

Аппроксимация центрального распределения хи-квадрат для оперативного расчета вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя

**Владислав Лесников, Татьяна Наумович,
Александр Частиков, Дмитрий Дубовцев
Вятский государственный университет
Киров**

МЭС-2016

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{M-1}]^T$$

Вектор принятых отсчетов

$$\mathbf{x} = \theta \mathbf{s} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_{M-1}]^T$$

вектор комплексных отсчетов белого гауссовского шума

$$w_k \sim N\{0, \sigma_w^2\}$$

$$\mathbf{s} = [s_0 \ s_1 \ \dots \ s_{M-1}]^T$$

вектор комплексных отсчетов обнаруживаемого сигнала

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{w}, \\ 1, & \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{s} \end{cases}$$

ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ОБНАРУЖЕНИЕ

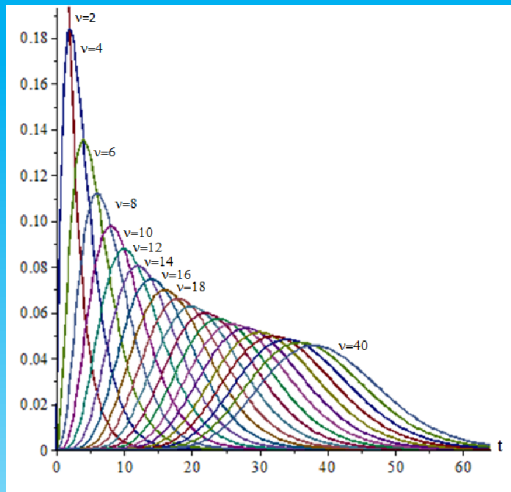
$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{w}, \\ 1, & \text{при } \mathbf{x} = \mathbf{w} + \mathbf{s} \end{cases} \quad \hat{\theta} = \begin{cases} 0, & \text{при } T(\mathbf{x}, M) < \eta, \\ 1, & \text{при } T(\mathbf{x}, M) \geq \eta. \end{cases}$$

$$T(\mathbf{x}, M) = \sum_{k=0}^{M-1} |x_k|^2 = \sum_{k=0}^{M-1} (\operatorname{Re}^2 x_k + \operatorname{Im}^2 x_k)$$

Центральное распределение хи-квадрат

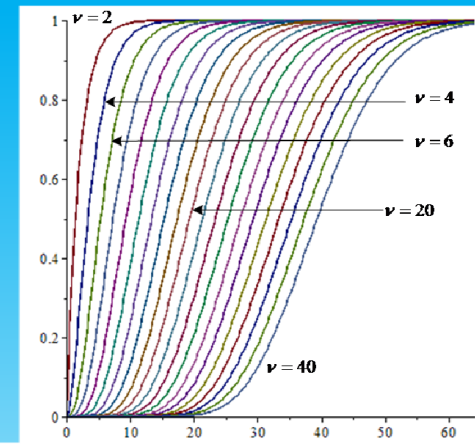
Плотность вероятности

$$f_{\chi^2(\sigma^2)}(t) = \frac{t^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2} \sigma^\nu \Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{t}{2\sigma^2}\right)$$

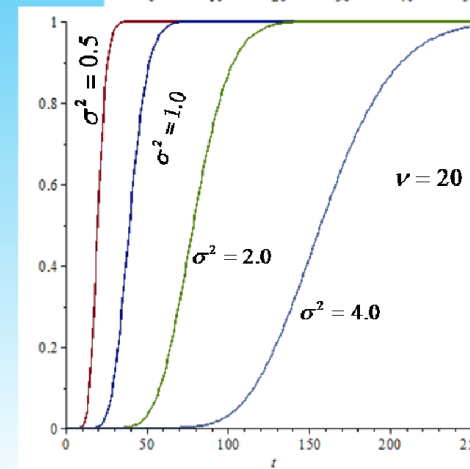
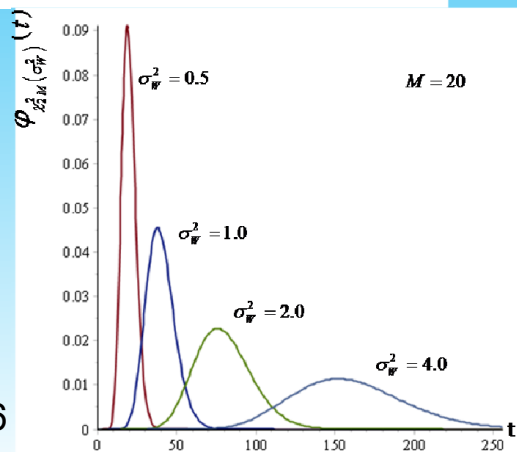


Функция вероятности

$$F_{\chi^2(\sigma^2)}(t) = 1 - e^{-t/2\sigma^2} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{k!} \left(\frac{t}{2\sigma^2}\right)^k$$



$$\eta = F_{\chi^2(\sigma^2)}^{-1}(P_{fa})$$



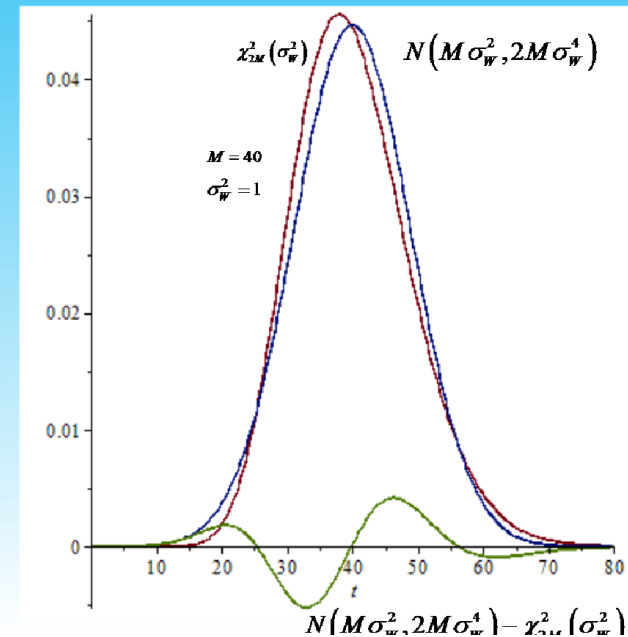
“Простая” гауссова аппроксимация

$$\chi_v^2(1) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} N(v, 2v) \quad \chi_v^2(\sigma^2) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} N(v\sigma^2, 2v\sigma^4)$$

$$T(\mathbf{x}, M)|_{H_0} \sim \chi_{2M}^2(\sigma_W^2) \rightarrow N(2M\sigma_W^2, 4M(\sigma_W^2)^2) = N(2M\sigma_W^2, 4M\sigma_W^4).$$

$$f_{\chi_v^2(\sigma^2)}(t) \approx f_{\chi_v^2(\sigma^2)}^{(N)}(t) = f_{N(v\sigma^2, 2v\sigma^4)}(t) = \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2v} \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t - v\sigma^2)^2}{4v\sigma^4}\right),$$

$$F_{\chi_v^2(\sigma^2)}(t) \approx F_{\chi_v^2(\sigma^2)}^{(N)}(t) = F_{N(v\sigma^2, 2v\sigma^4)} = 0.5 \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{t - v\sigma^2}{2\sigma^2 \sqrt{v}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{t - v\sigma^2}{\sigma^2 \sqrt{2v}}\right).$$



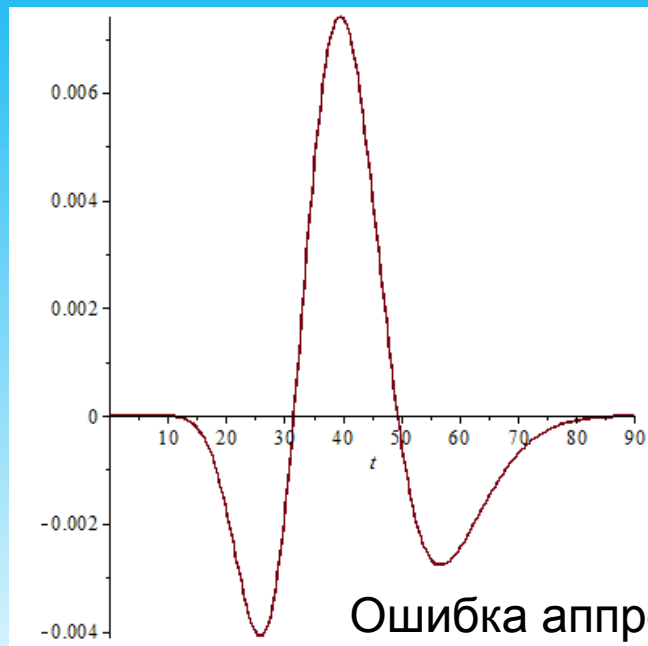
Аппроксимация Фишера

$$\sqrt{2\chi_v^2} \longrightarrow N$$

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) = F_{N(0,1)}(\sqrt{2t} - \sqrt{2v-1})$$

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) = F_{N(\sqrt{2v-1},1)}(\sqrt{2t})$$

$$F_{\chi_v^2(1)}(t) \approx F_{\chi_v^2(1)}^{\{F\}}(t) = F_{N(\sqrt{v-0.5},0.5)}(\sqrt{t})$$

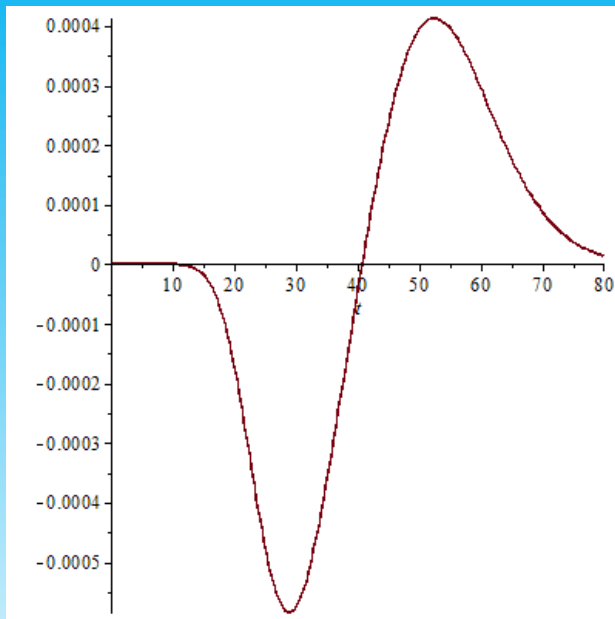


(Fisher)

Аппроксимация Вильсона-Хилферти 1

$$\sqrt[3]{\chi_v^2} \longrightarrow N$$

$$F_{\chi_v^2(D)}(t) \approx F_{\chi_v^2(D)}^{\{WH1\}}(t) = F_N\left(\sqrt[3]{v/2-1/3}, \frac{1}{9(\sqrt[3]{v/2-1/3})}\right)(\sqrt[3]{0.5t}) = F_N\left(\sqrt[3]{v-2/3}, \frac{2}{9(\sqrt[3]{v-2/3})}\right)(\sqrt[3]{t}).$$



Ошибка аппроксимации

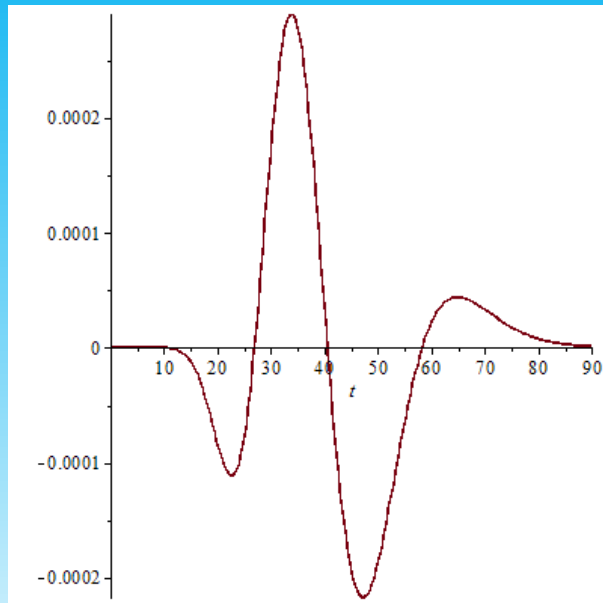
Wilson and Hilferty

Аппроксимация Вильсона-Хилферти 2

$$\sqrt[3]{t/\nu} \longrightarrow N$$

$$F_{\chi^2_\nu(t)} \approx F_{\chi^2_\nu(t)}^{\{WH2\}} = F_{N(0,1)}\left(\frac{\sqrt[3]{t/\nu} - \mu_N}{\sigma_N}\right) = F_{N(\mu_N, \sigma_N)}(\sqrt[3]{t/\nu}),$$

$$\mu_N = 1 - 2/9\nu \quad \sigma_N^2 = 2/9\nu$$



Ошибка аппроксимации

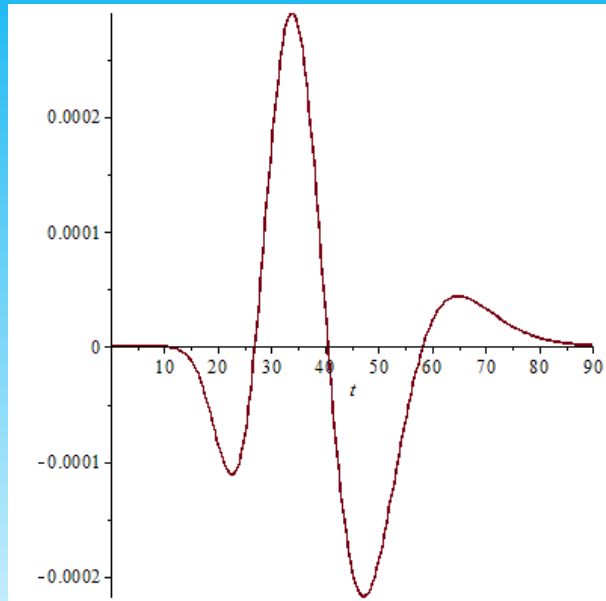
Wilson and Hilferty

Аппроксимация Вильсона-Хилфerti 3

$$\sqrt[3]{t/\nu} \longrightarrow N$$

$$F_{\chi^2_\nu(t)} \approx F_{\chi^2_\nu(t)}^{(WH3)} = F_{N(\mu_N, 2/9\nu)}\left(\frac{x - \mu_N}{\sigma_N}\right)$$

$$\mu_N = 1 - 2/9\nu \quad \sigma_N^2 = 2/9\nu$$



Ошибка аппроксимации

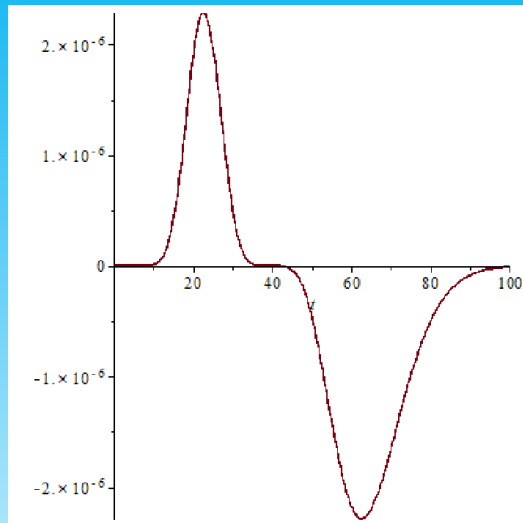
Wilson and Hilferty

Аппроксимация Келли

$$F_{z^2(t)} \approx F_{z^2(t)}^{(K)} = F_{N(0,1)}\left(\frac{z + 8z^5}{100\nu^3}\right)$$

$$z = \frac{\sqrt[3]{t/\nu} - \mu_N}{\sigma_N}$$

$$\mu_N = 1 - 2/9\nu \quad \sigma_N^2 = 2/9\nu$$



Kelley

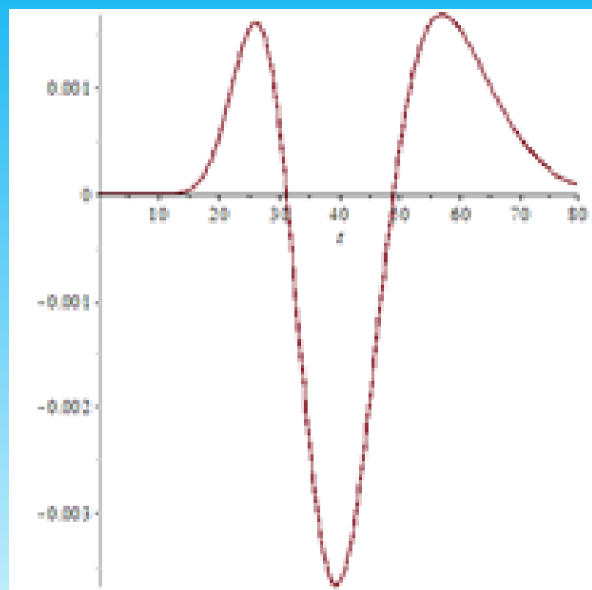
Аппроксимация Хокинса-Виксли

$$\sqrt[4]{t} \longrightarrow N$$

$$F_{\chi_v^2(t)} \approx F_{\chi_v^2(t)}^{\{HW\}} = F_{N(\mu_N, \sigma_N^2)}\left(\frac{\sqrt[4]{t} - \mu_N}{\sigma_N}\right),$$

$$\mu_N = 1 - \frac{3}{16\nu} - \frac{7}{512\nu^2} + \frac{231}{8192\nu^3}$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{8\nu} + \frac{3}{128\nu^2} - \frac{23}{1024\nu^3}$$

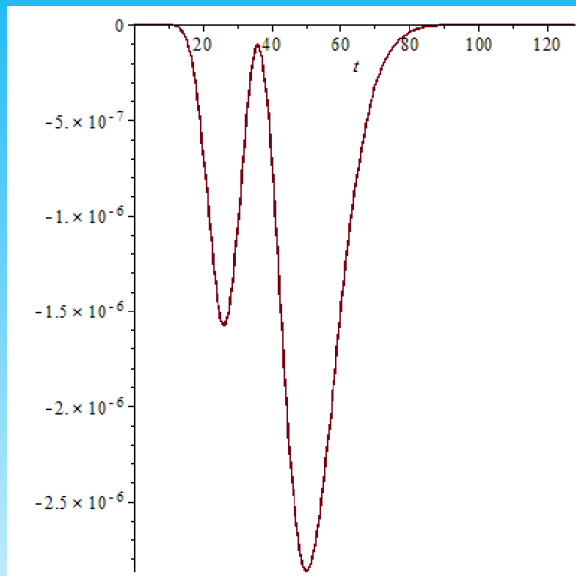


Ошибка аппроксимации

Hawkins and Wixley

Аппроксимация Пэйзера-Прэтта

$$F_{Z^2(t)} \approx F_{Z^2(t)}^{(PP)} = \begin{cases} F_{N(0,1)}\left(-\frac{1/3+0.08/\nu}{\sqrt{2\nu-2}}\right), & \text{при } t = \nu-1, \\ F_{N(0,1)}\left(\frac{t-\nu+2/3-0.08/\nu}{|t-(\nu-1)|} * \sqrt{(\nu-1)\ln\frac{\nu-1}{t}+t-(\nu-1)}\right), & \text{при } t \neq \nu-1. \end{cases}$$



Ошибка аппроксимации

Peizer and Pratt

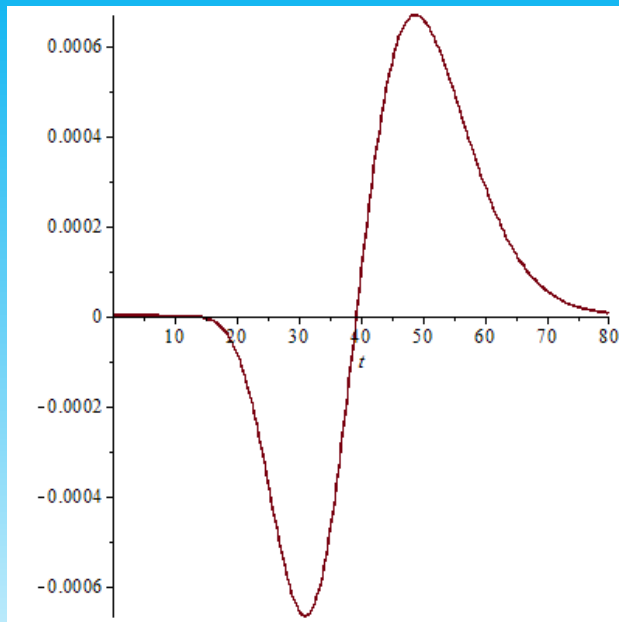
Аппроксимация Канал

$$F_{\chi^2(t)} \approx F_{N(0,1)}^{\{Can\}}\left(\frac{x - \mu_N}{\sigma_N}\right) = F_{N(\mu_N, \sigma_N^2)}^{\{Can\}}(x)$$

$$x = \sqrt[6]{t/\nu} - \frac{\sqrt[3]{t/\nu}}{2} + \frac{\sqrt{t/\nu}}{3}$$

$$\mu_N = \frac{5}{6} - \frac{1}{9\nu} - \frac{7}{648\nu^2} + \frac{25}{2187\nu^3}$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{18\nu} + \frac{3}{162\nu^2} - \frac{37}{11664\nu^3}$$



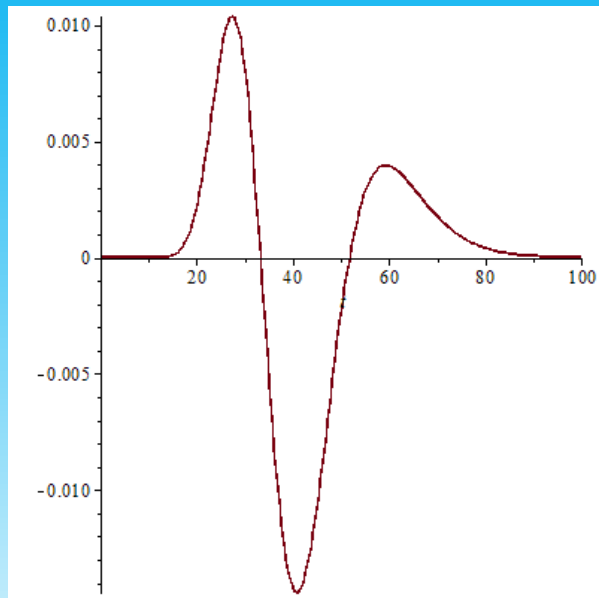
Ошибка аппроксимации

Canal

Аппроксимация логнормальным распределением

$$\chi^2 \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \text{LogN}(\mu_L, \sigma_L^2) \quad \sigma_L^2 = \ln(1+2/\nu) \quad \mu_L = \ln \nu - 0.5\sigma_L^2$$

$$F_{\chi^2(1)}(t) \approx F_{\text{LogN}(\mu_L, \sigma_L^2)}^{(J)}(t)$$



Ошибка аппроксимации

Jouini W., Le Guennec D., Moy C., Palicot J.

Заключение

Представлен обзор методов аппроксимации центрального распределения хи-квадрат. Приведенные аппроксимационные формулы адаптированы для использования разработчиками энергетических обнаружителей систем когнитивного радио с оперативным оцениванием уровня шума. Данную работу предполагается продолжить в области исследования точности вычисления порога обнаружения и влияния аппроксимации на характеристики обнаружения, а также для оценки сложности реализации аппроксимационных алгоритмов. Окончательный вывод о выборе того или иного способа аппроксимации должен сделать разработчик после учета всех упомянутых факторов.

Литература

- Cognitive Networks: Applications and Deployments / Ed. by J.L. Mauri, K.Z. Ghafoor, D.B. Rawat, J.M.A. Perez. Boca Raton, FL: CRC Press. 2015. – 496 p.
- [2] Лесников В.А., Романов С.В., Частиков А.В., Дубовцев Д.В. Стек протоколов когнитивных ad-hoc сетей // Научное обозрение. 2013. № 2. С. 103–109.
- [3] Y. Zeng, Y.-C. Liang, A. T. Hoang, R. Zhang. A review on spectrum sensing for cognitive radio: Challenges and solutions // EURASIP Journal on Advances in Signal Processing. 2010. Article ID 381465. 15 p.
- [4] Yücek T., Arslan H. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications // IEEE Communications Surveys and Tutorials. 2009. V. 11. № 1/ P. 116–130.
- [5] Ariananda D.D., Lakshmanan M. K., Nikookar H. A survey on spectrum sensing techniques for cognitive radio // Proceedings of the 2nd International Workshop on Cognitive Radio and Advanced Spectrum Management (CogART 2009). 2009. P. 74–79.
- [6] Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Советское радио. 1966. - 678 с.
- [7] Шахтарин Б. И. Обнаружение сигналов. М.: Гелиос АРВ. 2006. – 488 с.

Литература

- [8] Urkowitz H. Energy detection of unknown deterministic signals // Proceedings of the IEEE. 1967. V. 55. № 4. P. 523–531.
- [9] Atapattu S., Tellambura C., Hai Jiang. Energy Detection for Spectrum Sensing in Cognitive Radio. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer, - 2014. - 96 p.
- [10] Lopez-Benitez M., Casadevall F. Improved energy detection spectrum sensing for cognitive radio. - Postprint of a paper submitted to and accepted for publication in IET Communications (Special issue on Cognitive Communications), 35 p., 2012, [Online:], available: http://www.grcm.tsc.upc.edu/sites/default/files/IET_Comms_2012.pdf
- [11] Brown J.R. Error analysis of some normal approximations to the chi-square distribution // Journal of the Academy of Marketing Science. 1974. V. 2. № 1-4. P. 447-454.
- [12] Fisher R. A. Statistical methods for research workers, 5th ed. - Edinburgh: Oliver and Boyd. - 1934. – 319 p.
- [13] Chi-square distribution, Math Wiki, URL: http://math.wikia.com/wiki/Chi-square_distribution

Литература

- [14] Wilson E.B., Hilferty M.M. The distribution of chi-square // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 1931. V. 17. № 12. P. 684–688. URL: <http://www.pnas.org/content/17/12/684.full.pdf>
- [15] Patel J.K., Read C.B. Handbook of the normal distribution, 2nd edition. New York: Marcel Dekker, Inc. 1996. 456 p.
- [16] Peizer D.B., Pratt J.W. A normal approximation for binomial, F, beta and other common related tail probabilities, I // Journal of the American Statistical Association. 1968. V. 63. № 324. P. 1416–1456.
- [17] Canal L. A normal approximation for the chi-square distribution // Computational Statistics & Data Analysis. 2005. V. 48. Issue 4. P. 803–808.
- [18] Jouini W., Le Guennec D., Moy C., Palicot J. Log-Normal approximation of Chi-square distributions for signal processing // Proceedings of 30th URSI General Assembly and Scientific Symposium. 2011. – 4 p.

Спасибо за внимание!