

# Восстановление сигнала и параметров $\Sigma$ - $\Delta$ модулятора

Е.И. Хохряков

ОАО НПЦ ЭЛВИС, г. Зеленоград, zhen\_khokh@mail.ru

**Аннотация** — Обсуждаются модели аналогово-цифрового (АЦП) однобитового каскадного сигма-дельта модулятора. На основании линейной модели предлагается методика поиска внутренних коэффициентов модулятора по его выходной выборке, используя частный случай алгоритма Монте Карло – температурный отжиг. Методика использована в компьютерном моделировании для восстановления искаженных параметров линейной модели модулятора и может применяться для тестирования образцовых АЦП. Предложено выделять составляющую выходного сигнала, согласованного по фазе с шумом модулятора с помощью запаздывающе-продвинутого фильтра. В работе показано, что при восстановлении сигнала АЦП модулятора такая составляющая более эффективно вычитает его шум, нежели общепринятое наложение на выход модулятора низкочастотного фильтра с конечно-импульсной характеристикой.

**Ключевые слова** — сигма-дельта, каскадный, Монте Карло, АЦП, теория хаоса, символьное моделирование, неинвертируемая область

## I. ВВЕДЕНИЕ

Для приложений преобразования и передачи акустических сигналов популярными являются преобразователи, использующие передискретизацию опорной тактируемой частоты. Преимущество таких преобразователей – это относительная простота технологии разработки по сравнению с аналогичными многоуровневыми аналогами [1]. Быстрого переключения всего одного бита вполне достаточно, чтобы без потерь закодировать медленно меняющийся многобитовый входной сигнал. Количественной характеристикой передискретизации служит параметр OSR (over-sampling ratio), который определяется как отношение тактируемой частоты к значению полезной низкочастотной полосы частоты входных сигналов.

В данной работе изучены модели сигма-дельта модулятора (СДМ) аналогово-цифрового преобразователя (АЦП). Основная суть СДМ – это вынести шум однобитового квантователя из полезной полосы в высокочастотную таким образом, чтобы коэффициент передачи шума (NTF – noise transfer function) был нулевым для постоянного сигнала. Степень крутизны спектра шума зависит от NTF, последнее меняется как  $20 \cdot n$  Дб/дек, где  $n$  – порядок СДМ, наименьший порядок – 1, а целесообразные значения могут достигать 5. Более высокие значения  $n$  усложняют структуру архитектуры [2], при этом OSR нельзя уменьшить по причинам, не зависящим от

собственного шума СДМ. Применимость и преимущества однобитового модулятора перед многобитовыми архитектурами, такими как многоканальный шумовой формирователь (MASH multistage noise shaping) [3] для ФАПЧ (фазовая автоподстройка частоты) с аналоговой петлей обратной связи [4], обсуждается в [5].

Примером АЦП-СДМ служат микросхемы серии AD776 [6]. Для полного описания преобразования данных необходимо отметить фильтрующую составляющую микросхемы, завершающую преобразование АЦП. На практике проектируют низкочастотные децимирующие КИХ (конечно-импульсная характеристика) фильтры, более подробно можно посмотреть такие разновидности КИХ как half-band (литерные) [7] и CIC (cascaded integrator-comb) [8]. Цепочки CIC и литерных фильтров объединяют в один фильтровый тракт, так что можно создать фильтр на кристалле с малой неоднородностью полосы пропускания и высоким коэффициентом подавления. В работе представлена методика восстановления сигнала, не использующая классические КИХ фильтры, что оказывается более удобно при компьютерном моделировании.

В работе используется однобитовый каскадный модулятор как наиболее оптимальный вариант при разработке и исследовании. В данной работе сосредоточено внимание на исследовании математической модели АЦП СДМ, проведен анализ выходной выборки. Предложена методика определения внутренних параметров схемы. В качестве параметров использованы коэффициент усиления линейного операционного усилителя (ОУ), на которых построены интеграторы, коэффициент утечки интегратора, его влияние на динамику состояний СДМ обсуждается в [9], внутренние масштабирующие коэффициенты СДМ, обеспечивающие устойчивое функционирование [2]. Разработка СДМ в этом случае базируется на технологии переключения зарядом элементов от одного к другому. Для АЦП необходимо задать шкалу путем определения масштабирующих коэффициентов [10]. Разработка компонентов АЦП должна учитывать технологический разброс значений внутренних узлов, поэтому при моделировании возникает задача нахождения оптимального набора параметров. Однако при тестировании и поиске параметров готовых устройств оптимальный набор известен, он берется в качестве начального приближения. Целью данной работы является воспроизведение динамики

модулятора для различных управляемых параметров модели. Параметры также обладают нелинейностью, что требует дополнительного рассмотрения [10].

## II. ПОВЕДЕНЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Далее рассматривается структурная схема каскадного однобитового СДМ, показывается изменение сигнала от одного отсчета к следующему. Для составления псевдокода важна схема линейной модели СДМ в  $z$ -области, рис. 1, здесь обратная положительная связь интегратора масштабирована коэффициентом  $a < 1$ . Изучение влияния этого параметра рассмотрено в главе IV.

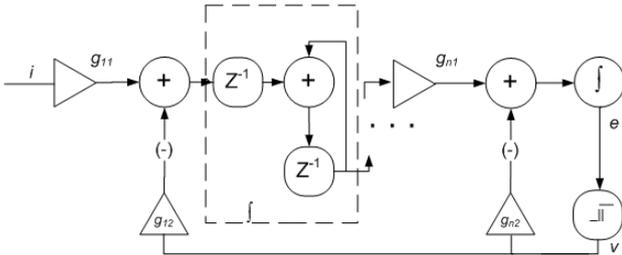


Рис 1. Структурная схема  $n$ -порядка каскадного однобитового СДМ [4]

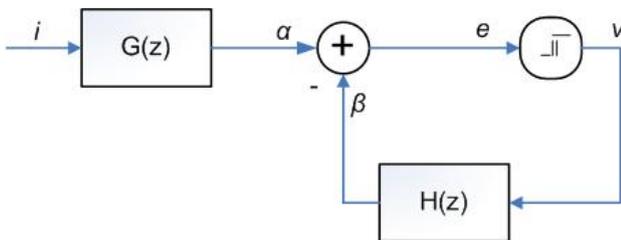


Рис 2. Общая схема СДМ произвольного порядка с линейными интеграторами

В литературе для линейных компонентов СДМ рис. 1 имеет более компактный вид, показанный на рис. 2. Встречается также эквивалентное преобразование: перенос блока  $H(z)$  после суммирования, тогда блок для  $\alpha$ -ветки заменится на  $G(z)H^{-1}(z)$ . Полезно для дальнейшего выразить  $STF(z)$  и  $NTF(z)$ , соответственно, как  $G(z)/(1+H(z))$  и  $1/(1+H(z))$  [9].

Входные сигналы, проходящие процедуру передискретизации, должны иметь спектр отличный от нуля только в низкочастотной полосе. По теореме Котельникова-Шеннона это означает, что любой такой сигнал можно описать без потери информации суперпозицией гармонических сигналов с частотой в  $k$  раз меньше граничной частоты полезной полосы, где  $k$ -целое число. Для определения амплитуд каждой гармоники достаточно наложить окно (для предотвращения влияния краевых эффектов, связанных с конечной длительностью сигнала) и посчитать мощность каждого пика гармоники, нормируя все на полную мощность гармоники с заданной длительности сигнала и наложенным окном. Фазы каждой гармоники можно легко определить, сдвигая с помощью частотной модуляции выбранную гармонику на место нулевой гармоники (постоянной

составляющей) и далее, используя ранее полученную амплитуду, можно найти аргумент комплексного числа, совпадающий с фазой гармоники. Таким образом, любой полезный входной сигнал полностью описывается амплитудами и фазами гармоник, разумеется, кроме фазы постоянной составляющей.

Значения коэффициентов на рис. 1 можно взять из [10]:  $g_{11}=0.25$ ,  $g_{12}=0.25$ ,  $g_{21}=0.5$ ,  $g_{22}=0.25$ .

## III. НАКОПИТЕЛЬ НА ОПЕРАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЯХ

Далее будут рассмотрены основные схемы интеграторов, построенные на ОУ. Из всех интеграторов наиболее критичным в модуляторе являются неидеальности для первого интегратора [10]. Известно, что нелинейность приводит к интермодуляции шума и сигнала, что приводит к отображению с некоторым коэффициентом передачи собственного шума СДМ с высоких частот в полезную полосу. Возьмем интерполяцию выходного напряжения ОУ как

$$f(x) = -V_A \cdot th\left(\frac{kx - V_0}{V_A}\right), \quad (1)$$

где  $V_A$  – напряжение питания ОУ,  $th$  – гиперболический тангенс,  $V_0$  – смещение нуля. В общем случае линейное приближение интегратора приемлемо, поскольку коэффициенты масштабирования ограничивают входной диапазон ОУ. Для дальнейшего моделирования ограничимся линейным приближением (1), при входном напряжении  $x$  вблизи нуля

$$f(x) = -kx + V_0. \quad (2)$$

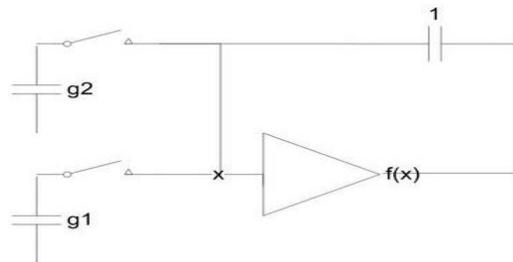


Рис 3. Схема интегратора нелинейного ОУ с униполярным включением

Для вывода зависимости выхода ОУ из  $k-1$  в  $k$  отчет необходимо записать закон сохранения заряда  $Q$ . Будем переменные до замыкания ключа обозначать как  $k-1$ , после как  $k$ , также считается, что изменение напряжения на входе ОУ  $x_k$  успевае завершиться до размыкания ключа.

$$\begin{cases} x_{k-1} - f(x_{k-1}) + g_1 i_{k-1} - g_2 v_{k-1} = Q \\ -f(x_k) + (1 + g_1 + g_2)x_k = Q \end{cases}. \quad (3)$$

Здесь  $i$  – входное напряжение модулятора,  $v$  – напряжение квантователя. Для простоты интегрирующая емкость взята единичной, а прочие соответствующие емкости отмасштабированы как

показано на рис. 3. Решать последнее уравнение (3) можно методом Ньютона как

$$\begin{cases} F(y) = f\left(\frac{y+Q}{1+g_1+g_2}\right) - y = 0, y = f(x_k) \\ y_m \rightarrow y, y_0 = 0 \\ y_m = y_{m-1} - F(y_{m-1})/F'(y_{m-1}), m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4)$$

Из-за высокого коэффициента усиления,  $x_k$  близко к нулю, соответственно выходное напряжение  $y$  для  $k$  отчета сходится уже для  $m < 10$  итераций. Технически (4) можно включить в поведенческую модель, поскольку производительность современных вычислительных систем вполне позволяет обрабатывать выборку длиной в  $10^6$  отчетов.

Линеаризуем (3), используя (2) для любых входных значений.

$$\begin{cases} y_k = (y_{k-1}(k^{-1} + 1) + g_1 i_{k-1} - g_2 v_{k-1}) \cdot \\ \cdot (1 + k^{-1} + k^{-1}(g_1 + g_2))^{-1} \\ y_k = -kx_k + V_0 \end{cases} \quad (5)$$

Выражения для интеграторов (5) фактически определяют псевдокод поведенческой модели, где можно выразить коэффициент утечки интегратора и эффективные масштабирующие коэффициенты как

$$\begin{cases} a = (1 + k^{-1}) / (1 + k^{-1} + k^{-1}(g_1 + g_2)) < 1 \\ g_i' = g_i / (1 + k^{-1} + k^{-1}(g_1 + g_2)) < g_i, i = 1, 2 \end{cases} \quad (6)$$

Имеется замечание для дифференциального подключения ОУ. Здесь необходимо, чтобы число входных конденсаторов ОУ совпадало с числом входных переменных на сумматоре рис. 1. Недопустима ситуация, когда имеются два интегратора на одном ОУ и дублиры-конденсаторы. Такая ситуация реализуется, когда используется две ветки отрицательной обратной связи, а для каждого входа ОУ используют отдельную емкость, так, что каждая входная емкость с сумматора дублируется. Для архитектур, использующие дублиры [10], существует возможность получить синфазную составляющую на дифференциальном выходе с коэффициентом передачи  $\Delta C/C_i$ , где  $\Delta C$  – разность номинала дублиров,  $C_i$  – среднее от интегрирующих емкостей.

#### IV. ТЕОРИЯ ХАОСА И КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В основе изучения теории хаоса лежит изучение динамики движения в фазовом пространстве, однозначно описывающее состояние СДМ. В дальнейшем представляют интерес два вопроса: при каких параметрах модулятора реализуется хаотический или нехаотический режим [9] и как меняется устойчивая динамика при управляемом изменении параметров поведенческой модели.

Состояние СДМ в фазовом пространстве задается значением всех интеграторов. Удобно представить (3) в виде матричных соотношений

$$\begin{cases} \mathbf{X}_k = \mathbf{A}\mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{g}_1 \cdot i_{k-1} - \mathbf{g}_2 \cdot v_{k-1} \\ e_k = \mathbf{c}^T \cdot \mathbf{X}_k \\ v_k = \text{sign}(e_k) \\ e_k \rightarrow E(z) = G(z)I(z) - H(z)V(z) \end{cases} \quad (7)$$

Последнее соотношение в (7) получается из рис. 2 в  $z$ -области, выражая  $X_i$  из первого и подставляя во второе уравнение. Далее можно выразить  $H(z)$  и  $G(z)$  как

$$\begin{cases} G(z) = z^{-n} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - z^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_1 \\ H(z) = z^{-n} \mathbf{c}^T (\mathbf{E} - z^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_2 \end{cases} \quad (8)$$

Для второго порядка введенные матрицы и вектора имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ g_{21} & a_2 \end{bmatrix}, \mathbf{g}_1 = (g_{11}, 0)^T \\ \mathbf{g}_2 = (g_{12}, g_{22})^T, \mathbf{c} = (0, 1)^T \end{cases} \quad (9)$$

Полусы  $H(z)$  определяются тогда параметрами утечки как

$$\det(z\mathbf{E} - \mathbf{A}) = (z - a_1)(z - a_2) = 0. \quad (10)$$

Из (10) и (6) видно, что полусы находятся внутри единичной комплексной окружности. Последнее означает, что модулятор работает в нехаотическом режиме [8]. Данный результат естественным образом обобщается на произвольный порядок.

Для исследования устойчивости важно понятие неинвертируемой области фазового пространства. По определению это такая область, в которой (7) имеет два решения в зависимости от знака квантователя [9]. Наличие этой области обеспечивается условием  $H(0) < 0$ , при этом выходной интегратор должен удовлетворять

$$|e_i| \leq -2H(0) = 2g_{22}/a_2. \quad (11)$$

При нарушении неравенства (11) модулятор находится в инвертируемой области. Используя (7) нетрудно показать, что (11) эквивалентно следующему

$$|a_2 e_i - g_{22} v_i| = |e_{i+1} - g_{21} X_i^1| \leq g_{22}. \quad (12)$$

Перепишем (11), используя неравенство треугольника

$$\begin{aligned} |g_{21} X_i^1| \geq |g_{21} X_i^1 + a_2 e_i - g_{22} v_i| - \\ - |a_2 e_i - g_{22} v_i| \geq |e_{i+1}| - g_{22} \end{aligned} \quad (13)$$

Оценка (13) не должна быть хуже (12), поскольку (11) эквивалентно (12), поэтому

$$|X_i^1| \leq g_{22} / g_{21} (2/a_2 - 1) \quad (14)$$

Для того, чтобы первый интегратор удовлетворял схожему неравенству, необходимо составить неравенство, эквивалентное (14). Справедливо следующее

$$|g_{21}X_i^1 - g_{22}v_i| \geq |g_{21}X_i^1 + a_2e_i - g_{22}v_i| - a_2|e_i| \geq |e_{i+1}| - 2g_{22} \quad (15)$$

Как и в (13) потребуем, чтобы левая оценка (15) была не хуже, чем в (11), тогда

$$|g_{21}X_i^1 - g_{22}v_{i-1}| \leq 2 \cdot g_{22} (1/a_2 - 1) \quad (16)$$

Теперь имеется уравнение очень напоминающее (12), только для первого интегратора. Заметим, что оно возможно исключительно для нехаотического модулятора, с которым мы имеем дело для АЦП модулятора.

$$\begin{cases} |X_{i+1}^1| = |a_1 / g_{21} (g_{21}X_i^1 - g_{22}v_i) + g_{11}i_i - \\ -(g_{12} - a_1g_{22} / g_{21})v_i| \leq \mu_1 + \mu_2 + g_{11}|i_i| \end{cases} \quad (17)$$

Первое неравенство получено из (16), потребуем, чтобы оно было не хуже, чем (14), тогда, используя

$$\begin{cases} \mu_1 = 2g_{22}a_1(1/a_2 - 1) / g_{21} > 0 \\ \mu_2 = a_1g_{22} / g_{21} - g_{12} > 0 \end{cases} \quad (17')$$

Получается

$$|i_i| \leq g_{22}(g_{11}g_{21})^{-1}(2/a_2 - 1) - (\mu_1 + \mu_2) / g_{11} = g_{12} / g_{11} + g_{22}(g_{11}g_{21})^{-1}(1 - a_1) \cdot (2 + a_2) / a_2 \quad (18)$$

Пренебрегая вторым малым слагаемым можно заметить схожесть этой оценки и (14). Действительно, для модулятора первого порядка при соответствующем обозначении оценка (14) должна заменить (18).

Можно проделать аналогичные выводы для третьего порядка, теперь для оценки входа нужно использовать, соответственно, вместо оценок (11) и (14) оценки (14) и (18). Для произвольного порядка ограничение на вход получается, если последовательно вывести эквивалентные оценки, продвигаясь от последнего интегратора к входу.

Отметим также, что в поведенческой модели соотношение (11) и прочие выполняются в более ограниченном диапазоне амплитуды входного сигнала, поэтому соотношение (11) скорее является достаточным, чем необходимым. Тем не менее, прослеживаются общая тенденция с компьютерной симуляцией: из (14) и (18) следует, что диапазон должен расширяться при уменьшении любого из  $a$ . В подтверждении этому при симуляции наблюдается уменьшение пиковых значений интеграторов.

В литературе о нехаотических модуляторах говорят, как о системах, в которых нельзя отделить

устойчивую область фазового пространства от неустойчивой области [8]. Циклы, описывающие устойчивую динамику, находится в ограниченной области, определяемой оценками (11), (14), и управляются входом (18). Однако нельзя сказать, что устойчивые циклы всюду плотны в этих областях. Малое случайное или направленное смещение может перевести систему в неустойчивый цикл. Одним из подтверждений этого утверждения является оценка (16). Во многом эта оценка определяет область фазового пространства, которая оказывается "узким" местом при возникновении самовозбуждений. Для хаотического модулятора характерно некоторое сплетение неустойчивых (по отдельности) циклов в один, при этом множество треков в фазовом пространстве становится всюду плотным, полностью закрашивая при неограниченном времени моделирования устойчивую область фазового пространства [11]. Такая равномерно закрашенная область образует базовый аттрактор, а введение оттенка серого цвета в наиболее часто посещаемые места выявляет внутри аттрактора ограниченное множество циклов [9].

#### V. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СИГНАЛА ПО ВЫБОРКЕ С КВАНТОВАТЕЛЯ

Нами установлено, что каскадный АЦП СДМ, реализованный на зарядомкких элементах, представляет собой нехаотический модулятор. Работая с устойчивым циклом можно ожидать, что восстановить сигнал или декодировать можно с любым приближением, зависящим лишь от возможностей фильтра или от кратности наложения этого фильтра. Входной сигнал состоит из двух гармоник, одна из которых имеет нулевую частоту. Далее рассмотрена методика восстановления.

На аппаратном уровне используют децимирующий каскад низкочастотных КИХ фильтров. КИХ фильтры обладают запаздывающей амплитудно-частотной характеристикой, что является следствием причинности таких фильтров. Встречается также и продвинутая частотная характеристика, как аналитическое продолжение на отрицательные частоты запаздывающего фильтра. В продвинутых системах время инвертировано, динамика определяет следующий шаг из настоящего в прошлое. Ярким примером динамики продвинутой системы служит коллективное движение античастиц в полупроводнике. Можно построить продвинуто-запаздывающий фильтр [12], его передаточная функция в частотной области определится как

$$T(w) = -\frac{i\lambda}{w - i\lambda} + \frac{i\lambda}{w + i\lambda} = \frac{2\lambda^2}{w^2 + \lambda^2} \quad (19)$$

Для запаздывающей составляющей в первом слагаемом (19) видно отрицательное смещение по фазе, тогда как для продвинуто-запаздывающего фильтра нет смещения по фазе. Для коэффициента  $\lambda$ , равного частоте гармоники, фильтр вообще не

искажает меняющуюся гармонику сигнала, но постоянная составляющая возрастает вдвое. Такая неоднородность обусловлена выбором только одной не искажённой гармоники. Для сохранения спектра необходима процедура определения весовых коэффициентов фильтра. Количество весовых коэффициентов соответствует числу не искажённых гармоник в полезной полосе пропускания модулятора. Фильтр (19) используется при определении трех составляющих сигнала: двух амплитуд и фазы. Импульсная функция (19) дается как

$$T(i) = \lambda\theta(i-m)e^{-\lambda(i-m)} + \lambda\theta(-i+m)e^{\lambda(i-m)}. \quad (20)$$

Здесь  $\theta$  – функция Хевисайда. Чтобы скачок функции Хевисайда находился посередине между отчетами необходимо выбрать  $m$  как половину четной длины фильтра, увеличенную на единицу. После свертки чистого (без наложения окна) закодированного сигнала и  $T$  первые  $m-0.5$  и последние  $m-1.5$  отчетов отбрасываются.

Для компьютерной обработки введение фильтра (20) упрощает восстановление закодированного сигнала. Следующим шагом будет преобразование выборки с квантователя в другую закодированную выборку так, чтобы ее было легче отфильтровать.

Ранее при исследовании устойчивости модулятора многократно использовалось соотношение (11). Используя обозначения рис. 2, этот момент зафиксирован следующим условием

$$\alpha_i^C - \beta_i = 0. \quad (21)$$

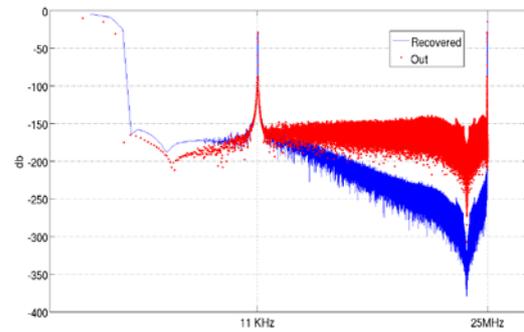
Определится такое закодированное решение как

$$i_i^C \rightarrow I^C(z) = G^{-1}(z)H(z)V(z). \quad (22)$$

Для перекодировки наиболее перспективным видится фильтр СДМ. Фильтр получается, если пропустить выборку квантователя в обратном направлении от выхода через блок  $H(z)$  и далее через  $G(z)^{-1}$  (рис. 2). Такой сигнал имеет шумы и также является закодированным, но в отличие от  $v$  его разрядность наверняка будет выше одного бита. Уменьшение шума не может быть получено из (22), это видно из того, что  $G(z)^{-1}H(z)$  представляется отношением полиномов, не имеющих отношения к фильтрации шума. Более того, сложение с разными задержками выхода квантователя вместе с разрядностью повысит разрядность  $i^C$  по сравнению с шумом квантователя. Это повышение сказывается на общем уровне, но не на наклоне спектра шума  $i^C$ . Отсюда следует, что повышение разрядности шума, как для архитектур с многобитовым квантователем, не дает повышение эффективности кодировки.

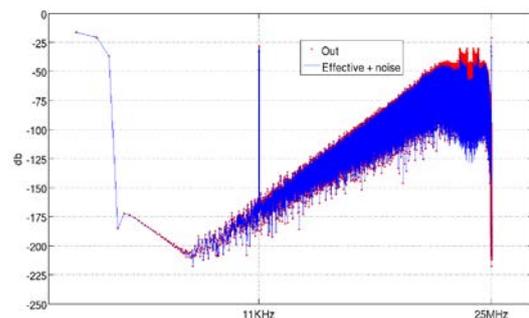
На рис. 4 видно, что шумы за пределами полезной полосы могут устраняться в зависимости от кратности наложения фильтра, на низких частотах шум увеличился, что демонстрирует неэффективность  $i^C$ . Для эффективности используем шум с наложением продвинуто-запаздывающего фильтра

$$N(z) = \gamma G^{-1}(z)(1-T^m(z))v(z). \quad (23)$$



**Рис. 4. Сравнение спектров выхода квантователя СДМ 2 порядка и сигнала (22). Нормирование взято на единичный сигнал с наложением окна. Фильтр (20) с  $m=181000.5$  наложен 2 раза на  $i^C$  – линия, и один раз на квантователь – точки. Сигнал с частотой 11КHz и амплитудой 0.1 в единицах  $g_{12}/g_{21}$  в (18), амплитудой 0.2 постоянной составляющей, частота дискретизации 25MHz**

Здесь  $\gamma$  – вещественный коэффициент,  $m$  – кратность фильтра, равная обычному округлению от  $(n+1)/2$ . Шум  $N(z)$  добавляется в правую часть (22), где происходит согласованное вычитание собственного шума СДМ. Согласованность фаз собственного шума модулятора и  $N(z)$  осуществляется с помощью продвинуто-запаздывающего фильтра. Знак корректирующего коэффициента зависит от порядка, для второго порядка двойное интегрирование  $H(z)$  меняет фазу шума на  $-\pi$ , поэтому знак берется положительный. Для нечетных порядков для согласования фазы нужно дополнительно умножить (23) на продвинутое дискретное дифференцирование  $(z-1)$ .



**Рис 5. Сравнение спектров для СДМ 2 порядка. Выход квантователя – точки, эффективный сигнал на входе (22) с добавлением шума (23) – линия**

На рис. 5 показано более эффективное решение закодированного сигнала с корректирующим коэффициентом  $\gamma=0.4$ , по сравнению с выходом квантователя.

## VI. ПОИСК КОЭФФИЦИЕНТОВ SDM

Ранее уже отмечалось, что АЦП СДМ подвержен различного рода неидеальностям, одни из них можно аналитически изучить, другие оценить численно. В данной статье представлена методика восстановления входного сигнала, более того предложен способ как это сделать на основе одной лишь выходной выборки, не прибегая к специфике внутренних неидеальных элементов. Восстановленный сигнал обладает меньшим уровнем шума по сравнению с выходной выборкой. Выходная выборка может быть получена не обязательно из поведенческой модели, а с реального устройства. При исследовании образцовой выборки конечной целью служит определение внутренних элементов устройства, исходя из линейной модели. Определение элементов возможно, если удалось восстановить входной сигнал, тем самым забывшись от неидеальностей устройства, после этого можно подбирать масштабирующие коэффициенты и утечки интеграторов из линейной модели.

### А. Методика поиска и формализация задачи

Неотъемлемой частью в многомерной задаче поиска параметров служит определение эффективно сходящегося алгоритма. Задача может быть упрощена, если принять во внимание соотношения для коэффициентов масштабирования, что понижает размерность задачи. Существует теорема: два СДМ считаются эквивалентами тогда и только тогда, когда выполняется  $H_1(z) = \alpha \cdot H_2(z)$ , где  $\alpha$  – положительное число. Она доказывается из инвариантности знака последнего интегратора относительно  $\alpha$  [9]. Таким путем можно наложить некоторые связи на масштабирующие коэффициенты, изменяющие  $H(z)$  лишь на постоянный множитель. Размерность задачи уменьшается за счет этих связей. Нетрудно показать, что число связей совпадает с порядком, это следует из надлежащего выбора масштабирующих коэффициентов отрицательной обратной связи  $g'_{2k}$ , - такого, чтобы  $g'_{1k}=1$  для  $k = 1, 2, \dots, n$ . Таким образом, учет связей определит размерность как  $2 \cdot n$ , где также учитываются  $n$  коэффициентов утечек (6). Для второго порядка с учетом связей параметры получаются как

$$\begin{cases} g'_{1i} = 1, a'_i = a_i, i = 1, 2 \\ g'_{12} = g_{12} / g_{11}, g'_{22} = g_{22} / (g_{11} \cdot g_{21}) \end{cases} \quad (24)$$

Еще один тип связи необходимо учитывать при определении восстановленного сигнала. Внутренние искажения модулятора делают входной сигнал отличным от восстановленного как по фазовой, так и по амплитудной характеристикам. Ограничимся случаем постоянного сигнала, для него коэффициент передачи определяется через  $STF(z=1) = g_{11}/g_{12} \cdot (1 - (1-a_1) \cdot g_{22}/(g_{12} \cdot g_{21}))$ , для малых  $(1-a_1)$ . Таким образом, для АЦП, учитывая постоянную составляющую смещения нуля, можно определить степень искажения постоянного сигнала. Наличие дополнительной связи заставляет включать в параметры также  $n$ -мерное фазовое пространство интеграторов начальных

состояний. На практике начальные состояния интеграторов не представляет интерес, поэтому их включение ведет к снижению эффективности поиска с одной стороны, а с другой стороны дает принципиальную возможность алгоритму не “застрять” в одном из локальных экстремумов. В итоге размерность задачи свелась к  $3 \cdot n - 1$ , более низкую оценку размерности, по всей видимости, можно получить, исследуя фрактальную размерность ограниченного множества циклов.

Для завершения поиска нужен критерий, который однозначно определял бы искомую функцию  $H(z)$ . Если выходная выборка для заданной  $H(z)$  при подаче на вход восстановленного сигнала совпадает с образцовой выборкой, то поиск считается успешно завершенным. Для оптимизационного алгоритма также выберем меру, определяющую близость подобранного от точного решения.

$$\delta v = \frac{1}{N} \sum_i |v_i - v^H_i|, \quad (25)$$

где  $N$  – длина выборки. Если выборка  $v^H$  дает  $\delta v=0$ , то подобранная  $H(z)$  является искомой. Величину (25) можно назвать целевой функцией, а алгоритм поиска  $H(z)$  будет искать ее минимум. Сделаем замечание по поводу сходимости алгоритма. Даже самый эффективный алгоритм поиска для хаотического модулятора никогда не сойдется, потому что при сколь угодно малых отклонениях начального состояния модулятора генерируются уже другая выходная выборка. Нами установлено, что для хаотического случая (25) не подходит.

### В. Отжиг при поиске оптимального решения

Конкретизируем алгоритм оптимизации целевой функции, после чего получим эффективность алгоритма. Рассмотрим метод Метрополиса [13] алгоритма Монте-Карло (МК) [14]. Метод Метрополиса напрямую используют при вычислении средних значений некоторых величин в многомерном Евклидовом пространстве эргодических процессов. Здесь возникает проблема определения эффективной выборки такого усреднения, поскольку число наборов параметров растет от размерности пространства крайне быстро, по степенному закону. Однако имеется возможность не просматривать ту часть пространства, которая почти не достижима для алгоритма МК. Достижимость на следующем шаге МК случайно выбранного набора зависит от следующего: близость его к текущему набору, эффективности алгоритма МК, значения температуры в алгоритме МК. Близость следующего набора зависит от выбранного диапазона случайного выбора вокруг текущего набора, диапазон может меняться за время моделирования или предварительно быть установлен. Диапазон должен быть выбран так, чтобы максимально увеличить эффективность алгоритма, причем здесь важно руководствоваться процентом принятия решения. Если принятие 100%, то диапазон мал и алгоритм не будет эффективным, это ясно уже из того, что из двух

достаточно удаленных равновероятных наборов алгоритм генерирует наборы исключительно вокруг одного из них. С другой стороны, очень большой диапазон тоже не выгоден, поскольку снижает эффективность алгоритма. Таким образом, эффективным считается принятие следующего МК шага с вероятностью 30-70% [15]. За время моделирования температура плавно убывает до некоторого положительного наименьшего значения. Этим способом удается достигнуть минимума целевой функции. Последняя процедура - это так называемый температурный отжиг. Для температуры  $T$  шаг МК включает в себя определение, соответственно, значений (25) для нового и предыдущего набора  $\delta v_2$  и  $\delta v_1$ . Одним из условий принятия нового набора служит условие для случайной величины  $r$ :  $r < \exp(-(\delta v_2 - \delta v_1)/T)$ ,  $0 \leq r < 1$ ,  $\delta v_2 - \delta v_1 \geq 0$ . Отжиг позволяет формировать эффективную последовательность наборов, вероятностно сходящихся к решению. Вероятностная сходимость отличается от обычной. Для эргодических процессов эффективная последовательность сходится как обычная лишь для элементов этой последовательности, усредненных по неограниченному ансамблю или усредненных по неограниченному времени моделирования. Из ранее полученных наборов выбирается начальный набор, наиболее приближенный к искомому, и отжиг может повторяться несколько раз. В нашем случае искомый набор определяется однозначно, поэтому повторять отжиг нужно только в случае, когда при наименьшей температуре оказывается  $\delta v > 0$ .

### С. Результаты моделирования

Нами получены выборки с квантователя длиной в  $10^3$  отчетов искаженной линейной модели модулятора второго порядка для постоянных входных сигналов. Искажения, отвечающие технологическому разбросу конденсаторов и установленным коэффициентам усиления ОУ, задавались от 0.1% до 1%. В качестве начального набора устанавливались неискаженные параметры модулятора [10]. После многочисленных процедур отжига для 4 мерного пространства  $\delta v \sim 0.2$ . Включение в набор параметров начального состояния модулятора позволило перейти к резко пониженному уровню локального экстремума и получить 98% совпадение отчетов,  $\delta v = 0.020$ . Последний шаг - определение  $g'_{12}$  в (24) по искажению постоянной составляющей сигнала заканчивает методику восстановления внутренних параметров модулятора.

## VII. Выводы

В работе изучена модель АЦП СДМ модулятора. Аналитически изучено влияние линейного искажения внутренних зарядоёмких элементов. С помощью поведенческой модели показано влияние нелинейности интеграторов СДМ. На основании результатов теории хаоса и исследовании устойчивости предложена методика по восстановлению исходного сигнала и поиску внутреннего набора параметров линейной модели с образцовой выборки реального устройства.

Установлено, что АЦП модулятор работает в нехаотическом режиме. Для такого режима нельзя разграничить устойчивую и неустойчивую область состояний модулятора, как для хаотического [8]. Тем не менее, сформулированы достаточные условия для того, чтобы состояния модулятора находились в ограниченной области фазового пространства.

Предложена методика восстановления входного сигнала при помощи эффективного вычитания шума квантователя. Шум формируется продвинуто-запаздывающим фильтром таким образом, что его фаза не отличается от собственного шума модулятора. Восстановленный сигнал может использоваться как с образцовых выборок реальных устройств, так и с линейной поведенческой модели, что дает основания с учетом неоднородности фильтра избавиться от неидеальностей, связанных с нелинейностью. Восстановление сигнала используется также для исследования искаженных компонентов модулятора: масштабирующих коэффициентов и коэффициентов утечки. Источником этих искажений служит разброс параметров литографии и другие технологические особенности изготовления АЦП. Аналитически показана зависимость этих параметров от коэффициента усиления ОУ интеграторов.

Предложен алгоритм поиска параметров для устройства. Задача поиска коэффициентов сведена к задаче на экстремум целевой функции, заданной в пространстве с размерностью  $3 \cdot n - 1$ . Данное пространство параметров линейной модели сводится к такой размерности с учетом произвольности масштабирования выхода последнего интегратора и начальных состояний модулятора. За основу поиска минимума целевой функции взят алгоритм Монте-Карло, генерирующий эффективную выборку набора параметров. Моделирование для линейной модели показывает, что алгоритм находит искомый набор.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Микросхемы АЦП и ЦАП. Справочник // Додедка, 2005, с.24-34
- [2] Mingliang L, Tutorial on Designing Delta-Sigma Modulators Extron Electronics, 2004, [www.commsdesign.com/showArticle](http://www.commsdesign.com/showArticle)
- [4] Черных А.В. Цифровой сигма дельта модулятор // Сб. научных Тр. «Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем-2008» М.:ИППМ РАН, 2008–550с
- [4] Дубинский А.В. Высокочастотные широкополосные КМОП сложно-функциональные блоки синтезаторов частот, Москва, МИФИ, 2009, диссертация канд. тех. наук
- [5] Хохряков ЕИ., Исследование устойчивости каскадного однобитового сигма-дельта модулятора/ Вопросы радиоэлектроники, 2013, т.2, №2, с.144-154
- [6] Analog Devices Analog-To-Digital Converters // [www.analog.com/en/search.html?q=AD776](http://www.analog.com/en/search.html?q=AD776) (дата обращения 26.03.2018)
- [7] Vaidyanathan P.P. , Nguyen T.Q. , “A Trick for the Design of FIR Half Band Filters”, // IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. CAS -34, No. 3 , March 1987

- [8] Hogenauer E.B. An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation. IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing, V. ASSP-29, NO. 2, 1981
- [9] Risbo.L Sigma-delta-Modulators - Stability Analysis and Optimization. Technical University of Denmark the Electronics Institute, 1997, Ph.D. degree, p.178
- [10] Зайцев А.В., Маломощные прецизионные КМОП сложно-функциональные блоки сигма-дельта модуляторов. Москва, НИЯУ МИФИ. 2012, диссертация канд. тех. наук.
- [11] Chua L.O., Chai Wah Wu Symbolic dynamics of piecewise-linear maps. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. V.41, 1994, p.420 – 424.
- [12] Левитов Л.С., Шитов А.В. Функции Грина задачи и решения. М.,Физмалит, 2003. с.388
- [13] Allen M.P.,Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford University Press.1991.p.118-123
- [14] Frenkel D.,Smit B. Understanding Molecular Simulation. Academic Press. 2002. p. 31-32
- [15] Schattke W., Muino R. Quantum Monte Carlo Programming for Atoms, Molecules, Clusters, and Solids. Wiley-VCH. 2013. p. 279

## Recovering Signal and $\Sigma$ - $\Delta$ Modulator Parameters

E.I. Khokhryakov

JSC ELVEES, Zelenograd, zhen\_khokh@mail.ru

**Abstract** — In the paper models of one bit cascaded sigma-delta modulator (SDM) of analog-to-digital converter (ADC) is presented. By discussing models of ADC, we have developed a technique of definition of inner modulator parameters, which are based on linear model. For ADC model applied a slightly random exciting deviation to modulator parameters has been successfully recovered from output samples. The linear ADC model contains the following parameters: inner scale coefficients, open-loop gain of operational amplifier, integrator's leakage. A stability criterion in non-chaotic mode of SDM has been applied to one-bit architecture. The criterion can be extended to n-th SDM order. The technique of recovering parameters includes the stability criteria, extremum problem in 3n-1 dimensional space. Parameters are taken from output sampling by applying Monte Carlo (MC) algorithm to extremum-solving problem. An essential part of Monte Carlo algorithm is annealing. Other problem is signal recovering. For simulation purposes, we rather suggest retarded-advanced filter than a well-known finite impulse response filter. That technique better improves performance of signal recovering than applying the low pass finite impulse response filter to the modulator output. Offered filter provides to get a component, which is phase-correlated with modulator output and is not phase-correlated with input signal. The component can efficiently substrate modulator noise. It is important that extracted component correlates with nonlinear noise components. Comparing recovered and input signal we have defined an expression on parameters. Other expressions and MC algorithm define the rest parameters. By discussing unipolar and difference amplifier connection, it has been shown that there is no parasitic common-mode output component for the unipolar architecture. For testing ADC devices, recovering parameters and common-mode observation can be applied independently.

**Keywords** — Sigma-delta, cascaded, Monte Carlo, ADC, theory of chaos, symbolic modeling, noninvertible region.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Michroschemi ADC i DAC. Spravochnik // Dodedka, 2005, s.24-34.
- [2] Mingliang L, Tutorial on Designing Delta-Sigma Modulators Extron Electronics, 2004, www.commsdesign.com/showArticle
- [3] Chernich A.V. Cyfrofoy sigma delta modulator //Sb. nauchnih Tr. «Proplemi rasrabotki perspektivnih micro i nonoelectronykh system-2008» M.: IPPM RAS, 2008 – 550 s
- [4] Dubinskii A.V. Vysokochastonye shirokopolostnye CMOS slozhno-funktsyonalnye bloke sentezatorove chastot, Moscow, MEPHI, 2009, disertatsiya of kandidat nauk.
- [5] Khokhryakov E.I. Stable equilibrium study cascaded one bit sigma-delta modulator // Voprosy Radioelectronici, 2013, T.2, №2, p.144-154.
- [6] Analog Devices Analog-To-Digital Converters // www.analog.com/en/search.html?q=AD776 (access date: 26.03.2018)
- [7] Vaidyanathan P.P. , Nguyen T.Q. , “A Trick for the Design of FIR Half Band Filters”, // IEEE Transactions on circuits and systems, Vol. CAS -34, No. 3 , March 1987.
- [8] Hogenauer E.B. An Economical Class of Digital Filters for Decimation and Interpolation. IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing, V. ASSP-29, NO. 2, 1981.
- [9] Risbo.L Sigma-delta-Modulators - Stability Analysis and Optimization. Technical University of Denmark the Electronics Institute, 1997, Ph.D. degree, p.178.
- [10] Zaitsev A.V. Maloshumiashie pretsisionnye CMOS slozhnofunktsyonalnye bloke sigma-delta modulatorov, Moscow, MEPHI, 2012, disertatsiya of kandidat nauk.
- [11] Chua L.O., Chai Wah Wu Symbolic dynamics of piecewise-linear maps. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. V.41, 1994, p.420 – 424.
- [12] Levitov L.S., Shitov AV Funktsii Grina zadach i resheniia, Moscow, Fizmalit, 2003, s 388.
- [13] Allen M.P.,Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford University Press.1991.p.118-123.
- [14] Frenkel D.,Smit B. Understanding Molecular Simulation. Academic Press. 2002. p. 31-32.
- [15] Schattke W., Muino R. Quantum Monte Carlo Programming for Atoms, Molecules, Clusters, and Solids. Wiley-VCH. 2013. p. 279.