УДК 517.518.85:517.443 DOI 10.31114/2078-7707-2018-4-105-111

Верификация справедливости и особенностей теоремы отсчетов для частных случаев числа преобразуемых отсчетов

Г.С. Ханян

ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова», г. Москва,
khanyan@rtc.ciam.ru

***Аннотация* — Работа продолжает исследования автора в области теоремы отсчетов для сигнала конечной длительности в ограниченной полосе частот. С возможной полнотой проводится верификация общего метода преобразования сигнала для частных случаев небольшого числа его отсчетов, в ходе выполнения которой определяются дальнейшие направления развития теории.**

***Ключевые слова* — теорема отсчетов, индекс полосы частот, общий и прямой метод преобразования, наложение ветвей, исчезновение сигнала.**

I. Введение

Одним из основных направлений исследования теоремы отсчетов Уиттекера-Котельникова-Шеннона является обобщение ее классической формулировки $0 \le f < F_{up}$ [1] на полосовую фильтрацию $F_{low} < f < F_{up}$ с целью снижения потребной частоты дискретизации F с $2F_{up}$ до $2(F_{up} - F_{low})$.

Однако серьезным препятствием на этом пути стала проблема наложения частот, обусловленная, как было выяснено в многочисленных публикациях, неудачным расположением относительных границ среза F_{low}/F и F_{up}/F на оси частот f/F. Оказалось, что наложение частот отсутствует, если границы эти являются целыми числами [2]-[4], и многие авторы приняли это достаточное условие за предел возможностей дальнейшего анализа теоремы. Тем не менее, в ряде работ (например, [5]) пришли к понятию «целого и полуцелого позиционирования» частотной полосы сигнала как крайних случаев проявления наложения частот, но так и не дошли до полноценного определения индекса полосы G – параметра, описывающего как отсутствие, так и все промежуточные случаи наложения частот. Ряд авторов ссылаются на работу Коленберга [6], где предложена непростая в аналитическом выражении формула интерполяции отсчетов сигнала, получаемых неравномерной дискретизацией, и рассматривают ее применение как один из способов решения проблемы.

Обобщение теоремы отсчетов на случай полосовой фильтрации сигнала ограниченной длительности впервые сделано в ряде работ автора [7]-[9] с исчерпывающим анализом упомянутой проблемы наложения частот, а также другого, неизвестного в литературе парадоксального явления – полного исчезновения сигнала (обнуления результата преобразования его отсчетов).

Однако полученные решения в форме «ветвей», номера которых выражены не явно, а представляют собой подходящие целые числа, удовлетворяющие неравенствам (с границами, зависящими от заданных относительных частот среза), все же нельзя с удовлетворением считать окончательным этапом развития данного направления теории интерполяции.

Поэтому в настоящей работе ставится, казалось бы, наивная с точки зрения математики, но многообещающая с точки зрения методологии цель – верификация общего метода вычисления преобразования сигнала для частных случаев числа его дискретных отсчетов (от 1 до 4), при которых еще возможно проведение громоздких выкладок. Именно в процессе решения этой задачи появляются новые идеи по дальнейшему развитию теории фурье-анализа с перспективой разработки новых приложений цифровой обработки сигналов в микроэлектронике.

II. Общий тип преобразования сигнала

Объектом исследования является гармонический сигнал ограниченной длительности T

$$s(t) = a\cos(2\pi f t + \varphi);\quad a > 0,\quad f \ge 0,\quad -\pi < \varphi \le \pi \quad (1)$$

с амплитудой a, частотой f и начальной фазой φ, дискретизованный с частотой F так, что его цифровая реализация $s(t_k)$ представляет собой последовательность $N = FT$ отсчетов, полученных в равноотстоящие моменты времени $t_k = t_0 + k/F$; $k = 0, 1, \ldots, N-1$ с произвольным началом t_0.

Рассматривается преобразование

$$s'(t) = \sum_{k=0}^{N-1} s(t_k)\frac{\sin\pi(G+1)(n+\nu-k) - \sin\pi G(n+\nu-k)}{N\sin\pi(n+\nu-k)/N} \quad (2)$$

с параметром G, переводящее последовательность $s(t_k)$ в функцию $s'(t)$ непрерывного времени t, задаваемого двумя переменными – целочисленным номером отсчета n и дробной добавкой ν к нему: $t = t_0 + (n+\nu)/F$; $n = 0, 1, \ldots, N-1$; $0 \le \nu < 1$; $t_0 \le t < t_0 + T$.

Основной теоретический вопрос состоит в том, при каких ограничениях на функцию $s(t)$ и параметры ядра (индекс частотной полосы G и число отсчетов N) преобразование (2) удовлетворяет теореме отсчетов:

$s'(t) = s(t)$, и каковы эффекты нарушения формулировки теоремы.

Ответы на эти вопросы были получены в работе [9]. Приведем, для оперативного доступа, используемую в дальнейшем всю сводку формул для всех разрешенных действительных значений параметров f и G:

1) Преобразованный сигнал есть ветвь с номером I в чистом виде, т.е. представляет собой монохроматический гармонический сигнал

$$s'(t) = s_I(t) = a\cos(2\pi(f + IF)t + \varphi - 2\pi IFt_0) \qquad (3)$$

со смещенными по отношению к исходному сигналу (1) частотой и фазой, если при заданном индексе G частота сигнала f удовлетворяет неравенству

$$\left|\left|\frac{f}{F} + I\right| - \frac{1}{2}\left(\left[\left|G + \frac{1}{2}\right|\right] + \frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}\left(\left|\{G\} - \frac{1}{2}\right| + \frac{1}{N}\right). \qquad (4)$$

Собственно теореме отсчетов удовлетворяет только нулевая ветвь: при $I = 0$ получаем $s'(t) = s_0(t) = s(t)$.

2) Преобразованный с исходной частотой f сигнал является бигармоническим с компонентами типа (3):

$$\begin{aligned} s'(t) &= a\cos(2\pi(f + I'F)t + \varphi - 2\pi I'Ft_0) + \\ &+ a\cos(2\pi(f + I''F)t + \varphi - 2\pi I''Ft_0), \end{aligned} \qquad (5)$$

если при заданном индексе G номера накладывающихся ветвей I' и I'' удовлетворяют системе соотношений

$$\begin{cases} |I' - I''| = |[G] + 1| \\ \left|\frac{f}{F} + \frac{I' + I''}{2}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \left|\{G\} - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{N}\right) \cdot \end{cases} \qquad (6)$$

Область наложения частот максимальна при полуцелом индексе G. Нет наложения при целом индексе G. При околокритическом индексе $-1 < G < 0$ в качестве частного случая «автоналожения» имеет место явление удвоения сигнала: $s'(t) = 2s(t)$.

3) При удовлетворении неравенства

$$\left|\left|\left|\frac{f}{F} + I\right| - \frac{1}{2}\right| - \frac{|[G] + 1|}{2}\right| \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \left|\{G\} - \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{N}\right) \qquad (7)$$

происходит полное исчезновение сигнала: $s'(t) = 0$.

В соотношениях (3) - (7) параметры G и f принимают не любые, а лишь дискретные действительные значения, удовлетворяющие установленным в работе [9] условиям вычислимости преобразования (2), сводящим его правую часть к сумме геометрической прогрессии из комплексных экспонент путем избавления от тригонометрического знаменателя дроби, задающей ядро преобразования, что возможно при ограничениях

$$\mu = \left\{\frac{N(|G| + \operatorname{sgn} G + 1) + 1}{2}\right\}, \quad G(G + 1)\left\{\frac{N}{2}\right\} = \{GN\} = 0 \qquad (8)$$

на параметры G и N, установленных в работе [7] и трактуемых следующим образом:

1) Разрешены лишь квантованные с шагом $1/N$ значения индекса G:

$$G = g + \gamma; \quad g \equiv [G] = 0, \pm 1, \ldots; \quad \gamma \equiv \{G\} = 0, \frac{1}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}. \qquad (9)$$

2) Число отсчетов N может быть любым только в классической формулировке теоремы – при $G = 0$ и $G = -1$ (для других значений G число N четно).

3) Дробная часть $\mu = \{fT\}$ безразмерной частоты сигнала fT может принимать лишь одно из двух значений: $\mu = 0$ или $\mu = 1/2$, в то время как целая часть $m = [fT]$ может быть любым целым числом.

III. Прямой метод преобразования сигнала

Техника непосредственного вычисления суммы (2) для конкретно заданного числа слагаемых N коренным образом отличается от изложенного в работе [9] общего для любого N метода суммирования. Принципиальным для частных случаев N является явная форма результата, получаемого применением общеизвестных формул тригонометрии – косинуса суммы, суммы косинусов и т.п. Такие понятия, как ветвь с номером I, а также суперпозиция (наложение) ветвей I' и I'' отсутствуют. Кроме того, необязательным является соблюдение условий вычислимости (8).

Введем наряду с обозначениями (8) - (9) смещенную фазу ψ, и представим целую часть частоты m в случае четного N разложенной по модулю 2:

$$\psi = \varphi + 2\pi f t_0; \quad m = 2J + j; \quad J = 0, \pm 1, \ldots; \quad j = 0, 1, \qquad (10)$$

что упростит анализ получаемых из (2) выражений.

A. *Число отсчетов сигнала N = 4*

Четыре – максимальное число слагаемых суммы (2), тригонометрические выражения в которых обозримы для осуществления выкладок по их упрощению с помощью школьных формул тригонометрии.

Подставив в (2) фигурирующие в (8) - (10) параметры, сводим (с применением формул приведения и других приемов) каждое из $N = 4$ слагаемых суммы (2) к произведению a на комбинацию синусов и косинусов:

$$\begin{aligned} s'(t) &= a\cos\psi\cos\pi(n + \nu)/4\cos\pi(g + \gamma + 1/2)(n + \nu) + \\ &+ a(-1)^J\cos(\psi + \pi(j + \mu)/2)\cos\pi(n + \nu - 1)/4 \times \\ &\times \cos\pi(g + \gamma + 1/2)(n + \nu - 1) - a(-1)^j\cos(\psi + \pi\mu) \times \\ &\times \sin\pi(n + \nu)/4(\cos\pi(g + \gamma + 1/2)(n + \nu)\cos 2\pi\gamma + \\ &+ \sin\pi(g + \gamma + 1/2)(n + \nu)\sin 2\pi\gamma) - a(-1)^{J+j} \times \\ &\times \cos(\psi + \pi(j + 3\mu)/2)\sin\pi(n + \nu - 1)/4 \times \\ &\times (\cos\pi(g + \gamma + 1/2)(n + \nu - 1)\cos 2\pi\gamma + \\ &+ \sin\pi(g + \gamma + 1/2)(n + \nu - 1)\sin 2\pi\gamma). \end{aligned} \qquad (11)$$

Это наиболее общий вид преобразования (2) для $N = 4$. Приступим к упрощению этой формулы, ограничившись четырьмя возможными комбинациями пары (μ, γ), разрешенными условиями вычислимости (8):

$$\mu = 0: \ \gamma = 1/4, \ 3/4; \quad \mu = 1/2: \ \gamma = 0, \ 1/2. \qquad (12)$$

Целочисленный индекс $G = g$. Подстановка $\gamma = 0$, μ=1/2 в (11) приводит, после осуществления тригонометрических преобразований (детали которых мы опустим), к сумме двух произведений:

$$s'(t) = a\cos\pi(g+1/2)(n+\nu)\cos(\psi - \pi(n+\nu)(-1)^j/4) +$$
$$+ a(-1)^{g+J}\sin\pi(g+1/2)(n+\nu)\times$$
$$\times\cos(\psi - \pi(n+\nu)(-1)^j/4 + ((-1)^j + 2j+1)\pi/4).$$

Множитель перед синусом равен $\pm a$ в зависимости от четности $g+J$, а множитель (в скобках) перед $\pi/4$ равен 2 как для $j=0$, так и для $j=1$, что позволяет свести последний из косинусов к синусу, а всё выражение – к косинусу суммы или разности, в результате чего получаем монохроматический гармонический сигнал:

$$\begin{cases} N=4,\ \ \gamma=0,\ \ \mu=1/2,\ \ j=0,1 \\ s'(t) = a\cos(\psi + \pi(n+\nu)((g+1/2)(-1)^{g+J} - (-1)^j/4)). \end{cases} \tag{13}$$

Полуцелый индекс $G = g + 1/2$. В этом случае $\gamma = 1/2$, и, согласно (12), $\mu = 1/2$. Выражение (11) такими же приемами тригонометрических преобразований, что (13), приводится к произведению двух косинусов:

$$\begin{cases} N=4,\ \ \gamma=1/2,\ \ \mu=1/2,\ \ j=0,1 \\ s'(t) = (1-(-1)^{g+J+j})\,a\cos\pi(g+1)(n+\nu)\times \\ \times\cos(\psi + \pi(n+\nu)(-1)^j/4). \end{cases} \tag{14}$$

Четвертьцелые индексы $G = g + 1/4$, $G = g + 3/4$. Оба случая γ =1/4 и γ =3/4 представляем как γ =1/2+k/4, где $k = \pm 1$. Дробная часть μ безразмерной частоты fT, согласно (12), в обоих случаях равна нулю. Подстановка этих параметров в (11) дает:

$$s'(t) = a(\cos\psi\cos\pi(n+\nu)(g+1+(1-(-1)^j)k/4) +$$
$$+(-1)^J\cos(\psi + \pi j/2)\cos\pi(n+\nu-1)(g+1+(1-(-1)^j)k/4)).$$

Рассмотрение случаев j по отдельности приводит к явно различающимся по форме выражениям:

$$\begin{cases} N=4,\ \ \gamma=1/2+k/4,\ \ \mu=0,\ \ j=0,\ \ k=\pm1 \\ s'(t) = a(1-(-1)^{g+J})\cos\psi\cos\pi(g+1)(n+\nu), \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} N=4,\ \ \gamma=1/2+k/4,\ \ \mu=0,\ \ j=1,\ \ k=\pm1 \\ s'(t) = a\cos(\psi - \pi k(-1)^{g+J}(g+1+k/2)(n+\nu)). \end{cases} \tag{16}$$

B. Число отсчетов сигнала N = 3

Непосредственное вычисление суммы (2) представляется возможным только для разрешенных условиями (8) «классических» индексов $G = 0, G = -1$ с $\mu = 0$:

$$s'(t) = a\sum_{k=0}^{2}\cos(2\pi mk/3 + \psi)\,\frac{\sin\pi(n+\nu-k)}{3\sin\pi(n+\nu-k)/3}. \tag{17}$$

По аналогии с (10) представим целое число m по модулю 3 следующим образом: $m = 3J+j$, $J = 0, \pm1,\ldots$; $j = 0,\pm1$. Введя обозначения $s_k = a\cos(2\pi mk/3+\psi)$, $\sigma_k = \pi(n+\nu-k)/3$, и воспользовавшись формулой для синуса тройного угла, приводим сумму (17) к виду:

$$s'(t) = \sum_{k=0}^{2} s_k\,\frac{\sin 3\sigma_k}{3\sin\sigma_k} = \sum_{k=0}^{2} s_k\,\frac{1+2\cos 2\sigma_k}{3}. \tag{18}$$

Нетрудно установить, что $s_k = a\cos(2\pi jk/3+\psi)$, т.е. не зависит от J. И тогда (18) можно вычислять лишь для трех определяющих m значений j, что приводит (17) к монохроматическому гармоническому сигналу:

$$\begin{cases} N=3,\ \ G=g=\gamma=0,\ \ \mu=0,\ \ j=0,\pm1 \\ s'(t) = a\cos(2\pi j(n+\nu)/3+\psi). \end{cases} \tag{19}$$

C. Число отсчетов сигнала N = 2

Попытаемся при N=2 не ограничивать значения параметров g, γ, m, μ условиями (8). Тригонометрические преобразования приводят тогда (2) к выражению

$$\begin{aligned} &s'(t) = a\cos\psi\cos\pi(g+\gamma+1/2)(n+\nu) + \\ &+a(-1)^{m+g}\cos(\psi+\pi\mu)\sin\pi((g+\gamma+1/2)(n+\nu)-\gamma). \end{aligned} \tag{20}$$

Условиями (8) разрешены две комбинации параметров γ и μ, придающие выражению (20) существенно различающиеся формы:

$$\begin{cases} N=2,\ \ \gamma=0,\ \ \mu=1/2 \\ s'(t) = a\cos(\psi + (-1)^{m+g}\pi(g+1/2)(n+\nu)), \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} N=2,\ \ \gamma=1/2,\ \ \mu=0 \\ s'(t) = (1-(-1)^{m+g})\,a\cos\psi\cos\pi(g+1)(n+\nu). \end{cases} \tag{22}$$

D. Число отсчетов сигнала N = 1

Выражение (2) для преобразованного сигнала в самом общем виде выглядит так:

$$s'(t) = a\cos\psi\,\frac{\cos\pi(G+1/2)(n+\nu)}{\cos\pi(n+\nu)/2}. \tag{23}$$

IV. Идентификация особых явлений

Будем среди результатов (13) - (16), (19), (21) - (23) непосредственного вычисления по формуле (2) искать и верифицировать явления, описанные формулами (3) - (7), полученными общим методом.

A. Существование I-й ветви в чистом виде

Условие существования ветви в чистом виде (3) задается неравенством (4), в котором $f/F = (m+\mu)/N$. Сама формула (3) при этом выглядит так:

$$s_I(t) = a\cos(\psi + 2\pi((m+\mu)/N + I)(n+\nu)). \tag{24}$$

Число отсчетов $N = 1$. Попробуем представить левую часть (23) как ветвь с номером I. Приравнивание правых частей (23) и (24) сводит задачу к доказательству тождества

$$\begin{aligned} &\cos(\psi + 2\pi(m+\mu+I)(n+\nu))\cos\pi(n+\nu)/2 = \\ &= \cos\psi\cos\pi(G+1/2)(n+\nu). \end{aligned} \tag{25}$$

Замечаем, что вторые по порядку расположения косинусы левой и правой частей (25) похожи, и их можно сократить. Для этого аргументы этих косинусов должны для всех значений безразмерного времени $n+\nu$ равняться в смысле тождества $l\pi(n+\nu)/2+2\pi L = \pi(G+1/2)(n+\nu)$ при каких-либо подходящих значениях $L = 0, \pm 1, \ldots$ и $l = \pm 1$. При $L = 0$ тождество это представляет собой уравнение $G + 1/2 = l/2$, имеющее два решения $G = 0$ и $G = -1$, соответствующие классической формулировке теоремы. Приравнивая таким же способом аргументы при косинусах, содержащих ψ, находим при $L = 0$ и $l = 1$ номер ветви $I = -m - \mu$, который может быть целым числом лишь при $\mu = 0$. Таким образом, мы верифицировали условия вычислимости (8).

Остается теперь убедиться в справедливости неравенства (4), которое при $N = 1$ для найденных значений G и μ становится очевидным: $1/4 < 3/4$.

Преобразованный сигнал выглядит так:

$$s'(t) = a\cos(\varphi - 2\pi IFt_0) = a\cos(\varphi + 2\pi f t_0), \qquad (26)$$

т.е. представляет собой константу $s'(t) = a\cos\psi$, которая совпадает с исходной константой $s(t) = a\cos\varphi$ только в двух случаях: для нулевой ветви $I = 0$ (обеспечивающей выполнение условия справедливости теоремы – когда частота сигнала $f = 0$) и для стартового времени t_0, кратного интервалу дискретизации $1/F$.

Таким образом, зная единственный отсчет $s(t_0)$, правильно можно восстановить только сигнал-константу: $s'(t) = s(t) = \text{const}$.

Число отсчетов $N = 2$. Преобразованный сигнал является монохроматическим с амплитудой a, если он вычислен по формуле (21). Подстановка параметров из верхней строки системы (21) в неравенство (4) дает:

$$\| (m+1/2)/2 + I \| - ([|g+1/2|]/2 + 1/4) | < 1/2 . \qquad (27)$$

Для нахождения номера ветви I приравниваем аргументы косинусов из выражений (21) и (24), и после приведения подобных членов, получаем:

$$I = ((-1)^{m+g}(g+1/2) - (m+1/2))/2 . \qquad (28)$$

Подстановка правой части (28) в (27) дает:

$$\| (-1)^{m+g}(g+1/2)/2 | - ([|g+1/2|]/2 + 1/4) | < 1/2 \iff$$
$$\iff \| g+1/2 | - ([|g+1/2|] + 1/2) | < 1 . \qquad (29)$$

Раскрытие модульных скобок и приведение подобных членов для обоих случаев алгебраического знака $\text{sgn}(g+1/2) = \pm 1$ приводит (29) к верному неравенству $0 < 1$, что и завершает верификацию случая $N = 2$.

Число отсчетов $N = 3$. Формула (19) описывает монохроматический гармонический сигнал, который должен соответствовать ветви с номером I, для нахождения которого сравниваем подкосинусные выражения (19) и (24): $\psi + 2\pi j(n+\nu)/3 = \psi + 2\pi((3J+j+\mu)/3 + I)(n+\nu)$, откуда $I = -J$, $\mu = 0$ (при подходящих целых $L = 0$, $l = 1$).

Нетрудно установить, что целое число J, представляющее главную часть разложения безразмерной частоты $fT = m = 3J + j$ по модулю 3, определяется по формуле $J = [(m+1)/3]$, что при подстановке параметров $N = 3$, $G = 0$, $\mu = 0$, $f/F = (m+\mu)/3 = J + j/3$, $J = -I$ в условие существования ветви (4) сводит его к неравенству $\| j |/3 - 1/4| < 5/12$, очевидному как при $j = 0$ ($1/4 < 5/12$), так и при $j = \pm 1$ ($1/12 < 5/12$), что и завершает верификацию случая $N = 3$.

Число отсчетов $N = 4$. Ветвь существует для целого индекса по формуле (13) и для обоих типов четвертьцелых индексов по формуле (16).

В случае целого индекса сравнение подкосинусных выражений формул (13) и (24) дает:

$$I = (g+1/2)(-1)^{g+J}/2 - J/2 - j/4 - (-1)^j/8 - 1/8 .$$

Полученное выражение для I при любой четности $g \pm J$ и j не только целое, но и не зависит от j:

$$I = ((g+1/2)(-1)^{g+J} - (J+1/2))/2 . \qquad (30)$$

Тогда условие (4) существования ветви (24) при подстановке туда найденного значения I и приведения подобных членов принимает вид:

$$\left| \left| \frac{2j-1}{8} + \frac{g+1/2}{2}(-1)^{g+J} \right| - \frac{[|g+1/2|]+1/2}{2} \right| < \frac{3}{8} .$$

Рассмотрение случаев $g + 1/2 > 0$ и $g + 1/2 < 0$ несколько упрощает это неравенство, помогая избавиться от квадратных скобок:

$$\| (2j-1)/8 + (g+1/2)(-1)^{g+J}/2 | - |g+1/2|/2 | < 3/8 . \qquad (31)$$

Далее замечаем, что $2j - 1$ при $j = 0$ и $j = 1$ можно представить как $-(-1)^j$, что позволяет, после умножения на 8, представить (31) в виде:

$$\| 4g + 2 - (-1)^{g+J+j} | - |4g+2\| < 3 . \qquad (32)$$

Теперь замечаем, что при любом целом значении g в (32) оба выражения в модульных скобках одного знака: $\text{sgn}(4g+2\pm 1) = \text{sgn}(4g+2)$. Их раскрытие приводит это неравенство к истинному утверждению $1 < 3$.

В случае четвертьцелого индекса сравнение подкосинусных выражений формул (16) и (24) дает:

$$I = -(k(-1)^{g+J}(g+1+k/2) + J + j/2)/2 . \qquad (33)$$

Тогда условие (4) существования ветви (24) при подстановке туда найденного значения I и приведения подобных членов принимает вид:

$$\| (g+1+k/2)/2 | - ([|g+1+k/4|] + 1/2)/2 | < 1/4 . \qquad (34)$$

Замечаем, что при $k = \pm 1$ и любом целом g выражения $g + 1 + k/2$ и $g + 1 + k/4$ в (34) одного знака, что сокращает число вариантов раскрытия модульных скобок в неравенстве (34) с четырех до двух:

$$\left[\begin{array}{l} |k - 1 - 2[k/4]| < 1 \\ |k + 1 + 2[-k/4]| < 1 \end{array} \right. . \qquad (35)$$

Нетрудно установить, что при $k = \pm 1$ квадратные скобки в (35) раскрываются следующим образом:

$[k/4] = (k-1)/2$, $[-k/4] = -(k+1)/2$, что приводит оба неравенства к истинному утверждению $0 < 1$.

B. Наложение двух ветвей сигнала

Условие наложения (6) ветвей $I = I'$, I'' типа (24) в сумму (5) в обозначениях (8) - (9) выглядит так:

$$\begin{cases} |I' - I''| = |g+1| \\ |(m+\mu)/N + (I'+I'')/2| \le (1/2 - |\gamma - 1/2| - 1/N)/2 \end{cases}. \quad (36)$$

Наложение ветвей для $N=1$ безусловно и для $N=3$ при $G=0$ и $G=-1$ не имеет места, в подтверждение чему подстановка $N=1$ или $\gamma=0$ в неравенство (36) делает его несовместным (правая часть отрицательна при неотрицательной левой части).

Число отсчетов $N=2$. Наложение имеет место по формуле (22) при нечетном $m+g$ (значит, и $m-g$) с $\mu=0$. Преобразуем произведение косинусов в сумму

$$s'(t) = a\cos(\psi + \pi(g+1)(n+\nu)) + a\cos(\psi - \pi(g+1)(n+\nu))$$

и примем, что первая гармоническая компонента соответствует ветви $I=I'$ типа (24), вторая – ветви $I=I''$. Сопоставлением подкосинусных выражений находим номера ветвей $I' = (g-m+1)/2$ и $I'' = -(g+m+1)/2$, которые будут целыми как раз при нечетных $m \pm g$. Подстановка их в (36) приводит к системе очевидных соотношений $|g+1| = |g+1|$, $0 \le 0$.

При $g=-1$ ветви совпадают ($I'=I''$), и сигнал вырождается в удвоенный начальный отсчет: $s'(t) = 2a\cos\psi$.

Число отсчетов $N=4$. Из формул (14) и (15) видно, что наложение ветвей имеет место при нечетном $g+J+j$ для полуцелого индекса $G=g+1/2$ с $\mu=1/2$ и четвертьцелого индекса $G=g+1/2+k/4$, где $k=\pm1$ с $\mu=0$. Если использовать значение $k=0$ для полуцелых G, то все эти случаи можно объединить:

$$\begin{cases} N=4, \quad \gamma = 1/2 + k/4, \quad \mu = K/2, \\ 0 \le j \le K, \quad K = 1 - |k|, \quad k = 0, \pm 1 \\ s'(t) = a\cos(\psi + \pi(n+\nu)((-1)^j K/4 + g + 1)) + \\ + a\cos(\psi + \pi(n+\nu)((-1)^j K/4 - g - 1)). \end{cases} \quad (37)$$

Номера накладываемых ветвей находим сопоставлением подкосинусных выражений в (24) и (37):

$$\begin{cases} I' = ((-1)^j - 1)K/8 + j/4 + (g - J - j + 1)/2 \\ I'' = ((-1)^j - 1)K/8 + j/4 - (g + J + j + 1)/2 \end{cases}. \quad (38)$$

Подстановка их в (36) приводит к системе соотношений, справедливость которой очевидна:

$$\begin{cases} |g+1| = |g+1| \\ |K(-1)^j/8| \le (1/4 - |k/4|)/2 = (K/4)/2 = K/8 \end{cases}.$$

Остается только убедиться в том, что полученные номера ветвей в правой части (38) – целые числа. В силу отмеченной выше нечетности $g+J+j$ выражения $(g \pm J \pm j + 1)/2$ в (38) являются целыми числами. Целым числом в (38) является и выражение $((-1)^j - 1)K/8 + j/4$: оно равно нулю при $j=0$, а также при $j=K=1$, что находится в полном соответствии с заданием этих параметров в системе соотношений (37).

C. Полное исчезновение сигнала

Условие (7) исчезновения сигнала $s'(t)=0$ в обозначениях (8) - (9) выглядит так:

$$\begin{aligned} &|||(m+\mu)/N + I| - 1/2| - |g+1|/2| \le \\ &\le (1/2 - |\gamma - 1/2| - 1/N)/2. \end{aligned} \quad (39)$$

Для $N=1$ безусловно и для $N=3$ при $G=0$ и $G=-1$ это явление не имеет места, подтверждением чему является ложность неравенства (39) при $N=1$ или $\gamma=0$.

Число отсчетов $N=2$. Согласно формуле (22) исчезновение сигнала имеет место в случае четности $m+g$. Представим это число как $2L$, где L – целое.

Очевидно, что правая часть (39) при $N=2$, $\gamma=1/2$ равна нулю, и тогда (39), где $\mu=0$, $m=2L-g$, в силу неотрицательности левой части, должно быть равенством:

$$|||I + L - g/2| - 1/2| - |g+1|/2| = 0. \quad (40)$$

Оказывается, что для любых действительных чисел p и q имеет место универсальное равенство

$$||p| + q| = |p + q\delta| = |p\delta + q|; \quad |\delta| = 1, \quad (41)$$

где $\delta = \pm1$ – подходящий «знак». В самом деле, если $pq \ne 0$, то $\delta = \operatorname{sgn} p$; если же $pq=0$, то $\delta=1$.

Используем соотношение (41) с $|\delta_1|=|\delta_2|=|\delta_3|=1$ для раскрытия модульных скобок в (40):

$$|I + L - g/2 - \delta_1/2 - \delta_2\delta_3(g+1)/2| = 0,$$

откуда находим

$$L = (\delta_1 + \delta_2\delta_3 + g + \delta_2\delta_3 g)/2 - I. \quad (42)$$

В круглых скобках (42) при любом сочетании знаков $\delta_l = \pm1$; $l = 1, 2, 3$ находится четное число, следовательно, число L, как мы предполагали, является целым, что и завершает доказательство четности числа $m+g$.

Число отсчетов $N=4$. Согласно формулам (14) и (15) исчезновение сигнала имеет место в случае четности $g+J+j$. Так же, как и при $N=2$, представим это число в виде $2L$, где L – целое.

Неравенство (39), при подстановке в него параметров из (37), общих для обоих типов индекса G (полуцелого и четвертьцелого), приобретает, после умножения обеих его частей на 8, и с учетом предложенного представления $g+J+j$, следующий вид:

$$|||8(I+L) - 4g - 2j + K| - 4| - 4|g+1|| \le K. \quad (43)$$

Так же, как и для $N=2$, используем соотношение (41) для раскрытия модульных скобок в (43):

$$|4(2I + 2L) - 4(\delta_1 + \delta_2) - 4g(1 + \delta_2) - 2j + K| \le K.$$

Полученное неравенство, в силу четности всех выражений, заключенных в круглые скобки, можно при подходящем целом числе M записать как неравенство

$$|8(I+L+M)-2j+K| \le K,$$

или же как двойное неравенство

$$(j-K)/4 \le I+L+M \le j/4, \qquad (44)$$

левая часть которого не уступает –1/4, правая – не превосходит +1/4. Это означает, что L может быть целым числом при единственном условии $I+L+M=0$, и (44), после умножения всех его частей на 4, принимает вид $j-K \le 0 \le j$. Ясно теперь, что если $K=0$, то обязательно $j=0$, если же $K=1$, то j может быть и нулем, и единицей – в полном соответствии с неравенством $0 \le j \le K$, показывающим в (37) разрешенные значения индикатора четности $j = m \bmod 2$ целой части $m=[fT]$ безразмерной частоты преобразуемого сигнала, что и завершает верификацию явления полного исчезновения сигнала (1) в результате преобразования (2).

V. Нарушение условий вычислимости

Сумма (2) была вычислена при ограничениях (8) на параметры сигнала и преобразования. Немалый интерес представляет нарушение этих условий.

Уже для $N=1$ представление преобразования (2) в самом общем виде показывает, что в правой части (23) фигурирует весьма нетривиальная функция времени, придать которой форму I-й ветви в чистом виде (26) удалось лишь при выдвижении достаточных условий равенства косинусов слева и справа в (25).

Для $N=3$, к сожалению, нам не удалось провести вычисления при $G(G+1) \ne 0$ из-за непреодолимой сложности тригонометрических выражений. Зато для $N=2$ и $N=4$ мы получили выражения преобразованного сигнала (20) и (11) в наиболее общем виде. Приведем в деталях лишь один пример нарушения условий (8). Так, результатом вычисления (2) для $N=2$ при $\gamma=0$ и произвольном μ является гармонический сигнал с частотой как для $\mu=1/2$, но с амплитудой $a(1+\cos\pi\mu\cos(2\psi+\pi\mu))^{1/2}$ вместо a. Поиски для $N=2$ других примеров, где то или иное явление имеет место вопреки условиям (8), также не привели к успеху. Так же обстоит дело и с формулой (11) для $N=4$.

В работе [8] для серии значений $N \gg 4$ проводились численные эксперименты по построению графика ветви $I=0$ при $G=0$ для значений μ, задаваемых с шагом $2/N$ (гораздо более мелким, чем 1/2). Равенство $s'(t)=s(t)$ достигалось только для значений $\mu=0$ и $\mu=1/2$, удовлетворяющих условиям (8).

Несмотря на отсутствие прецедентов верности формул (3) - (7) при нарушении условий (8), приходится принять эти достаточные условия без строгого математического доказательства их необходимости.

VI. Заключение

Проведена верификация общего метода преобразования сигнала (1) по интерполяционной формуле (2) для числа отсчетов $N=1 \ldots 4$, в ходе которой продемонстрированы все особые явления (3) - (7), имеющие место уже для минимального числа отсчетов $N=2$.

Показана высокая эффективность математического аппарата исследования, сочетающего тригонометрию с операциями взятия целой и дробной части чисел.

Основные результаты работы отражены в формулах (13) - (16), (19), (21) - (23). Особый теоретический и практический интерес представляют формулы (14), (15) и (22), показывающие, что столь различные явления нарушения теоремы отсчетов, как наложение частот и исчезновение сигнала, имеют одни и те же аналитические выражения для частных случаев $N=4$ и $N=2$, что при возможности обобщения их на произвольное число отсчетов N позволит снять проблему «многозначности ветвей», изложенную в работе [9].

Литература

[1] Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. – М.: “Всесоюзн. энергетич. комитет”, 1933.

[2] Brown J.L., Jr., “First-order sampling of bandpass signals – a new approach,” in IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT 26, no. 5, September 1980, pp. 613-615.

[3] Waters W.M., Jarrett B.R., “Bandpass signal sampling and coherent detection,” in IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES 18, no. 4, November 1982, pp. 731-736.

[4] Петров В.В., Усков А.С. Информационная теория синтеза оптимальных систем контроля и управления (Непрерывные системы). – М.: “Энергия”, 1975. – 232 с.

[5] Vaughan R.G., Scott N.L., White D.R., “The theory of bandpass sampling,” in IEEE Trans. Signal Process., vol. SP 39, no. 9, September 1991, pp. 1973-1984.

[6] Kohlenberg A., “Exact interpolation of band-limited functions,” in J. Appl. Phys., vol. 24, no. 12, December 1953, pp. 1432-1436.

[7] Ханян Г.С. Теорема отсчетов для сигнала конечной длительности с необязательно нулевым индексом частотной полосы // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. № 2 (139). С. 20-25.

[8] Ханян Г.С. Теорема отсчетов в приложении к задаче интерполирования данных // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2014. Сборник трудов / под общ. ред. акад. РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2014. Часть IV. С. 101-104. URL: http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D055.pdf (дата обращения: 02.03.2018).

[9] Ханян Г.С. Особенности преобразования гармонического сигнала ограниченной длительности по теореме отсчетов // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2016. Сборник трудов / под общ. ред. академика РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2016. Часть I. С. 210-217. URL: http://www.mes-conference.ru/data/year2016/pdf/D041.pdf (дата обращения: 02.03.2018).

Verification of Sampling Theorem Validity and Features for Specific Cases of Transformed Samples Number

G.S. Khanyan

Central Institute of Aviation Motors, Moscow, khanyan@rtc.ciam.ru

***Abstract* — The work continues the author's research on generalization of the time-domain sampling theorem to a finite duration signal in a limited frequency band. The object of transformation is a harmonic signal $s(t) = a \cos(2\pi ft+\varphi)$ of limited duration T sampled with frequency F so that its digital realization $s(t_k)$ is a sequence of $N = FT$ readings obtained at equidistant time moments $t_k = t_0+k/F$; $k = 0,1,\ldots,N-1$, beginning with an arbitrary start time t_0. The kernel of interpolating linear conversion, which transforms the digital realization $s(t_k)$ to a continuous time function $s'(t)$, along with the number of samples N, contains a dimensionless parameter G – the index of frequency band, which, together with the signal frequency f determines all possible conditions for the theorem validity and its disturbing effects – the signal frequency and phase shift, the widely known in literature frequency overlay, and a paradoxical phenomenon described by the author for the first time – complete disappearance (zeroing) of the signal. However, the solutions received in the form of "branches" whose numbers I, I', I'' are not expressed explicitly but are suitable integers that satisfy certain inequalities with respect to the dimensionless frequency f/F (whose boundaries depend on integer $[G]$ and fractional $\{G\}$ parts of the index G) cannot be satisfactorily considered as a final stage in developing this direction of interpolation theory. Therefore, the present paper sets a goal which may seem naive in terms of mathematics but which is quite promising from the point of view of methodology, i.e., to verify the general method of computing the transform $s(t) \to s(t_k) \to s'(t)$ for particular cases of discrete samples number N (from 1 to 4) while still allows one to carry out cumbersome calculations. It is in the process of solving this problem that new ideas appear on further development of the Fourier analysis theory with the prospect of developing new applications for digital signal processing in microelectronics. The subjects of verification are inequalities derived in the author's recent paper, which describe the effects listed above: the displacement of signal frequency f by IF with simultaneous shift of its initial phase φ by $-2\pi IFt_0$ for a branch having the number I; the imposition of branches I' and I'' into the sum of two harmonic signals; the disappearance of the signal $s'(t) = 0$. In fact, only the zeroth branch satisfies the sampling theorem: for $I = 0$, the signal frequency displacement and phase shift are absent, so the transform formula takes the form $s'(t) = s(t)$. A technique demonstrated when calculating the direct transform for specified number of summands N differs radically from the general method described in terms of inequalities, common for any N. The principal difference for particular cases N is the explicit form of the results obtained by applying well-known trigonometric formulas: cosine of sum, sum of cosines, etc. Such concepts as branch number I, as well as an imposition (overlapping) of branches I' and I'' are absent and they have to be imitated. The verification of sampling theorem validity and features consists in comparing the sub-cosine expressions of the transformed signal accepted by general and direct methods, expressing the branch numbers in terms of the parameters G and f, substituting these expressions into the appropriate inequality describing each phenomenon and proving its validity in each particular case of N. As a result of such verification, all the three phenomena, already occurring for the minimum number of samples $N = 2$, were identified. An important theoretical and practical result obtained is that such different phenomena as frequency overlay and signal disappearance are determined only by the parity of a combined parameter $[G]+[fT]$ appearing in the same analytical formula, so that a possibility to generalize it to an arbitrary number of samples N will remove the problem of "branch ambiguity" thus presenting the theorem's proof in a more "natural" way.**

***Keywords* — sampling theorem, frequency band index, general and direct transform method, superposition of branches, signal disappearance.**

REFERENCES

[1] Kotelnikov V.A., "On the carrying capacity of "ether" and wire in telecommunications," Proceedings of 1st all-union congress on the technical reconstruction of communication and the development of low-current industry, Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933 (in Russian).

[2] Brown J.L., Jr., "First-order sampling of bandpass signals – a new approach," in IEEE Trans. Inf. Theory, vol. IT 26, no. 5, September 1980, pp. 613-615.

[3] Waters W.M., Jarrett B.R., "Bandpass signal sampling and coherent detection," in IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst., vol. AES 18, no. 4, November 1982, pp. 731-736.

[4] Petrov, V.V., Uskov, A.S., Information theory of synthesis of optimal control systems (Continuous system), "Energia", Moscow, 1975, 232 p. (in Russian).

[5] Vaughan R.G., Scott N.L., White D.R., "The theory of bandpass sampling," in IEEE Trans. Signal Process., vol. SP 39, no. 9, September 1991, pp. 1973-1984.

[6] Kohlenberg A., "Exact interpolation of band-limited functions," in J. Appl. Phys., vol. 24, no. 12, December 1953, pp. 1432-1436.

[7] Khanyan G.S. Sampling theorem for finite duration signal with a non-obligatory zero index of the frequency band. Izvestiia Yuzhn. Feder. Universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2013, no. 2 (139), pp. 20-25 (in Russian).

[8] Khanyan G.S. Sampling theorem applied to data interpolation problem. Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem – 2014. Sbornik trudov / pod obshch. red. akademika RAN A.L. Stempkovskogo. M.: IPPM RAN, 2014, vol. IV, pp. 101-104 (in Russian). URL: http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D055.pdf (access date: 02.03.2018).

[9] Khanyan G.S. Features of Limited Duration Harmonic Signal Transform by Sampling Theorem // Problems of Advanced Micro- and Nanoelectronic Systems Development, 2017, Part I, Moscow, IPPM RAS, pp. 54-60 (translated from Russian).