

Достоверность и точность решения систем ОДУ в среде моделирования разнородных динамических систем ПА10 (РА10)

Д.М. Жук, Д.Ю. Кожевников, В.Б. Маничев

zhuk@bmstu.ru, kozhevniko@bmstu.ru, manichev@bmstu.ru,

МГТУ им. Н.Э.Баумана, г. Москва

Аннотация — В статье рассмотрены проблемы достоверного и точного решения систем ОДУ для среды моделирования разнородных динамических систем - ПА10 (РА10), которая будет превосходить по достоверности и точности моделирования подобные зарубежные программные продукты при не высокой, заданной по умолчанию, точности решения систем ОДУ. Основное назначение ПА10 – это достоверное и точное моделирование и оперативный инженерный анализ во временной области разнородных (multiphysics) систем и объектов, в первую очередь, изделий мехатроники. Рассматривается опыт создания математического ядра программы ПА10 - программы решателя систем ОДУ *manzhuk*, которая по достоверности и точности расчетов при невысоких требованиях к точности интегрирования превосходит соответствующие решатели пакета математических программ MATLAB, а тем более превосходит решатели систем ОДУ программы моделирования электронных схем общего назначения SPICE (Gear и Trapezoid методы).

Ключевые слова — автоматизированное проектирование электронных схем, численное моделирование, системы инженерного анализа, динамические системы, обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), дифференциально-алгебраические уравнения (ДАУ).

I. ВВЕДЕНИЕ

При моделировании разнородных динамических систем необходимо использовать междисциплинарный, мультифизичный (multidiscipline, multiphysics) анализ на сосредоточенном и распределенном уровнях моделирования. Такой подход будет соответствовать требованиям достоверности и точности при проектировании сложных изделий, в первую очередь, мехатроники. В настоящее время также растут потребности в высокоточном моделировании динамических систем, которые описываются жесткими и сверхжесткими системами ОДУ.

Моделирование и анализ во временной области электронных схем сейчас выполняется с помощью программ, использующих решатели систем ОДУ программы моделирования электронных схем общего назначения SPICE. В программных продуктах зарубежных компаний основное внимание в настоящее время уделяется разработке моделей компонентов электронных схем, интерфейсу и удобству работы пользователей. Однако с усложнением решаемых задач появляется

необходимость математического моделирования волновых эффектов и решения супержестких систем ОДУ, а при решении задач мехатроники приходится решать именно такие задачи. Эти задачи зарубежных компаний сейчас не решают. Основной недостаток программ численного моделирования динамических систем (например, MATLAB_SIMULINK [9]) состоит в получении неверного результата численного моделирования динамических систем при невысоких, заданных по умолчанию, требованиях к математической точности интегрирования соответствующих систем ОДУ, моделирующих динамическую систему (обычно этот параметр обозначается как *eps*, по умолчанию $eps=0.001$ в программе MATLAB_SIMULINK). Разработка программного продукта ПА10 (Программа Анализа версии 10) или РА10 (Program for Analysis, version 10) направлена на устранение этого недостатка.

В сфере математического моделирования, инженерного анализа и оптимизации динамических систем на основе дифференциальных уравнений можно выделить два основных направления:

1) Моделирование в пространстве и времени на основе дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП). Примером соответствующей среды моделирования является Multiphysics Simulation компании ANSYS [13] и другие подобные системы [12].

2) Моделирование динамических систем во времени на основе как систем ОДУ, разрешенных относительно производных, так и систем дифференциально алгебраических уравнений (ДАУ), не разрешенных относительно производных. Примерами соответствующих сред моделирования являются MATLAB_SIMULINK компании MathWorks [9], ПА9 МГТУ имени Н.Э. Баумана [14] и другие подобные программные продукты [12]. Разработка ПА10 выполняется именно по этому направлению.

Численное решение дифференциальных уравнений, в свою очередь, часто сводится к численному решению соответствующих систем нелинейных и линейных алгебраических уравнений (НАУ и ЛАУ).

При разработке программного обеспечения для математического моделирования динамических систем во времени необходимо учитывать следующие проблемы:

1) Большинство инженеров-проектировщиков не являются специалистами в области численных методов и программ для решения систем ОДУ-ДАУ, НАУ и ЛАУ, поэтому достоверность и заданная точность решения всех перечисленных систем должны в обязательном порядке обеспечиваться при тех значениях параметров программ-решателей соответствующих уравнений, которые рекомендуются для этих решателей по умолчанию, либо обязательное сообщение о невозможности решения соответствующей системы уравнений с заданной точностью.

2) Значения параметров математических моделей реальных изделий и объектов и, как следствие, значения коэффициентов соответствующих систем уравнений, часто получены экспериментальным путем с невысокой математической точностью. Кроме того, необходимо учитывать технологический разброс параметров реальных изделий и их вариации в процессе эксплуатации и старения изделий. Поэтому при базовом, начальном математическом моделировании и инженерном анализе динамики проектируемых изделий не требуется высокая математическая точность выдаваемых пользователю результатов. Поэтому требуемая математическая точность решения систем ОДУ-ДАУ по умолчанию может быть невысокой, но достоверность результатов и заданная точность решения должны быть обеспечены со стопроцентной гарантией.

Планируемая разработка среды достоверного и точного моделирования разнородных динамических систем ПА10 (РА10) направлена также на решение этих проблем. Основная цель статьи – описание полученных результатов исследования проблемы достоверного и точного численного решения систем ОДУ, моделирующих динамические системы, при невысоких требованиях к математической точности конечных результатов.

II. ПРОЕКТ ПА10 (РА10)

На рис. 1 показана схема моделирования разнородных динамических систем в ПА10 по методу аналогий систем ОДУ-ДАУ, описывающих моделируемые системы.

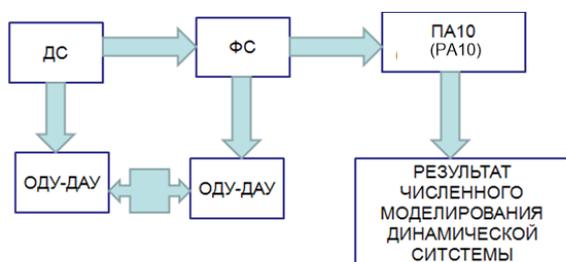


Рис. 1. Схема моделирования динамических систем по методу математических аналогий

На рис. 1 ДС – это моделируемая динамическая система, а ФС – это формальная схема из моделей элементов динамической системы, связанных как направленными связями (переменная на входе элемента схемы

равна переменной на выходе соответствующего элемента схемы, как при моделировании систем управления в программах MBTU, MATLAB_SIMULINK и т.п.), так и ненаправленными связями («электрическими» – сумма токов в узлах связи элементов схемы равна нулю, как при моделировании электронных схем в программах ПА9, SPICE и т.п.).

В настоящее время на основе программы решателя систем ОДУ-ДАУ manzhuk разработан прототип ПА10 мини [14], позволяющий вводить тестовые системы ОДУ-ДАУ и простые электрические цепи, в качестве входного языка полнофункциональной версии ПА10 планируется использование языка MODELICA [1], а решатель систем ОДУ-ДАУ manzhuk обеспечит достоверность и точность моделирования при условии достоверности и точности решаемой математической модели.

III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ЯДРО ПА10 - ПРОГРАММА MANZHUK И РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ

Математическое и численное моделирование непрерывных динамических систем основано на решении систем ОДУ-ДАУ, моделирующих состояние и поведение таких систем. В ПА10 сформулирована наиболее общая постановка задачи решения систем ДАУ в расширенном пространстве дифференциально-алгебраических переменных, которая имеет вид [2]:

$$F(X, PX, Y, t) = 0,$$

где X – вектор координатного базиса дифференциальных переменных состояния размерностью m , t – независимая переменная (в ПА10 – время), $PX = dX/dt$ – вектор производных дифференциальных переменных состояния по времени размерностью m , Y – вектор алгебраических переменных, размерностью k , F – вектор-функция системы ДАУ размерностью $(m + k)$ – левая часть системы ДАУ. Заданы согласованные начальные условия $X_0 = X(0)$, $Y_0 = Y(0)$ и отрезок интегрирования $[T_0, T_k]$, T_0 – время начала интегрирования T_k – время окончания интегрирования. Выбор надежных, высокоточных методов и алгоритмов для программы manzhuk рассмотрен в работах [6]-[7]. При программной реализации выбранных методов обычно контролируется только локальная погрешность интегрирования, но достоверность решения требует контроля полной глобальной погрешности интегрирования, для чего необходимо обеспечить соответствующую устойчивость методов интегрирования.

Исследование устойчивости методов решения систем ОДУ основано на решении уравнения Далквиста:

$$dy/dt = \lambda y,$$

где $\lambda = \text{Re}(\lambda) + j\text{Im}(\lambda)$ – комплексная постоянная, $y_0 = 1$, а аналитическое решение будет $y(t) = \exp(\lambda t)$.

Области устойчивости методов интегрирования строятся в соответствующей комплексной плоскости при решении этого уравнения с постоянным шагом интегрирования h . В результате можно выделить 5 базовых классов фундаментальных решений данного уравнения, показанных на рис. 2.

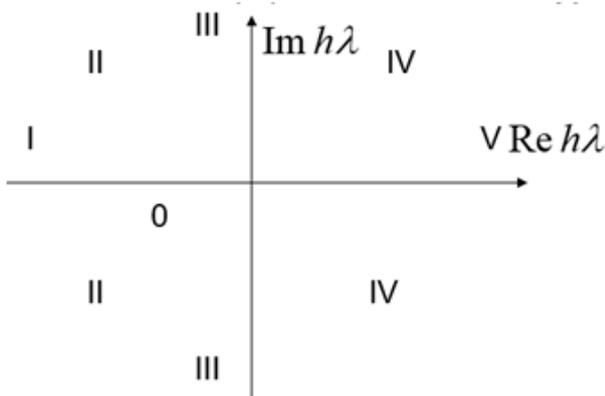


Рис. 2. Пять базовых классов для фундаментальных решений уравнения Далквиста

В общем случае при решении разнообразных систем ОДУ необходимо как минимум достоверно и точно решать именно эти пять базовых классов задач. Соответствующие решения показаны на рис. 3.

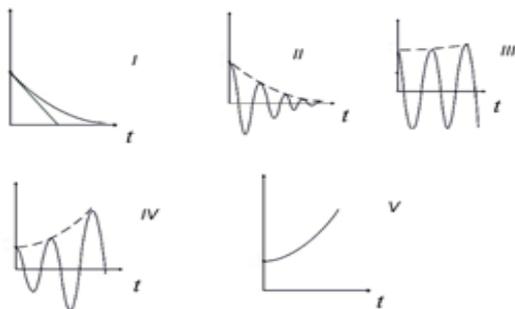


Рис. 3. Пять базовых классов для фундаментальных решений линейных систем ОДУ

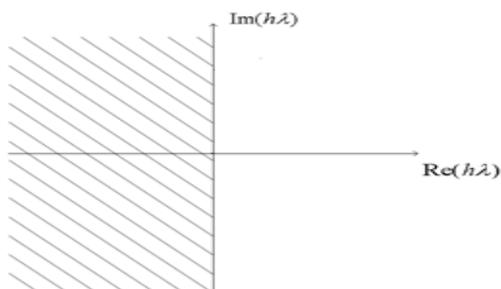


Рис. 4. AL-область абсолютной устойчивости методов численного решения систем ОДУ-ДАУ

Чтобы гарантировать получение качественно корректного решения для вышеуказанных классов задач метод интегрирования должен быть устойчивым для устойчивых систем ОДУ (I и II классы задач) и должен быть неустойчивым для неустойчивых систем ОДУ (IV V классы задач), поэтому необходимо, чтобы методы интегрирования были соответственно AL-устойчивыми (AL-stability – Absolute stability in Left half-plane of the complex stability plane of numerical integration), т.е. абсолютно устойчивыми строго в левой полуплоскости комплексной плоскости устойчивости методов интегрирования, как показано на рис. 4 [6].

Программа моделирования электронных схем общего назначения SPICE тестировалась только на решении тестовых электронных схем (усилителей, инверторов и т.п.) по следующей методике. Предлагался набор моделей базовых элементов электронных схем (источник тока p-n перехода, барьерная емкость и диффузионная емкость диодов и транзисторов) с заданными аналитическими функциями и наборами внутренних параметров. Предлагался также набор электронных схем с графиками ожидаемых решений и рекомендуемыми таблицами со сравнительными оценочными параметрами программы [8]. Такое тестирование оказывается полезным, т.к. позволяет идентифицировать частные затруднения программ при решении определенных классов задач, но оно не позволит установить соотношение между задаваемой и действительно достигнутой точностями приближенного решения. Поэтому одной из важнейших частей тестирования является тестирование математического ядра таких программ. Строгий подход в тестировании математического ядра состоит в использовании математических тестовых задач, аналитические решения которых известны. Решение систем ОДУ-ДАУ применяется не только в программах анализа электронных схем, но и в математических пакетах общего назначения, в которых реализованы самые надежные методы и алгоритмы, поэтому была поставлена задача разработки программы решателя систем ОДУ-ДАУ manzhuk, не уступающего по достоверности и точности расчетов соответствующим решателям пакета MATLAB.

В пакете MATLAB 2017 реализованы 8 методов решения систем ОДУ [9]. В программе manzhuk реализованы неявные методы интегрирования M1, M2, M3 [7]:

- M1 - A-устойчивый первого порядка точности (совпадает после пересчета параметров с неявным методом Эйлера);
- M2 – AL-устойчивый неявный метод второго порядка точности (совпадает после пересчета параметров с неявным методом трапеций);
- M3 - AL-устойчивый неявный метод четвертого порядка точности (совпадает после пересчета параметров с неявным методом Лобатто IIIA).

В качестве базового набора тестовых задач, на которых отлаживались основные модули программы manzhuk, были разработаны пять тестовых линейных однородных систем ОДУ 2-го порядка, имеющих аналитические решения, соответствующие пяти базовым фундаментальным решениям, показанным на рис. 2 и рис. 3. Тестовая линейная система ОДУ 2-го порядка имеет вид:

$$dX/dt = A * X + B,$$

где X- вектор неизвестных системы ОДУ, A - матрица постоянных коэффициентов системы размером [2*2], B – постоянный вектор.

Полученные пять тестовых задач с известным аналитическим решением, представленные в таблице 1.

Пять тестовых задач для решателей систем ОДУ-ДАУ

Тесты	Коэффициенты	Начальные условия	Время расчета	Аналитическое решение
1	$a_{11}=-5/6$ $a_{12}=1/3$ $a_{21}=1/3$ $a_{22}=-1/3$ $b_1=5/2$ $b_2=0$	$x_{10}=0$ $x_{20}=0$	$t=[0...60]$	$x_{1a} = -2*exp(-t) - 3*exp(-t/6) + 5$ $x_{2a} = exp(-t) - 6*exp(-t/6) + 5$
2	$a_{11}=-1/5$ $a_{12}=1$ $a_{21}=-1$ $a_{22}=-1/5$ $b_1=0$ $b_2=0$	$x_{10}=1$ $x_{20}=1$	$t=[0 ... 160]$	$x_{1a} = exp(-t/5)*cos(t)+exp(-t/5)*sin(t)$ $x_{2a} = exp(-t/5)*cos(t)-exp(-t/5)*sin(t)$
3	$a_{11}=0$ $a_{12}=-1$ $a_{21}=1$ $a_{22}=0$ $b_1=0$ $b_2=0$	$x_{10}=1$ $x_{20}=0$	$t=[0...1256]$	$x_{1a} = cos(t)$ $x_{2a} = sin(t)$
4	$a_{11}=2$ $a_{12}=4$ $a_{21}=-4$ $a_{22}=2$ $b_1=10$ $b_2=5$	$x_{10}=-10$ $x_{20}=-10$	$t=[0...8]$	$x_{1a} = exp(2*t)*(-10*cos(4*t) - 7.5*sin(4*t))$ $x_{2a} = exp(2*t)*(10*sin(4*t) - 7.5*cos(4*t)) - 2.5$
5	$a_{11}=5$ $a_{12}=1$ $a_{21}=3$ $a_{22}=3$ $b_1=0$ $b_2=0$	$x_{10}=2$ $x_{20}=1$	$t=[0 ... 4]$	$x_{1a} = 1.75*exp(6*t) + 0.25*exp(2*t)$ $x_{2a} = 1.75*exp(6*t) - 0.75*exp(2*t)$

Отказы для данных тестов фиксировались, если максимальная относительная погрешность была много больше 0.001 на заданном отрезке интегрирования. Итоговые результаты тестирования для данного набора тестов приведены в таблице 2.

Таблица 2

Сравнение программ решателей систем ОДУ на разработанном наборе тестовых задач

Программа - решатель систем ОДУ	Тесты				
	1	2	3	4	5
<i>manzhuk</i> (метод МЗ)	+	+	+	+	+
<i>MATLAB ode45</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode23</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode113</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode15s</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode23s</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode23t</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode23tb</i>	+	+	-	-	-
<i>MATLAB ode15i</i>	+	+	-	+	+

Знак (+) означает корректное решение тестов с точностью $eps=0.001$, знак (-) - неполучение заданной точности $eps=0.001$.

В качестве примера приведем результаты расчета теста 3 лучшими решателями MATLAB и программой *manzhuk* из библиотеки SADEL (N-общее число шагов интегрирования, Emax – максимальная относительная погрешность по результатам расчета):

ode45: Emax=0.125, N=6421
Ode15s: Emax=0.398, N=4282
ode15i: Emax=0.132, N=5841
manzhuk (метод МЗ): Emax=0.0015, N=7298

Следует отметить, что качественное решение для всех методов MATLAB было правильным. Максимальные ошибки были получены на тесте 3.

Дальнейшая отладка математического ядра ПА10 выполнялась на тестовых нелинейных системах ОДУ из работ [10] и [8]. Итоговые результаты тестирования программы *manzhuk* приведены в работах [10]-[11].

По результатам тестирования были сформированы соответствующие рекомендации по использованию программы *manzhuk*.

IV. ВЫВОДЫ

Разработка и тестирование программы *manzhuk* позволяет сделать следующие выводы.

1. Для гарантии получения качественно корректного и достоверного решения разнообразных систем ОДУ-ДАУ при контроле только локальной погрешности интегрирования численный метод решения должен быть АL-устойчивым.

2. Для получения качественно достоверного и корректного решения жестких и сверхжестких систем ОДУ-ДАУ необходимо на всех шагах численного интегрирования обеспечивать численное решение соответствующих плохо обусловленных систем ЛАУ с повышенной точностью, например, для удвоенной точности вычислений надо гарантированно получать точность

порядка 12-15 верных значащих цифр для всех значений элементов вектора решения систем ЛАУ.

Результаты тестирования позволили также определить направление дальнейших исследований.

1. Разработать более эффективные методы и алгоритмы автоматического выбора шага для АЛ-устойчивых неявных методов интегрирования.

2. Разработать алгоритмы и программы с повышенной точностью вычислений с возможностью аппаратной реализации соответствующих алгоритмов.

3. Разработать эффективные алгоритмы и программы решения систем ОДУ-ДАУ высокой и сверхвысокой размерности с повышенной точностью вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] URL: <https://www.modelica.org/documents/>. (дата просмотра 01.04.2018)
- [2] Норенков И.П., Трудоношин В.А., Федорук В.Г. Метод формирования математических моделей для адаптируемых программных комплексов анализа ра-диоэлектронных схем/Радиотехника, 1986, № 9. С.67-72.
- [3] Butcher, John C., Numerical methods for ordinary differential equations (2nd ed.), John Wiley & Sons Ltd, 2008.- 484 p.
- [4] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ.-М.:Мир, 1990.- 512 с.
- [5] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи: Пер. с англ.-М.:Мир, 2001.- 498 с.
- [6] Жук Д.М., Маничев В.Б., Ильницкий А.О. Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области. // Информационные технологии. – 2010, №7, часть1. С. 16-24
- [7] Жук Д.М., Маничев В.Б., Сахаров М.К. SADEL – библиотека «сверхточных» решателей для программного комплекса ПА10 (SADEL-PA10). // В сб. научных трудов МЭС-2012 - М.: ИППМ РАН, 2012. С. 147-153.
- [8] O. Vityaz, V.Porra. Testing of Time Domain Simulators for Nonlinear Electronic Circuits. Helsinki University of Technology, Faculty of Electrical Engineering, Electronic Circuit Design Laboratory, Report 4, Finland, July 1988.
- [9] URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (дата просмотра 01.04.2018)
- [10] Маничев В.Б., Жук Д.М., Витюков Ф.А. Метод математического тестирования программ анализа переходных процессов в САПР электронных // В сб. научных трудов МЭС-2014 - М.: ИППМ РАН, 2014. С. 166-172.
- [11] Борисенко Н.Д., Жук Д.М., Маничев В.Б. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ РЕАЛИЗАЦИЙ ЯЗЫКА MODELICA, Технологии инженерных и информационных систем. 2015. № 3. С. 43-49.
- [12] Маничев В.Б., Глазкова В.В., Кузьмина И.А. Численные методы. Численное решение дифференциальных и алгебраических уравнений в САЕ-системах САПР: Учеб. пособие. - М.: ИНФРА-М. 2016. - 152 с.
- [13] URL: <https://www.ansys.com/products/platform/multiphysics-simulation> (дата просмотра 04.05.2018).
- [14] URL: <http://backend.pa10.rk6.bmstu.ru/> (дата просмотра 04.05.2018).
- [15] URL: https://www.cadence.com/content/cadence-www/global/en_US/home/tools/pcb-design-and-analysis/analog-mixed-signal-simulation/allegro-pspice-simulator.html (дата просмотра 04.05.2018).
- [16] URL: <https://www.synopsys.com/verification/ams-verification/circuit-simulation/hspice.html> (дата просмотра 04.05.2018).
- [17] URL: https://www.mentor.com/products/ic_nanometer_design/analog-mixed-signal-verification/analog-fastspice-platform (дата просмотра 04.05.2018).
- [18] URL: <http://www.mscsoftware.ru/products/adams> (дата просмотра 04.05.2018).
- [19] URL: <https://www.plm.automation.siemens.com/ru/products/lms/virtual-lab/> (дата просмотра 04.05.2018).
- [20] URL: <http://model.exponenta.ru/mvtu/20050615.html> (дата просмотра 04.05.2018).
- [21] URL: <http://www.mscsoftware.com/product/easy5> (дата просмотра 04.05.2018).
- [22] URL: <https://www.maplesoft.com/products/maplesim/> (дата просмотра 04.05.2018).
- [23] URL: <http://wolfram.com/system-modeler/> (дата просмотра 04.05.2018).

Reliability and Accuracy of ODE Systems Solution for Modeling Environment of Heterogeneous Dynamic Systems PA10

D. Zhuk, D Kozhevnikov, V.Manichev

zhuk@bmstu.ru, kozhevnik@bmstu.ru, manichev@bmstu.ru,

BMSTU, Moscow

Abstract — For solving some problems of simulation heterogeneous dynamic systems, it is necessary to use interdisciplinary or multiphysics analysis at the concentrated and distributed level of simulation (simulation of MEMS, for example). Such approach will correspond to requirements of reliability and adequacy of simulator, even at very complex products design. Needs for precision simulation dynamic systems with ill-conditioned mathematical models (with stiff and super-stiff ODE set) are increased now continuously. There are many challenges of mathematical simulation in the time domain on

the basis of a solution the stiff ODE sets: in chemistry (for example, problems of a chemical kinetics), in physics (problems of mechanics, an isotope kinetics, laser technics, etc.), in microelectronics and nanoelectronics, in CAE systems. It is increased importance of adequate and precision simulation of heterogeneous dynamic systems. Time-domain simulation and analysis of electronic circuits (by Intel and our firms) is now realized by programs using solvers ODE of SPICE simulator. In EDA software of the foreign companies the basic attention

now is given the user-friendly interface and convenience of using the programs. However with increase in the complexity of solved problems there is a necessity of mathematical simulation of wave effects and solutions of the super-rigid ODE sets. EDA software mentioned above companies do not solve these problems now. The basic weakness of known programs for numerical simulation of dynamic systems (for example, MATLAB_SIMULINK) consists in deriving incorrect outcome for numerical simulation of dynamic systems at the low set requirements to a mathematical accuracy (parameter - eps) to integration of corresponding ODE set as model of dynamic system (by default eps=0.001 in MATLAB_SIMULINK). Low requirements to a mathematical accuracy for a solution of mathematical models of dynamic systems result from a low measurement accuracy of initial interior parameters of dynamic systems and accordingly numerical values of different factors, as a rule, and it is necessary to consider also a technological variety of these parameters and aging of modelled products. To disadvantages of known programs for simulation of dynamic systems we can add also its orientation for mathematicians-programmers and the design engineers of the top skills knowing mathematical English language (for example, MATLAB_SIMULINK is not localized). Development of software product PA10 (Program for Analysis, version 10) is directed on elimination of these disadvantages. Problems of reliable and accurate simulation of heterogeneous dynamic systems and objects with program PA10, surpassing similar foreign software products, are considered in this paper. Base function of PA10 is an reliable and accurate simulation and an engineering time-domain analysis of systems and objects for designing products of microelectronics, nanoelectronics and, in the main, mechatronics (MEMS). Experience of development of mathematical kernel PA10 - program solver the ODE set manzhuk is considered. This solver with eps=0.001 surpasses in reliability and accuracy of calculations corresponding solvers in a package of mathematical programs MATLAB and furthermore surpass solvers ODE of SPICE simulator (Gear and Trapezoid methods).

Keywords — Electronic Design Automation (EDA), simulation, Computer Aided Engineering (CAE), dynamic systems, Ordinary Differential Equations (ODE), Differential Algebraic Equations (DAE).

REFERENCES

- [1] URL: <https://www.modelica.org/documents/>. (access date 04.01.2018).
- [2] Norenkov I.P., Trudonoshin V.A., Fedoruk V.G. Metod formirovaniya matematicheskikh modeley dlya adaptiruyemykh programmnykh kompleksov analiza ra-dioelektronnykh skhem (Method of forming mathematical models for adaptable software complexes for analyzing radio-electronic circuits) / Radiotekhnika, 1986, No. 9. P.67-72.
- [3] Butcher, John C., Numerical methods for ordinary differential equations (2nd ed.), John Wiley & Sons Ltd, 2008.- 484 p.
- [4] E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. Solving ordinary differential equations. Nonstiff Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987. New York. London. Paris. Tokyo.
- [5] E. Hairer, S.P., Wanner. Solving ordinary differential equations. Stiff Problems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998. New York. London. Paris. Tokyo.
- [6] D.M. Zhuk, Manichev V.B., Initsky A.O. Metody i algoritmy resheniya differentsial'no-algebraicheskikh uravneniy dlya modelirovaniya sistem i ob'yektov vo vremennoy oblasti (Methods and Algorithms for Solving Differential-Algebraic Equations for Modeling Systems and Objects in the Time Domain). // Information Technology. - 2010, № 7, part 1. Pp. 16-24
- [7] D.M Zhuk, Manichev V.B., Sakharov M.K. SADEL – biblioteka «verkhtochnykh» reshatelye dlya programmnoy kompleksa PA10 (SADEL-PA10 (SADEL - library of "high-precision" solvers for software complex PA10 (SADEL-PA10)). // In the collection. scientific works of MES-2012 - M.: IPPM RAS, 2012. P. 147-153.
- [8] O. Vityaz, V.Porra. Testing of Time Domain Simulators for Nonlinear Electronic Circuits. Helsinki University of Technology, Faculty of Electrical Engineering, Electronic Circuit Design Laboratory, Report 4, Finland, July 1988.
- [9] URL: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html> (access date 04.01.2018)
- [10] Manichev V.B., Zhuk D.M., Vityukov F.A. Metod matematicheskogo testirovaniya programm analiza perekhodnykh protsessov v SAPR elektronnykh (A method for mathematical testing of the analysis of transient processes in electronic CAD) // In Sat. scientific works of MES-2014 - M.: IPPM RAS, 2014. pp. 166-172.
- [11] Borisenko N.D., Zhuk D.M., Manichev V.B. METOD MATEMATICHESKOGO TESTIROVANIYA REALIZATSIY YAZYKA MODELICA (METHOD OF MATHEMATICAL TESTING OF MODELICA LANGUAGE REALIZATIONS), Technologies of engineering and information systems. 2015. № 3. P. 43-4.
- [12] Manichev V.B., Glazkova V.V., Kuz'mina I.A. Chislennoye metody. Chislennoye resheniye differentsial'nykh i algebraicheskikh uravneniy v SAYe-sistemakh SAPR (Numerical methods. Numerical solution of differential and algebraic equations in CAE systems): Ucheb. posobiye. - M.: INFRA-M. 2016. - 152 s
- [13] URL: <https://www.ansys.com/products/platform/multiphysics-simulation> (access date 04.05.2018)
- [14] URL: <http://backend.pa10.rk6.bmstu.ru/> (access date 04.05.2018)
- [15] URL: https://www.cadence.com/content/cadence-ww/global/en_US/home/tools/pcb-design-and-analysis/analog-mixed-signal-simulation/allegro-pspice-simulator.html (access date 04.05.2018)
- [16] URL: <https://www.synopsys.com/verification/ams-verification/circuit-simulation/hspice.html> (access date 04.05.2018)
- [17] URL: https://www.mentor.com/products/ic_nanometer_design/analog-mixed-signal-verification/analog-fastspice-platform (access date 04.05.2018)
- [18] URL: <http://www.mssoftware.ru/products/adams> (access date 04.05.2018)
- [19] URL: <https://www.plm.automation.siemens.com/ru/products/lms/virtual-lab/> (access date 04.05.2018)
- [20] URL: <http://model.exponenta.ru/mvtu/20050615.html> (access date 04.05.2018)
- [21] URL: <http://www.mssoftware.com/product/easy5> (access date 04.05.2018)
- [22] URL: <https://www.maplesoft.com/products/maplesim/> (access date 04.05.2018)
- [23] URL: <http://wolfram.com/system-modeler/> (access date 04.05.2018)