничивается необходимостью априорной информации об уровне шума. При отсутствии такой информации требуется тем или иным способом оценивать дисперсию шума и пересчитывать порог обнаружения по уровню ложной тревоги. Статистика, сравниваемая с порогом при отсутствии сигнала, имеет центральное распределение хи-квадрат. Для оперативного вычисления порога использование этого распределения представляет сложности, поэтому представляет интерес аппроксимация распределения хи-квадрат. В данном докладе рассмотрены различные аппроксимации и проведена оценка точности.

Ключевые слова — когнитивное радио, энергетический обнаружитель, центральное распределение хи-квадрат.

I. ВВЕДЕНИЕ

В условиях дефицита частотных ресурсов большой интерес представляют когнитивные сети, которые имеют возможность передавать свои данные на некоторых интервалах времени на незанятых полосах частот [1, 2]. При этом эти полосы частот могут быть закреплены за лицензированными первичными пользователями. Одним из процессов работы когнитивных сетей является спектральное восприятие (Spectrum Sensing), одной из задач которого является обнаружение незанятых полос частот и своевременное обнаружение начала работы первичных пользователей в этой полосе для ее освобождения [2-5].

Очень часто для решения задачи обнаружения используется алгоритм энергетического обнаружения, характеризующийся простотой реализации и возможностью работы при отсутствии априорной информации о сигнале. Однако энергетический обнаружитель для установки порога обнаружения требует знаний о дисперсии шума. При отсутствии таких знаний необходимо производить оценку этого параметра и для нее рассчитывать значение порога в процессе работы обнаружителя. Если шум – аддитивный белый гауссовский с нулевым средним, то с порогом сравнивается статистика, которая имеет центральное распределение хи-квадрат. Однако расчет

порога обнаружения при этом в оперативном режиме затруднителен.

В данном докладе исследуются различные аппроксимации центрального распределения хи-квадрат, которые позволят упростить оперативное решение задачи вычисления порога обнаружения.

II. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ

Задача обнаружения при спектральном восприятии в когнитивных сетях рассматривается как задача проверки по результатам оценивания вектора принятых отсчетов

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{M-1}]^T \quad (1)$$

двух альтернативных статистических гипотез:

$$\begin{cases} H_0 - \text{сигнал первичного пользователя} \\ \hspace{10em} \text{отсутствует,} \\ H_1 - \text{сигнал первичного пользователя} \\ \hspace{10em} \text{присутствует.} \end{cases} \quad (2)$$

Последовательность входных отсчетов представим в следующем виде

$$\mathbf{x} = \theta \mathbf{s} + \mathbf{w}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{M-1}]^T \quad (4)$$

– вектор комплексных отсчетов белого гауссовского шума:

$$w_k \sim N\{0, \sigma_w^2\}, \quad (5)$$

$$\mathbf{s} = [s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{M-1}]^T \quad (6)$$

– вектор комплексных отсчетов обнаруживаемого сигнала,

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{w}, \\ 1, & \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{s} \end{cases} \quad (7)$$

– параметр, оцениваемый при решении задачи обнаружения. В большом количестве алгоритмов обнаружения оценка этого параметра вычисляется путем сравнения некоторой статистики $T(\mathbf{x}, M)$ с порогом η [6, 7]:

$$\hat{\theta} = \begin{cases} 0, & \text{при } T(\mathbf{x}, M) < \eta, \\ 1, & \text{при } T(\mathbf{x}, M) \geq \eta. \end{cases} \quad (8)$$

Энергетический обнаружитель использует для сравнения с порогом следующую статистику [7-8]:

$$T(\mathbf{x}, M) = \sum_{k=0}^{M-1} |x_k|^2 = \sum_{k=0}^{M-1} (\text{Re}^2 x_k + \text{Im}^2 x_k). \quad (9)$$

Эта статистика описывается центральным распределением хи-квадрат с $\nu = 2M$ степенями свободы, характеризующимся [9] плотностью вероятности

$$f_{\chi_v^2(\sigma^2)}(t) = \frac{t^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2} \sigma^\nu \Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right), \quad (10)$$

и функцией вероятности

$$F_{\chi_v^2(\sigma^2)}(t) = 1 - e^{-t/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{2\sigma^2}\right)^k, \quad (11)$$

где $t \in [0; +\infty)$,

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty \zeta^{u-1} e^{-\zeta} d\zeta \quad (12)$$

– полная гамма-функция. Если u – целое число, то

$$\Gamma(u) = (u-1)!. \quad (13)$$

III. АППРОКСИМАЦИЯ НОРМАЛЬНЫМ И ЛОГНОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

A. “Простая” гауссова аппроксимация

Известно, что при увеличении параметра ν распределение χ_v^2 приближается к нормальному распределению. На этом факте основана широко используемая аппроксимация распределения χ_v^2 гауссовским распределением [9, 10]:

$$\chi_v^2(1) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} N(\nu, 2\nu), \quad (14)$$

$$\chi_v^2(\sigma^2) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} N(\nu\sigma^2, 2\nu\sigma^4). \quad (15)$$

Используя эту аппроксимацию, получим приближенные распределения для статистик:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}, M) \Big|_{H_0} &\sim \chi_{2M}^2(\sigma_w^2) \rightarrow \\ &\rightarrow N\left(2M\sigma_w^2, 4M(\sigma_w^2)^2\right) = \\ &= N\left(2M\sigma_w^2, 4M\sigma_w^4\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Плотность вероятности при такой аппроксимации определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} f_{\chi_v^2(\sigma^2)}(t) &\approx f_{\chi_v^2(\sigma^2)}^{\{N\}}(t) = f_{N(\nu\sigma^2, 2\nu\sigma^4)}(t) = \\ &= \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\nu} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - \nu\sigma^2)^2}{4\nu\sigma^4}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

а функция вероятности равна:

$$\begin{aligned} F_{\chi_v^2(\sigma^2)}(t) &\approx F_{\chi_v^2(\sigma^2)}^{\{N\}}(t) = F_{N(\nu\sigma^2, 2\nu\sigma^4)} = \\ &= 0.5 \left(1 + \text{erf}\left(\frac{t - \nu\sigma^2}{2\sigma^2 \sqrt{\nu}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{t - \nu\sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{2\nu}}\right). \end{aligned} \quad (18)$$

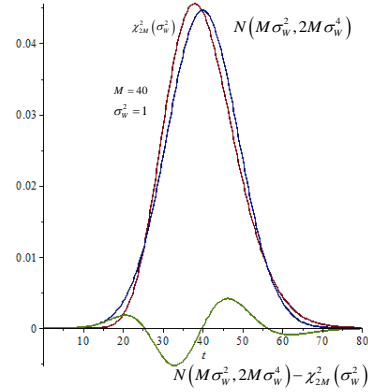


Рис. 1. Сравнение плотностей вероятности распределений χ_v^2 и (17)

B. Аппроксимация Фишера

Аппроксимация Фишера (Fisher) основана на том, что распределение $\sqrt{2\chi_v^2}$ при увеличении ν приближается к нормальному [11]:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) = F_{N(0,1)}(\sqrt{2t} - \sqrt{2\nu-1}). \quad (19)$$

Известны также эквивалентные представления аппроксимации. В [12] аппроксимация Фишера дана в виде:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) = F_{N(\sqrt{2\nu-1},1)}(\sqrt{2t}). \quad (20)$$

В [13] дано эквивалентное представление аппроксимации Фишера в виде:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) = F_{N(\sqrt{\nu-0.5},0.5)}(\sqrt{t}). \quad (21)$$

На рис. 2 показана ошибка аппроксимации Фишера (19).

$$\varepsilon_F = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) \quad (22)$$

C. Аппроксимация Вильсона-Хилферти

Аппроксимация Вильсона-Хилферти (Wilson and Hilferty), основанная на том, что распределение $\sqrt[3]{\chi_v^2}$

при увеличении ν приближается к нормальному, имеет вид [14]:

$$\begin{aligned} F_{\chi_v^2(1)}(t) &\approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{WH1\}}(t) = F_{N\left(\sqrt[3]{\nu/2-1/3}, \frac{1}{9\sqrt[3]{\nu/2-1/3}}\right)}(\sqrt[3]{0.5t}) = \\ &= F_{N\left(\sqrt[3]{\nu-2/3}, \frac{2}{9\sqrt[3]{\nu-2/3}}\right)}(\sqrt[3]{t}). \end{aligned} \quad (23)$$

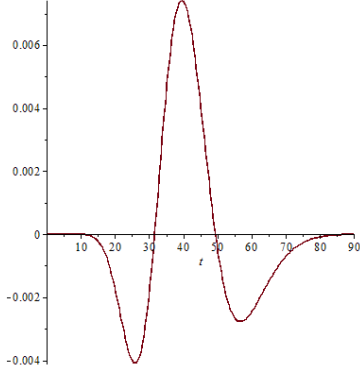


Рис. 2. Ошибка аппроксимации ε_F

На рис. 3 показана ошибка аппроксимации (23):

$$\varepsilon_{WH1} = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{\{WH1\}}(t). \quad (24)$$

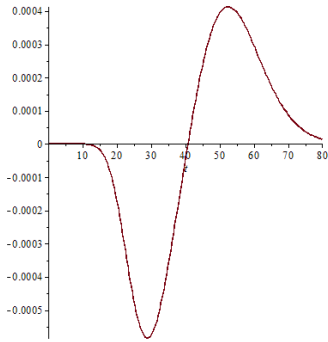


Рис. 3. Ошибка аппроксимации ε_{WH1}

В [14] дана еще одна аппроксимация, основанная на том, что $\sqrt[3]{t/\nu}$ стремится к нормальному:

$$\begin{aligned} F_{\chi_v^2(1)}(t) &\approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{WH2\}}(t) = \\ &= F_{N(0,1)}\left(\frac{\sqrt[3]{t/\nu} - \mu_N}{\sigma_N}\right) = F_{N(\mu_N, \sigma_N)}(\sqrt[3]{t/\nu}), \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\mu_N = 1 - 2/9\nu, \quad (26)$$

$$\sigma_N^2 = 2/9\nu. \quad (27)$$

В [13] аппроксимация Вильсона-Хилферти имеет вид:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{WH3\}}(t) = F_{N(\mu_N, 2/9\nu)}\left(\frac{x - \mu_N}{\sigma_N}\right), \quad (28)$$

где μ_N и σ_N определяются соотношениями (26) и (27). При $x = \sqrt[3]{t/\nu}$ это представление совпадает с (25).

На рис. 4 представлена ошибка аппроксимации (24) распределения χ_v^2 :

$$\varepsilon_{WH2} = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{\{WH2\}}(t). \quad (29)$$

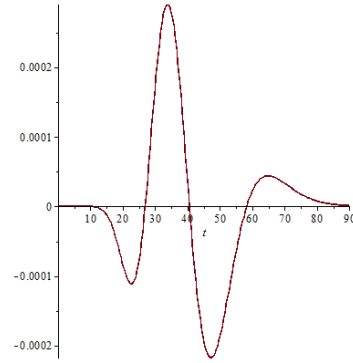


Рис. 4. Ошибка аппроксимации ε_{WH2}

D. Аппроксимация Келли

Аппроксимация Келли (Kelley) имеет вид [11]:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{K\}}(t) = F_{N(0,1)}\left(\frac{z + 8z^5}{100\nu^3}\right), \quad (30)$$

где

$$z = \frac{\sqrt[3]{t/\nu} - \mu_N}{\sigma_N}, \quad (31)$$

а μ_N и σ_N определяются соотношениями (26) и (27).

Ошибка аппроксимации Келли очень близка к ошибке аппроксимации Вильсона-Хилферти, поэтому на рис. 5 представлена разность ошибки аппроксимации (30)

$$\varepsilon_K = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{\{K\}}(t) \quad (32)$$

и ε_{WH1} .

E. Аппроксимация Хокинса-Виксли

Аппроксимация Хокинса-Виксли (Hawkins and Wixley) [15] основана на аппроксимации корня четвертой степени распределения χ_v^2 :

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{HW\}}(t) = F_{N(\mu_N, \sigma_N)}\left(\frac{\sqrt[4]{t} - \mu_N}{\sigma_N}\right), \quad (33)$$

где

$$\mu_N = 1 - \frac{3}{16\nu} - \frac{7}{512\nu^2} + \frac{231}{8192\nu^3}, \quad (34)$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{8\nu} + \frac{3}{128\nu^2} - \frac{23}{1024\nu^3}. \quad (35)$$

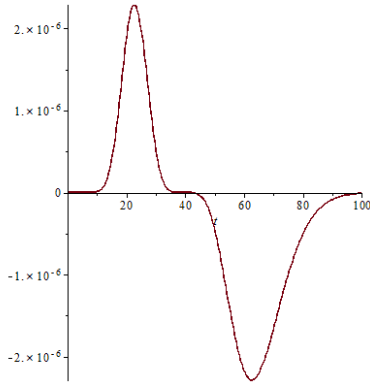


Рис. 5. Разность ошибок аппроксимации $\varepsilon_K - \varepsilon_{WH1}$

На рис. 6 показана ошибка аппроксимации (33) распределения χ_v^2 :

$$\varepsilon_{HW} = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{(HW)}(t). \quad (36)$$

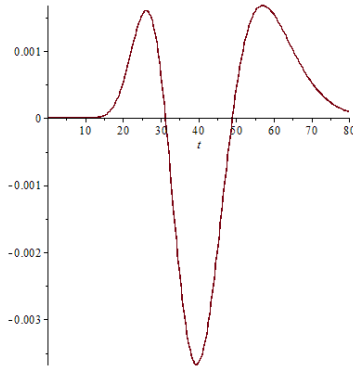


Рис. 6. Ошибка аппроксимации ε_{HW}

F. Аппроксимация Пэйзера-Прэтта

Аппроксимация Пэйзера-Прэтта (Peizer and Pratt) [16] имеет вид:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{(PP)}(t) = \begin{cases} F_{N(0,1)}\left(-\frac{1/3 + 0.08/v}{\sqrt{2v-2}}\right), & \text{при } t = v-1, \\ F_{N(0,1)}\left(\frac{t-v + 2/3 - 0.08/v}{|t-(v-1)|}\right) * & \text{при } t \neq v-1. \end{cases} \quad (37)$$

$$* \sqrt{(v-1) \ln \frac{v-1}{t} + t - (v-1)},$$

На рис. 7 представлена ошибка аппроксимации (37) распределения χ_v^2 :

$$\varepsilon_{PP} = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{(PP)}(t). \quad (38)$$

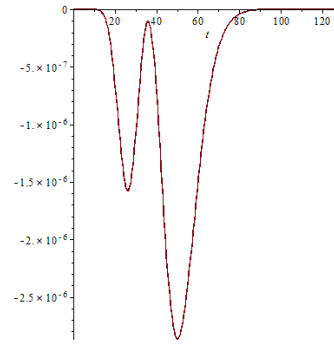


Рис. 7. Ошибка аппроксимации ε_{PP}

G. Аппроксимация Канал

Аппроксимация Канал (Canal) [17]:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{N(0,1)}^{(Can)}\left(\frac{x - \mu_N}{\sigma_N}\right) = F_{N(\mu_N, \sigma_N^2)}^{(Can)}(x), \quad (39)$$

где

$$\mu_N = \frac{5}{6} - \frac{1}{9v} - \frac{7}{648v^2} + \frac{25}{2187v^3}, \quad (40)$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{18v} + \frac{3}{162v^2} - \frac{37}{11664v^3}, \quad (41)$$

$$x = \sqrt[6]{t/v} - \frac{\sqrt[3]{t/v}}{2} + \frac{\sqrt{t/v}}{3}. \quad (42)$$

На рис. 8 представлена ошибка аппроксимации (39) распределения χ_v^2 :

$$\varepsilon_{Can} = F_{\chi_v^2(1)}(t) - F_{\chi_v^2(1)}^{(Can)}(t). \quad (43)$$

H. Аппроксимация распределения логнормальным распределением

В [18] предлагается использовать аппроксимацию распределения χ^2 логарифмически нормальным распределением

$$\chi_v^2 \xrightarrow{v \rightarrow \infty} \text{LogN}(\mu_L, \sigma_L^2), \quad (44)$$

где

$$\sigma_L^2 = \ln(1 + 2/v), \quad (45)$$

$$\mu_L = \ln v - 0.5\sigma_L^2. \quad (46)$$

Выражение для функции вероятности при этом имеет вид:

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\text{LogN}(\mu_L, \sigma_L^2)}^{(J)}(t). \quad (47)$$

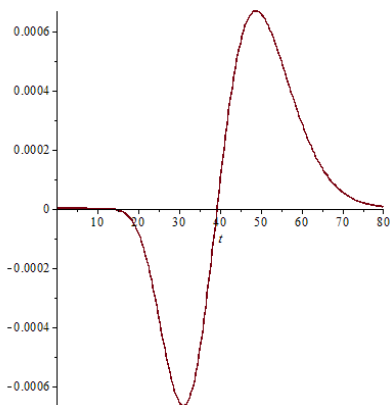


Рис. 8. Ошибка аппроксимации ε_{Can}

На рис. 9 представлена ошибка аппроксимации (47) распределения χ^2 :

$$\varepsilon_J = F_{\chi^2(1)}(t) - F_{\text{LogN}(\mu_L, \sigma_L^2)}^{(J)}(t). \quad (48)$$

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе описаны различные аппроксимации распределения хи-квадрат и представлены оценки точности аппроксимации. Приведенные аппроксимационные формулы адаптированы для использования разработчиками энергетических обнаружителей систем когнитивного радио с оперативным оцениванием уровня шума. Данную работу предполагается продолжить в области исследования точности вычисления порога обнаружения и влияния аппроксимации на характеристики обнаружения, а также для оценки сложности реализации аппроксимационных алгоритмов. Окончательный вывод о выборе того или иного способа аппроксимации должен сделать разработчик после учета всех упомянутых факторов.

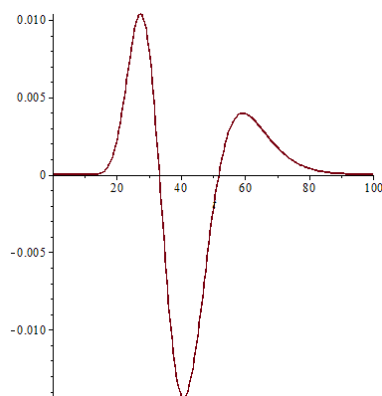


Рис. 9. Ошибка аппроксимации ε_J

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания Минобрнауки № 8.586.2014/К.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Cognitive Networks: Applications and Deployments / Ed. by J.L. Mauri, K.Z. Ghafoor, D.B. Rawat, J.M.A. Perez. Boca Raton, FL: CRC Press. 2015. – 496 p.
- [2] Лесников В.А., Романов С.В., Частиков А.В., Дубовцев Д.В. Стек протоколов когнитивных ad-hoc сетей // Научное обозрение. 2013. № 2. С. 103-109.
- [3] Y. Zeng, Y.-C. Liang, A. T. Hoang, R. Zhang. A review on spectrum sensing for cognitive radio: Challenges and solutions // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. 2010. Article ID 381465. 15 p.
- [4] Yücek T., Arslan H. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications // IEEE Communications Surveys and Tutorials. 2009. V. 11. № 1/ P. 116–130.
- [5] Ariananda D.D., Lakshmanan M. K., Nikookar H. A survey on spectrum sensing techniques for cognitive radio // Proceedings of the 2nd International Workshop on Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART 2009). 2009. P. 74–79.
- [6] Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио. 1966. - 678 с.
- [7] Шахтарин Б. И. Обнаружение сигналов. М.: Гелиос АРВ. 2006. – 488 с.
- [8] Urkowitz H. Energy detection of unknown deterministic signals // Proceedings of the IEEE. 1967. V. 55. № 4. P. 523–531.
- [9] Atapattu S., Tellambura C., Hai Jiang. Energy Detection for Spectrum Sensing in Cognitive Radio. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, - 2014. - 96 p.
- [10] Lopez-Benitez M., Casadevall F. Improved energy detection spectrum sensing for cognitive radio. - Postprint of a paper submitted to and accepted for publication in IET Communications (Special issue on Cognitive Communications), 35 p., 2012, [Online:], available: http://www.grcm.tsc.upc.edu/sites/default/files/IET_Comms_2012.pdf
- [11] Brown J.R. Error analysis of some normal approximations to the chi-square distribution // Journal of the Academy of Marketing Science. 1974. V. 2. № 1-4. P. 447-454.
- [12] Fisher R. A. Statistical methods for research workers, 5th ed. - Edinburgh: Oliver and Boyd. - 1934. – 319 p.
- [13] Chi-square distribution, Math Wiki, URL: http://math.wikia.com/wiki/Chi-square_distribution
- [14] Wilson E.B., Hilferty M.M. The distribution of chi-square // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1931. V. 17. № 12. P. 684–688. URL: <http://www.pnas.org/content/17/12/684.full.pdf>
- [15] Patel J.K., Read C.B. Handbook of the normal distribution, 2nd edition. New York: Marcel Dekker, Inc. 1996. 456 p.
- [16] Peizer D.B., Pratt J.W. A normal approximation for binomial, F, beta and other common related tail probabilities, I // Journal of the American Statistical Association. 1968. V. 63. № 324. P. 1416–1456.
- [17] Canal L. A normal approximation for the chi-square distribution // Computational Statistics & Data Analysis. 2005. V. 48. Issue 4. P. 803–808.
- [18] Jouini W., Le Guennec D., Moy C., Palicot J. Log-Normal approximation of Chi-square distributions for signal processing // Proceedings of 30th URSI General Assembly and Scientific Symposium. 2011. – 4 p.

Approximation of the central Chi-square distributions for on-line computation of the false alarm probability for energy detector

V. Lesnikov¹, A. Chastikov², T. Naumovich³, D. Dubovcev⁴

Vyatka State University, Kirov, Russia

¹Vladislav.Lesnikov.RU@ieee.org, ²alchast@mail.ru, ³ntv_new@mail.ru, ⁴dimonetheone@ya.ru

Keywords — Cognitive radio, energy detector, false alarm probability, central Chi-square distributions.

ABSTRACT

Despite the simplicity of the energy detector, its use in cognitive radio systems is limited by the need of a priori information about the noise level. In the absence of such information it is necessary to estimate the variance of the noise in one way or another and recalculate the threshold of detection on false alarm. The statistics compared to threshold in the absence of signal has central chi-square distribution. As on-line calculation of the threshold using this distribution is rather complex, it is therefore of interest to approximate the distribution of Chi-square.

This paper describes the following approximations:

- Normal approximations:
 - Simple normal approximation [9], [10],
 - Fisher approximation [12],
 - Wilson and Hilferty approximations [14],
 - Kelley approximation [11],
 - Hawkins and Wixley approximation [15],
 - Peizer and Pratt approximation [16],
 - Canal approximation [17],
- Log-normal approximation [18].

The assessment of accuracy of the considered types of approximation is presented.

REFERENCES

- [1] Cognitive Networks: Applications and Deployments / Ed. by J.L. Mauri, K.Z. Ghafoor, D.B. Rawat, J.M.A. Perez. Boca Raton, FL: CRC Press. 2015. – 496 p.
- [2] Lesnikov V., Romanov S., Chastikov A., Dubovcev. The protocol stack of cognitive ad-hoc networks // Nauchnoe obozrenie. 2013.No. 2. P. 103-109.
- [3] Y. Zeng, Y.-C. Liang, A. T. Hoang, R. Zhang. A review on spectrum sensing for cognitive radio: Challenges and solutions // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. 2010. Article ID 381465. 15 p.
- [4] Yücek T., Arslan H. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications // IEEE Communications Surveys and Tutorials. 2009. V. 11. No. 1/ P. 116–130.
- [5] Ariananda D.D., Lakshmanan M. K., Nikookar H. A survey on spectrum sensing techniques for cognitive radio // Proceedings of the 2nd International Workshop on Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART 2009). 2009. P. 74–79.
- [6] Tihonov V. Statistical radios. Moscow: Soviet Radio. 1966. - 678 p.
- [7] Shachtarin B. Detection of signals. Moscow: Helios ARV. 2006. – 488 p.
- [8] Urkowitz H. Energy detection of unknown deterministic signals // Proceedings of the IEEE. 1967. V. 55. No.4. P. 523–531.
- [9] Atapattu S., Tellambura C., Hai Jiang. Energy Detection for Spectrum Sensing in Cognitive Radio. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, - 2014. - 96 p.
- [10] Lopez-Benitez M., Casadevall F. Improved energy detection spectrum sensing for cognitive radio. - Postprint of a paper submitted to and accepted for publication in IET Communications (Special issue on Cognitive Communications), 35 p., 2012, [Online:], available: http://www.grcm.tsc.upc.edu/sites/default/files/IET_Comms_2012.pdf
- [11] Brown J.R. Error analysis of some normal approximations to the chi-square distribution // Journal of the Academy of Marketing Science. 1974. V. 2. No. 1-4. P. 447-454.
- [12] Fisher R. A. Statistical methods for research workers, 5th ed. - Edinburgh: Oliver and Boyd. - 1934. – 319 p.
- [13] Chi-square distribution, Math Wiki, URL: http://math.wikia.com/wiki/Chi-square_distribution
- [14] Wilson E.B., Hilferty M.M. The distribution of chi-square // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1931. V. 17. No. 12. P. 684–688. URL: <http://www.pnas.org/content/17/12/684.full.pdf>
- [15] Patel J.K., Read C.B. Handbook of the normal distribution, 2nd edition. New York: Marcel Dekker, Inc. 1996. 456 p.
- [16] Peizer D.B., Pratt J.W. A normal approximation for binomial, F, beta and other common related tail probabilities, I // Journal of the American Statistical Association. 1968. V. 63. No. 324. P. 1416–1456.
- [17] Canal L. A normal approximation for the chi-square distribution // Computational Statistics & Data Analysis. 2005. V. 48. Issue 4. P. 803–808.
- [18] Jouini W., Le Guennec D., Moy C., Palicot J. Log-Normal approximation of Chi-square distributions for signal processing // Proceedings of 30th URSI General Assembly and Scientific Symposium. 2011. – 4 p.