

Синтез рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова: проблемы и их решения

В.А. Лесников¹, Т.В. Наумович², А.В. Частиков³

Вятский государственный университет, г. Киров

¹Vladislav.Lesnikov.ru@ieee.org, ²ntv_new@mail.ru, ³alchast@mail.ru

Аннотация — Данная публикация имеет аналитический характер. Описывается подход к синтезу рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова, при котором четко разграничены этапы расчета передаточной функции и структурного синтеза. Основываясь на том, что нули и полюсы цифровых фильтров с ограниченной разрядностью являются элементами множества алгебраических чисел, на изученной топографии нулей и полюсов в дискретизированной z -плоскости предлагается окончательное вычисление нулей и полюсов ЦФ с учетом конечной длины слова еще до этапа структурного синтеза. Этап структурного синтеза основан на генерации структур с учетом теоретико-числовой природы нулей и полюсов.

Ключевые слова — рекурсивный цифровой фильтр, конечная длина слова, алгебраические числа, квантование коэффициентов, дискретизация z -плоскости, топография z -плоскости, топологическая матрица.

I. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на длительную историю [1]-[3] проблема синтеза рекурсивных цифровых фильтров (ЦФ) с учетом конечной разрядности чисел, участвующих в вычислениях, весьма далека от окончательного решения. Если не принимать во внимание конечную точность вычислений, то синтез рекурсивных фильтров хорошо изучен, описан и реализован в системах разработки [4]-[6]. При отсутствии жестких требований к характеристикам ЦФ достаточно просто решается задача синтеза и реализации и при условии ограниченной разрядности. При усложнении же требований к характеристикам ЦФ проявляется большое число проблем, которые оказываются непреодолимыми при практической реализации. Это обстоятельство приводит к тому, что разработчики отказываются от попыток реализовать преимущества рекурсивных ЦФ перед нерекурсивными с точки зрения объема вычислительных ресурсов. Для подтверждения этого факта приведем такой пример. Для реализации на программируемых логических схемах (ПЛИС, FPGA) корпорация Altera предлагала разработчикам такое средство проектирования, как компилятор ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой IIR Compiler. Однако в 2003 году Altera прекратила поддержку этого продукта [7].

Причиной трудностей при синтезе рекурсивных ЦФ с конечной длиной слова является недостаточная глубина изучения фундаментальных особенностей вычислительных процессов в рекурсивных ЦФ, отсутствие средств разработки, учитывающих эти особенности.

В цикле публикаций, к числу которых относятся [8]-[11], предлагается новый подход к синтезу рекурсивных ЦФ с конечной длиной слова, в котором предприняты попытки преодолеть упомянутые трудности синтеза.

Данная работа представляет собой аналитический обзор работ, описывающих этот новый подход.

Кстати, имеет смысл отметить и тонкость в использовании терминологии, относящейся к рекурсивным фильтрам. Считается, что термины рекурсивный ЦФ и ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой являются эквивалентными. Однако с учетом конечной длины разрядной сетки при реализации ЦФ в арифметике с фиксированной точкой понятно, что невозможно представить числа, абсолютная величина которых слишком мала, поэтому длина импульсной характеристики будет либо конечной (хотя и большей, чем порядок ЦФ), либо бесконечной, но эта бесконечность будет существовать за счет наличия паразитных колебаний предельного цикла малого уровня. Поэтому представляется, что термин *рекурсивный фильтр* является более точным и будет использоваться в настоящей работе.

II. ПОДХОДЫ К СИНТЕЗУ РЕКУРСИВНЫХ ЦФ С КОНЕЧНОЙ ДЛИНОЙ СЛОВА

При традиционном подходе к синтезу рекурсивных ЦФ можно выделить [4]-[6] такие этапы как функциональный синтез, при котором рассчитывается передаточная функция (ее нули и полюсы), выбор структурной схемы (структурный синтез), параметрический синтез (расчет коэффициентов выбранной структуры без учета ограниченной длины разрядной сетки), квантование коэффициентов.

Последняя операция приводит к искажению точного значения коэффициентов ЦФ, к искажению нулей и полюсов ЦФ, к искажению передаточной функции, частотных характеристик. Далее прибегают либо к увеличению разрядности, либо к смене структурной схемы. Несмотря на большое число публикаций, описывающих различные структуры, их применение ограничено уникальностью метода расчета каждой структуры и крайне

ограниченной номенклатурой структур, предлагаемых в доступных системах разработки.

Данная работа представляет собой аналитический доклад, в котором описывается новый подход к синтезу рекурсивных ЦФ с конечной длиной слова.

Основываясь на изученной теоретико-числовой природе нулей и полюсов ЦФ с конечной разрядностью, предлагается еще на этапе функционального синтеза окончательно вычислить нули и полюсы ЦФ с учетом ограничений на длину разрядной сетки. Последующий этап структурного синтеза не будет искажать результаты функционального синтеза.

Проведенные исследования показали связь структуры ЦФ с теоретико-числовой природой нулей и полюсов. Предлагается генерировать структурные схемы в соответствии с этой природой, основываясь на выявленных алгебраических особенностях матричного 90-градусного поворота структур.

III. ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВОЙ АНАЛИЗ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ

В этом разделе раскрыты характеристики стилей, используемых в данном документе.

A. Алгебраические числа

Известно, что если коэффициенты полинома

$$P(z) = \sum_{i=0}^n c_i z^{n-i} \quad (1)$$

являются элементами множества рациональных чисел

$$c_i \in \mathbb{Q}, \quad (2)$$

то корни этого полинома принадлежат множеству алгебраических чисел

$$z_i \in \mathbb{A}_z. \quad (3)$$

Для подмножеств алгебраических чисел справедливо выражение

$$\mathbb{Q} = A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k \subset \dots \subset A_n \subset A., \quad (4)$$

где индексы k идентификаторов подмножеств A_k – степени алгебраических чисел (степени минимального или канонического полинома элементов подмножества A_k).

Максимально возможная степень алгебраических чисел, являющихся корнями полинома $P(z)$, равна степени полинома, но максимальная степень z_i может быть меньше, чем степень полинома.

Например, корни полинома $P_1(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ являются алгебраическими числами четвертой степени $z_{1,2,3,4} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{5} - 1 \pm j\sqrt{2} \sqrt{(\sqrt{5} \pm 5)} \right)$. Этот полином не

может быть представлен в виде произведения двух полиномов второй степени с рациональными коэффициентами:

$$P_1(z) = (z^2 + 0.5(1 - \sqrt{5})z + 1)(z^2 + 0.5(1 + \sqrt{5})z + 1).$$

В то же время степень корней полинома $P_2(z) = z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z + 1$ равна двум:

$$P_2(z) = \left(\left(z + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) \left(z + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \right) \right)^* \\ * \left(\left(z - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(z - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = (z^2 + 3z + 1)(z^2 - z + 1).$$

Алгебраико-числовая природа нулей и полюсов реальных цифровых фильтров

Если не учитывать эффекты конечной длины слова, то коэффициенты a_i и b_i передаточной функции

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i z^{n-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{n-i}}, \quad (5)$$

$a_i \in \mathbb{R}$ и $b_i \in \mathbb{R}$, действительные и мнимые части нулей $\text{Re } z_{z_i} \in \mathbb{R}$, $\text{Im } z_{z_i} \in \mathbb{R}$ и полюсов $\text{Re } z_{p_i} \in \mathbb{R}$, $\text{Im } z_{p_i} \in \mathbb{R}$ являются элементами множества вещественных чисел (\mathbb{R}).

Все реальные цифровые фильтры характеризуются конечными длинами слов, поэтому коэффициенты передаточной функции являются элементами подмножества \mathbb{Q}_m множества рациональных чисел \mathbb{Q} . Если коэффициенты ЦФ представлены двоичным дополнительным кодом в форме с фиксированной точкой, то m – длина дробной части коэффициентов. В [13]-[15] показано, что нули и полюсы являются элементами подмножества множества алгебраических чисел \mathbb{A} .

B. Топография нулей и полюсов в z -плоскости для ЦФ с квантованными коэффициентами

Если выполняются условия $a_i \in \mathbb{R}$ и $b_i \in \mathbb{R}$, то любая точка z -плоскости может являться нулем или полюсом передаточной функции (5). В случае же квантования коэффициентов ЦФ нулями и полюсами могут быть только точки z -плоскости, координаты которых являются алгебраическими числами. Степень алгебраических чисел при этом определяется структурой ЦФ и может быть меньше, чем порядок фильтра, как это показано выше. В [16] показано, что для ЦФ, реализованных по прямой и канонической структуре, степень нулей и полюсов равна порядку фильтра – для ЦФ четного порядка, реализованных по каскадной структуре, степень нулей и полюсов равна двум, для ЦФ четного порядка, реализованных по параллельной структуре, степень нулей равна порядку фильтра, а степень полюсов равна двум.

Топография нулей и полюсов ЦФ в z -плоскости определяется не только их степенью, но и разрядностью

дробной части коэффициентов ЦФ (коэффициентов минимального полинома).

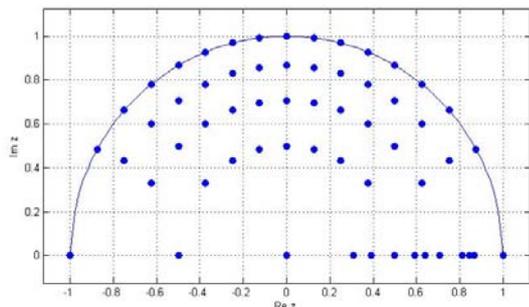


Рис. 1. Топография алгебраических чисел второй степени (длина дробной части коэффициентов $m=2$)

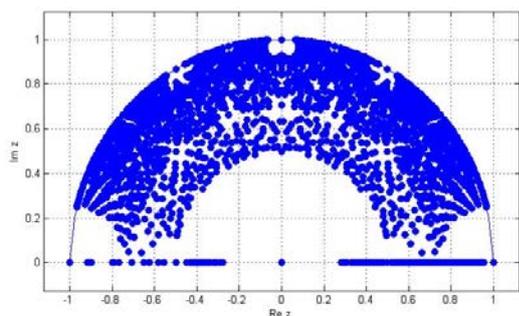


Рис. 2. Топография алгебраических чисел четвертой степени (длина дробной части коэффициентов $m=2$)

На рис. 1 и 2 показаны все возможные положения алгебраических чисел второй и четвертой степени с разрядностью дробной части коэффициентов $m=2$ внутри верхней половины единичного круга z -плоскости.

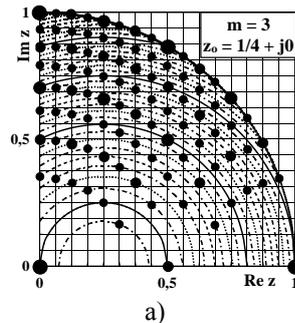
Для алгебраических чисел второй степени их геометрическое место в z -плоскости детально описано в [17]. К сожалению, подобное описание для алгебраических чисел более высокой степени получить не удалось. Если в первом случае геометрическое место – системы концентрических окружностей с определенным центром на оси абсцисс и определенным радиусом, то во втором случае форма кривых существенно сложнее.

Если коэффициенты полиномов связаны дополнительными уравнениями, то из множеств возможных значений исключается ряд элементов. В результате топография изменяется. Это описано в [18].

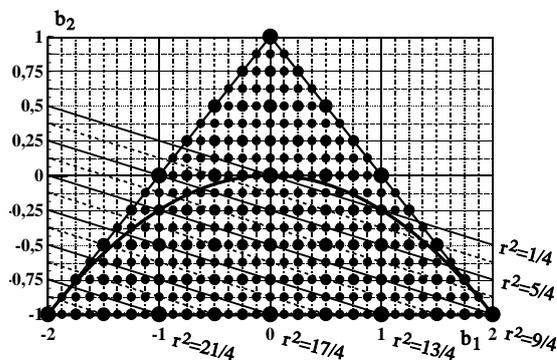
С. Взаимосвязь между z -плоскостью и пространством коэффициентов минимального полинома

Как отмечалось выше, топография корней минимального полинома второй степени хорошо изучена [17]. В результате возможен поиск нулей и полюсов непосредственно в z -плоскости. Для алгебраических чисел более высокой степени аналитические выражения в настоящее время отсутствуют. Однако в этом случае для поиска параметров ЦФ можно применить косвенный подход. Геометрическому месту алгебраических чисел соответствующей степени ставим в соответствие

геометрическое место коэффициентов минимального полинома.



а)



б)

Рис. 3. Отображение системы окружностей на плоскость коэффициентов для алгебраических чисел второй степени

На рис. 3 показано для алгебраических чисел второй степени с $m=3$ отображение системы концентрических окружностей с центром $z_0 = 0.25 + j0$ на систему эквидистантных прямых в плоскости коэффициентов минимального полинома $z^2 - b_1 z - b_2$. Наклон прямых линий определяется центром концентрических окружностей:

$$b_2 = -z_0 b_1 + (z_0^2 - r^2), \quad (6)$$

где r^2 – квадрат радиуса [13], [14], [17].

Для алгебраических чисел более высокой степени оперируем значениями коэффициентов минимального полинома. При этом приходится решать проблему устойчивости ЦФ [14], [15], [19]. Полюсы таких ЦФ должны находиться внутри единичного круга в z -плоскости, исключая единичную окружность, поэтому приходится прибегать к численным методам определения корней полинома.

IV. СИНТЕЗ ЦФ НА ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРОВНЕ

С учетом вышесказанного представляется целесообразным использование следующей процедуры синтеза ЦФ на функциональном уровне.

1. Выполнение стандартной процедуры аппроксимации частотной характеристики, в результате которой вычисляется множество нулей и полюсов

$$z_{zi} \in \mathbf{C} = \mathbf{R}^2, z_{pi} \in \mathbf{C} = \mathbf{R}^2, i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

2. Выбор начального значения степени нулей и полюсов

$$AlgPw_z = Pw_{z_0}, AlgPw_p = Pw_{p_0}. \quad (8)$$

Для четных n естественно выбрать $Pw_{z_0} = Pw_{p_0} = 2$.

3. Выбор начальных значений разрядности дробной части коэффициентов минимальных полиномов степени $AlgPw_z$ для нулей (m_z) и $AlgPw_p$ для полюсов (m_p).

4. Определение начального значения нулей с параметрами $\{AlgPw_z, m_z\}$ и полюсов $\{AlgPw_p, m_p\}$ (для комплексных корней необходимо обеспечить комплексную сопряженность), либо начального значения коэффициентов соответствующих минимальных полиномов.

5. Выполнение процедуры поиска на множествах нулей и полюсов или на множествах коэффициентов соответствующих минимальных полиномов.

5.1. При выполнении требований, предъявляемых к ЦФ, завершение процедуры.

5.2. Принятие решения о продолжении поиска или о его прекращении.

6. Принятие решения об увеличении длины дробной части коэффициентов с переходом к пункту 7 или об отказе от дальнейшего увеличения этих параметров с переходом к пункту 9.

7. Увеличение m_z и/или m_p .

8. Возвращение к пункту 6.

9. Принятие решения об увеличении степени нулей и полюсов с переходом к пункту 10 или об отказе от дальнейшего увеличения этих параметров с переходом к пункту 12.

10. Увеличение степени нулей и/или полюсов.

11. Возвращение к пункту 6.

12. Принятие решения об изменении требований к ЦФ.

13. Возвращение к пункту 1.

V. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ ЦФ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

В качестве математической модели структурной схемы ЦФ целесообразно использовать матрицу коэффициентов передачи между узлами структурной схемы [21]. Будем называть такую матрицу топологической. Она наиболее адекватно описывает структурную схему и ее свойства, в том числе теоретико-числовые [14], [15].

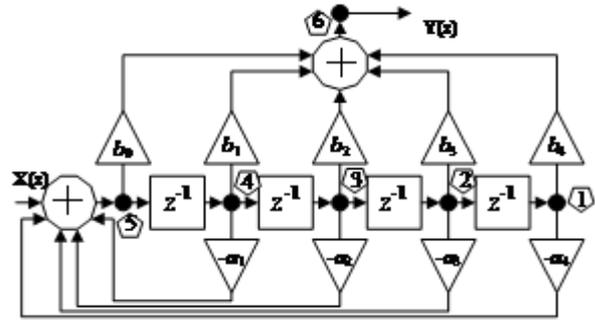


Рис. 4. Каноническая форма рекурсивного фильтра четвертого порядка

Например, структурная схема, представленная на рис. 4, описывается следующей топологической матрицей

$$\mathbf{T}_{Cm4}(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Для полноты описания необходимо также указать номера входного и выходного узлов. Канонической формой топологической матрицы будем считать такую, у которой все элементы z^{-1} , соответствующие блокам задержки, находятся выше главной диагонали, а элементы, соответствующие блокам умножения, расположены ниже главной диагонали. Если схема физически реализуема (вычислима), т.е. не содержит замкнутых контуров без элементов задержки, то существует такая нумерация узлов, при которой топологическая матрица является канонической [21].

Если вектор $\mathbf{Y}(z)$ – вектор z -преобразований последовательностей отсчетов, вычисляемых в узлах структурной схемы, то можно записать уравнение

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{T}(z)\mathbf{Y}(z) + \mathbf{I}\mathbf{X}(z), \quad (10)$$

где \mathbf{I} – вектор, все элементы которого равны нулю, за исключением элемента с номером, равным номеру входного элемента. Этот элемент равен единице. Уравнение (10) можно преобразовать к виду

$$\mathbf{Y}(z) = (\mathbf{E} - \mathbf{T}(z))^{-1} \mathbf{I}\mathbf{X}(z), \quad (11)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица. Матрица

$$\mathbf{H}(z) = (\mathbf{E} - \mathbf{T}(z))^{-1} \quad (12)$$

– матрица передаточных функций $[H_{ij}(z)]$ (i, j – номера соответственно выходного и входного узлов).

VI. ВЗАИМОСВЯЗЬ МЕЖДУ ТОНКОЙ СТРУКТУРОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ И ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫМИ СВОЙСТВАМИ НУЛЕЙ И УЗЛОВ

В [14], [15], [22], [23] показано, что степень полюсов определяется структурой канонической формы топологической матрицы для ЦФ, порядок которых равен числу блоков задержки. В такой матрице можно выделить квадратные подматрицы, элементы главных диагоналей которых являются элементами главной диагонали топологической матрицы, элементы z^{-1} являются последними элементами первой строки подматрицы. Из подматриц можно сформировать кластеры. Любая подматрица, входящая в данный кластер, имеет общие элементы хотя бы с одной подматрицей, входящей в этот же кластер, и не имеет общих элементов с подматрицами, входящими в другие кластеры. Если кластер объединяет r подматриц, то этому кластеру соответствуют r полюсов r -й степени. Например, в топологической матрице (9) выделяется один кластер, объединяющий четыре подматрицы. Поэтому степень всех полюсов канонической формы рекурсивного ЦФ четвертого порядка равна четырем. А степень полюсов каскадной структуры ЦФ четвертой степени (рис. 5) равна двум. Топологическая матрица такой структуры имеет вид

$$\mathbf{T}_{\text{кас. 4,2}}(z) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{11} & b_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{22} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{22} & b_{12} & b_{02} & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

К сожалению, установить связь структуры топологической матрицы со степенью нулей не удастся. Пока предлагается следующий подход к определению степени нулей для конкретной структуры. Если полином с рациональными коэффициентами в числителе передаточной функции может иметь корнем алгебраическое число r -й степени, то соответствующий нуль является нулем r -й степени. Однако решить такую задачу сложно. Проще использовать следующий подход.

Если алгебраическое число r -й степени, будучи корнем полинома числителя передаточной функции, приводит к тому, что коэффициенты этого полинома не являются рациональными числами, то нули такого ЦФ не могут иметь r -ю степень.

Задача состоит в определении для данной структуры максимальной степени нулей.

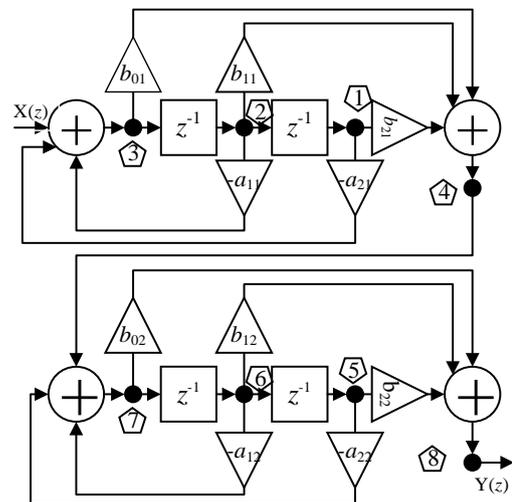


Рис. 5. Каскадная форма рекурсивного фильтра четвертого порядка

VII. ГЕНЕРАЦИЯ СТРУКТУР ЦФ

В [14], [15], [24]-[26] показано, что, генерируя канонические формы топологической матрицы порядка N со всеми возможными допустимыми коэффициентами и задавая номера входного (inp) и выходного (out) узлов, можно получить все структуры физически реализуемых ЦФ с N узлами.

В качестве примера рассмотрим вариант, для которого $N = 5$, $inp = 3$, $out = 4$:

$$\mathbf{T}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Этому варианту соответствует ЦФ, структурная схема которого представлена на рис. 6.

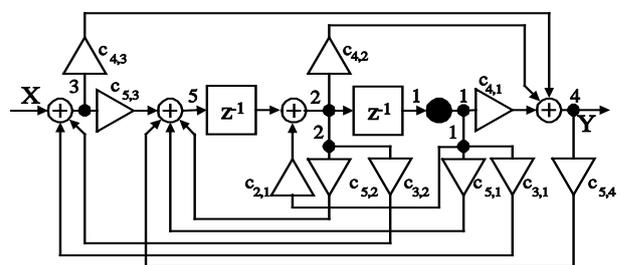


Рис. 6. Пример сгенерированной структуры цифрового фильтра

Количество блоков умножения в сгенерированных структурах превосходит число степеней свободы (число коэффициентов передаточной функции). В [27]-[29] представлены методики синтеза новых канонических структур второго порядка, основанные на генерации всех возможных структур с заданным числом узлов, выборе множества, состоящего из пяти коэффициентов,

обнулении остальных коэффициентов, отбрасывании тривиальных структур.

В [31], [32] применен другой подход. Избыточность использована для уменьшения разрядности коэффициентов (увеличенное число блоков умножения размещается на уменьшение длины слова).

Данный подход продемонстрируем на примере избыточной структуры рис. 7. На рис. 8 представлена преобразованная структура без умножителей.

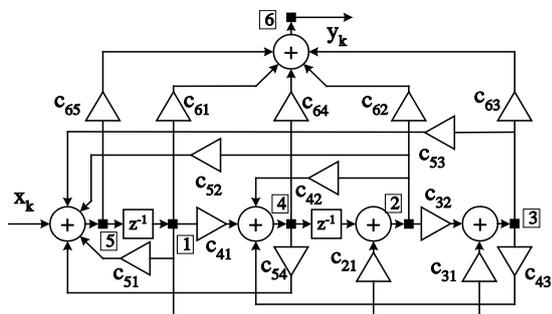
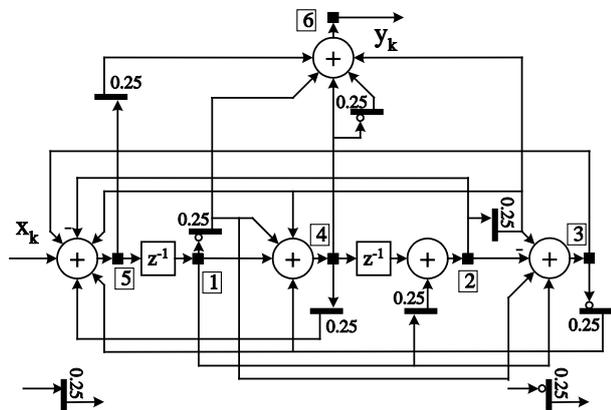


Рис. 7. Структура с избыточным числом умножителей



Передача разрядов отсчетов со сдвигом на два разряда в сторону младших разрядов

Передача инвертированных разрядов отсчета со сдвигом на два разряда в сторону младших разрядов

Рис. 8. Структура без умножителей, эквивалентная структуре на рис. 7

Для оценивания уровня шумов округления обычно используется представление структуры в пространстве состояний. В работах [33]-[35] шумы округления результатов арифметических операций в сгенерированной структуре оцениваются по топологической матрице.

В [36], [37] представлена методика оценивания структурной сложности генерируемых структур.

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен подход к синтезу рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова, учитывающий алгебраико-числовую природу нулей и полюсов, алгебраические свойства матричного описания структуры. Подход позволяет рассчитывать нули и полюсы с учетом ограничений на длину разрядной сетки еще до этапа

структурного синтеза и генерировать структуру ЦФ с учетом теоретико-числовых свойств передаточной функции. Дальнейшие исследования предполагают разработку эффективных средств функционального и структурного синтеза в рамках описанного подхода.

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена при поддержке РФФИ – грант 18-07-00986а.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Butterweck H.J., Ritzerfeld J.H.F., Werter M.J. Finite wordlength effects in digital filters: a review // EUT report, E, Fac. of Electrical Engineering, V. 88-E-205. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 1988.
- [2] Gevers M., Li G. Parametrizations in Control, Estimation and Filtering Problems: Accuracy Aspects, Communications and Control Engineering. London: Springer, 1993.
- [3] Bomar B.W. Finite Wordlength Effects / Digital Signal Processing Handbook / Ed. V. K. Madisetti and D. B. Williams. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
- [4] R. A. Losada R.A Digital Filters with MATLAB®. The MathWorks, Inc, 2008. URL: https://www.mathworks.com/tagteam/82961_digfilt.pdf (дата обращения 11.04.2018).
- [5] Signal Processing Toolbox™. User's Guide. The MathWorks, Inc. 2017.
- [6] DSP System Toolbox™. Getting Started Guide. The MathWorks, Inc. 2017.
- [7] Does Altera support IIR compiler? URL: https://www.altera.com/support/support-resources/knowledge-base/solutions/rd04072011_238.html (дата обращения 11.04.2018).
- [8] Lesnikov V., Chastikov A., Naumovich T., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2010). St. Petersburg. 17-20 Sept. 2010. P. 282-285. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742083.
- [9] Lesnikov V., Chastikov A., Naumovich T., and Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2010). St. Petersburg. 17-20 Sept. 2010. P. 156-159. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742051.
- [10] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем - 2010. Сб. трудов / под общ. ред. академика А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2010. С. 466-471. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf> (дата обращения 11.04.2018).
- [11] Hilbert D. The Theory of Algebraic Number Fields. Berlin – Heidelberg – New York: Springer – Verlag, 1998.
- [12] Ireland K., Rosen M. A classical introduction to modern number theory, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1990.
- [13] В.А. Лесников, Т.В. Наумович, С.М. Решетников, А.В. Частиков. Алгебраико-числовая природа нулей и полюсов рекурсивных цифровых фильтров // Глобальный научный потенциал. – 2011. - № 9. – С. 52 – 55.
- [14] Лесников В.А., Наумович Т.В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров: Вятский государственный университет. - 2006. – 196 с.
- [15] Лесников В.А., Наумович Т.В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров: О-краткое. - 2008. – 160 с.

- [16] В.А. Лесников, Т.В. Наумович, А.В. Частиков. Разбиение множества структурных схем цифровых фильтров на классы эквивалентности по теоретико-числовым свойствам // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. Т. 1. № 1. С. 98-100.
- [17] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Topography of z-plane which is discretized due to quantization of coefficients of digital biquad filters // 2016 International Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON-2016), Moscow, Russia, 12-14 May 2016. DOI: 10.1109/SIBCON.2016.7491812.
- [18] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Цифровые фильтры второго порядка с неканонической топографией полюсов в z-плоскости // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем - 2014. Сб. трудов / под общ. ред. академика А.Л. Стемпковского. М.: ИПИМ РАН, 2014. № 4. С. 129-132. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D143.pdf> (дата обращения 11.04.2018).
- [19] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The formulation of criteria of BIBO stability of 3rd-order IIR digital filters in space of coefficients of a denominator of transfer function // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2014), Kiev, Ukraine, 26-29 Sept. 2014. 3 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2014.7027080
- [20] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Формулировка критериев устойчивости цифровых фильтров третьего порядка с бесконечной импульсной характеристикой в пространстве коэффициентов знаменателя передаточной функции // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем - 2014. Сб. трудов / под общ. ред. академика А.Л. Стемпковского. М.: ИПИМ РАН, 2014. № 4. С. 141-146. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D132.pdf> (дата обращения 11.04.2018).
- [21] Crochier R. E., Oppenheim A. V. Analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. Vol. 63. № 4. P. 581 – 595. DOI: 10.1109/PROC.1975.9793.
- [22] В.А. Лесников, Т.В. Наумович, С.М. Решетников, А.В. Частиков. Взаимосвязь теоретико-числовой природы полюсов и структуры топологической матрицы рекурсивного цифрового фильтра // Перспективы науки. 2011. № 11 (26). С. 112-115.
- [23] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Classification of structures of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2015), Batumi, Georgia, 26-29 Sept. 2015. 5 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493154.
- [24] Лесников В.А., Наумович Т.В. Генерация и нумерация структур при структурном синтезе рекурсивных цифровых фильтров // Сб. трудов 6-й международной научно-технической конференции “Радиолокация, навигация, связь”. Воронеж, 2000. Т. 3. С. 1858 – 1868.
- [25] Лесников В. А., Наумович Т.В. Генерация структур цифровых фильтров // Доклады 3-й Международной конференции “Цифровая обработка сигналов и ее применение”. Доклады-1. М., 2001. С. 135-139.
- [26] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Generation and decomposition of digital filter topology // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2017), Novi Sad, Serbia, 29 Sept.-2 Oct. 2017. 4 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2017.8110161
- [27] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Synthesis of new canonic structures for a second-order IIR digital filters // IEEE EUROCON 2009, 18-23 May 2009. St.-Petersburg, Russia. P. 1328 – 1331. DOI: 10.1109/EUROCON.2009.5167811.
- [28] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., S. Armishev. A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2011), Sevastopol, Ukraine, 9-12 Sept. 2011. P. 221 – 224. DOI: 10.1109/EWDTS.2011.6116600.
- [29] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Синтез новых канонических структур рекурсивных цифровых фильтров второго порядка // Инфокоммуникационные технологии. 2009. Т. 7. № 1. С. 17-20.
- [30] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Усовершенствованная методика синтеза канонических структур рекурсивных цифровых фильтров // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2011. Т. 1. № 1. С. 130-133.
- [31] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The use of redundancy in the structural synthesis of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2016), Yerevan, Armenia, 14-17 Oct. 2016. 3 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807645
- [32] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Использование избыточности в структурном синтезе цифровых фильтров // Advanced Science. 2017. № 1. С. 29 - 38.
- [33] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Универсальная методика оценивания шумов округления в рекурсивных цифровых фильтрах, описываемых топологическими матрицами // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2012. № 1. С. 561-564.
- [34] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Оценивание уровня шумов округления в цифровых фильтрах с произвольной структурной схемой // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2012. Т. 1. № 1. С. 98-100.
- [35] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., S. Armishev. Universal technique of the analysis of round-off noise in digital filters with arbitrary structure described by topological matrixes // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2013), Rostov-on-Don, Russia, 27-30 Sept. 2013. 4 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2013.6673199.
- [36] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., S. Armishev. Estimation of structural complexity of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2013), Rostov-on-Don, Russia, 27-30 Sept. 2013. 5 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2013.6673143.
- [37] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Оценивание структурной сложности рекурсивных цифровых фильтров // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 2 (139). С. 89-93.

Synthesis of Recursive Digital Filters with Finite Word Length: Problems and their Solutions

V.A. Lesnikov¹, T.V. Naumovich², A.V. Chastikov³

Vyatka State University, Kirov

¹Vladislav.Lesnikov.ru@ieee.org, ²ntv_new@mail.ru, ³alchast@mail.ru

Abstract — Design of recursive digital filters involves sequential execution of the stages of functional and structural synthesis. At the stage of functional synthesis, the zeros and poles of the transfer function are calculated, which satisfy the specification of the requirements for the characteristics of the filter. At the stage of structural synthesis, a block diagram is formed. At this stage, the calculation of the structure coefficients (parametric synthesis) and the quantization of coefficients are performed. With the traditional approach at the stage of functional synthesis, the effects of the finite word length are not taken into account. At the same time, the stage of structural synthesis leads to distortion of the exact value of the coefficients of the digital filter, distortion of the zeros and poles of the digital filter, distortion of the transfer function, and frequency response. Further, they resort either to an increase in the digit capacity or to a change in the structural scheme. Despite a large number of publications describing the various structures, their applications limited by the unique calculation method for each structure and by the extremely short range of the structures offered in available developed systems. This paper is an analytical report, which describes a new approach to the synthesis of recursive digital filters with finite word length. Based on the studied number-theoretic nature of zeros and poles of the digital filters with limited word length, it is proposed to finally compute the zeros and poles of the digital filters at the stage of functional synthesis, considering the limitations on the length of the words. The next step of structural synthesis will not distort the results of functional synthesis. The completed studies have shown the connection between the structure of the digital filters and the number-theoretic nature of zeros and poles. It is proposed to generate structural schemes by this nature, based on the revealed algebraic features of the matrix description of structures.

Keywords — recursive digital filter, finite word length, algebraic numbers, quantization of coefficients, discretization of the z-plane, topography of the z-plane, topological matrix.

REFERENCES

- [1] Butterweck H.J., Ritzerfeld J.H.F., Werter M.J. Finite wordlength effects in digital filters: a review // EUT report, E, Fac. of Electrical Engineering. V. 88-E-205. Eindhoven: Eindhoven University of Technology. 1988.
- [2] Gevers M., Li G. Parametrizations in Control, Estimation and Filtering Problems: Accuracy Aspects, Communications and Control Engineering. London: Springer, 1993.
- [3] Bomar B.W. Finite Wordlength Effects / Digital Signal Processing Handbook / Ed. V. K. Madiseti and D. B. Williams. Boca Raton: CRC Press LLC. 1999.
- [4] R. A. Losada R.A Digital Filters with MATLAB®. The MathWorks, Inc, 2008. URL: https://www.mathworks.com/tagteam/82961_digfilt.pdf (access date: 11.04.2018).
- [5] Signal Processing Toolbox™. User's Guide. The MathWorks, Inc. 2017.
- [6] DSP System Toolbox™. Getting Started Guide. The MathWorks, Inc. 2017.
- [7] Does Altera support IIR compiler? URL: https://www.altera.com/support/support-resources/knowledge-base/solutions/rd04072011_238.html (access date: 11.04.2018).
- [8] Lesnikov V., Chastikov A., Naumovich T., Armishev S. A new paradigm in design of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2010). St. Petersburg. 17-20 Sept. 2010. P. 282-285. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742083.
- [9] Lesnikov V., Chastikov A., Naumovich T., Armishev S. Implementation of a new paradigm in design of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2010). St. Petersburg. 17-20 Sept. 2010. P. 156-159. DOI: 10.1109/EWDTS.2010.5742051.
- [10] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Novyj podhod k proektirovaniyu rekursivnyh cifrovyyh fil'trov // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoelektronnyh sistem - 2010. Sb. trudov / pod obshch. red. akademika A.L. Stempkovskogo. M.: IPPM RAN, 2010. S. 466-471. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf> (access data 11.04.2018). In Russian.
- [11] Hilbert D. The Theory of Algebraic Number Fields. Berlin – Heidelberg – New York: Springer – Verlag, 1998.
- [12] Ireland K., Rosen M. A classical introduction to modern number theory, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1990.
- [13] V.A. Lesnikov, T.V. Naumovich, S.M. Reshetnikov, A.V. Chastikov. Algebraiko-chislovaya priroda nulej i polyusov rekursivnyh cifrovyyh fil'trov (Number-algebraic nature of zeros and poles of recursive digital filters) // Global'nyj nauchnyj potencial. 2011. № 9. S. 52 – 55. In Russian.
- [14] Lesnikov V.A., Naumovich T.V. Strukturnyj sintez cifrovyyh fil'trov (Structural synthesis of digital filters). Kirov: Vyatskij gosudarstvennyj universitet, 2006. – 196 s. In Russian.
- [15] Lesnikov V.A., Naumovich T.V. Strukturnyj sintez cifrovyyh fil'trov (Structural synthesis of digital filters). Kirov: O-kratkoe, 2008. – 160 s. In Russian.
- [16] V.A. Lesnikov, T.V. Naumovich, A.V. Chastikov. Razbienie mnozhestva strukturnykh skhem cifrovyyh fil'trov na klassy ehkvivalentnosti po teoretiko-chislovyim svoystvam (Splitting the set of digital filter structure diagrams into equivalence classes by number-theoretic properties) // DSPA: Voprosy primeniya cifrovoj obrabotki signalov. 2018. T. 1. № 1. S. 98-100. In Russian.
- [17] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Topography of z-plane which is discretized due to quantization of coefficients of digital biquad filters // 2016 International Siberian

- Conference on Control and Communications (SIBCON-2016), Moscow, Russia, 12-14 May 2016. DOI: 10.1109/SIBCON.2016.7491812.
- [18] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Cifrovye fil'try vtorogo poryadka s nekanonicheskoj topografiej polyusov v z-ploskosti (Second-order digital filters with noncanonical poles topography in the z-plane) // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoehlektronnyh sistem - 2010. Sb. trudov / pod obshch. red. akademika A.L. Stempkovskogo. M.: IPPM RAN, 2014. № 4. S. 129-132. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D143.pdf> (access data 11.04.2018). In Russian.
- [19] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The formulation of criteria of BIBO stability of 3rd-order IIR digital filters in space of coefficients of a denominator of transfer function // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2014), Kiev, Ukraine, 26-29 Sept. 2014. 3 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2014.7027080.
- [20] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Formulirovka kriteriev ustojchivosti cifrovyyh fil'trov tret'ego poryadka s beskonечноj impul'snoj karakteristikoj v prostranstve koehfficientov znamenatelya peredatochnoj funkcii // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoehlektronnyh sistem - 2014. Sb. trudov / pod obshch. red. akademika A.L. Stempkovskogo. M.: IPPM RAN, 2014. № 4. S. 141-146. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2014/pdf/D132.pdf> (access data: 11.04.2018). In Russian.
- [21] Crochier R. E., Oppenheim A. V. Analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. Vol. 63. № 4. P. 581 – 595. DOI: 10.1109/PROC.1975.9793.
- [22] V.A. Lesnikov, T.V. Naumovich, S.M. Reshetnikov, A.V. Chastikov. Vzaimosvyaz' teoretiko-chislovoj prirody polyusov i struktury topologicheskoy matricy rekursivnogo cifrovogo fil'tra (Interrelation of the number-theoretic nature of poles and the structure of the topological matrix of a recursive digital filter) // Perspektivy nauki. 2011. № 11 (26). S. 112-115. In Russian.
- [23] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Classification of structures of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2015), Batumi, Georgia, 26-29 Sept. 2015. 5 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2015.7493154.
- [24] Lesnikov V.A., Naumovich T.V. Generaciya i numeraciya struktur pri strukturnom sinteze rekursivnyh cifrovyyh fil'trov (Generation and numbering of structures in the structural synthesis of recursive digital filters) // Sb. trudov 6-j mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii "Radiolokaciya, navigaciya, svyaz". Voronezh, 2000. T. 3. S. 1858 – 1868.
- [25] Lesnikov V. A., Naumovich T.V. Generaciya struktur cifrovyyh fil'trov (Generating Digital Filter Structures) // Doklady 3-j Mezhdunarodnoj konferencii "Cifrovaya obrabotka signalov i ee primenenie". Doklady-1. M., 2001. S. 135-139.
- [26] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Generation and decomposition of digital filter topology // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2017), Novi Sad, Serbia, 29 Sept.-2 Oct. 2017. 4 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2017.8110161
- [27] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Synthesis of new canonic structures for a second-order IIR digital filters // IEEE EUROCON 2009, 18-23 May 2009. St.-Petersburg, Russia. P. 1328 – 1331. DOI: 10.1109/EURCON.2009.5167811.
- [28] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., S. Armishev. A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2011), Sevastopol, Ukraine, 9-12 Sept. 2011. P. 221 – 224. DOI: 10.1109/EWDTS.2011.6116600.
- [29] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Cintez novyyh kanonicheskikh struktur rekursivnyh cifrovyyh fil'trov vtorogo poryadka (Synthesis of new canonical structures of recursive digital filters of the second order) // Infokommunikacionnye tekhnologii. 2009. T. 7. № 1. S. 17-20.
- [30] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Uovershenstvovannaya metodika sinteza kanonicheskikh struktur rekursivnyh cifrovyyh fil'trov (An improved technique for synthesizing the canonical structures of recursive digital filters) // DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoy obrabotki signalov. 2011. T. 1. № 1. S. 130-133.
- [31] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The use of redundancy in the structural synthesis of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2016), Yerevan, Armenia, 14-17 Oct. 2016. 3 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2016.7807645
- [32] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., CHastikov A.V. Ispol'zovanie izbytochnosti v strukturnom sinteze cifrovyyh fil'trov (The use of redundancy in the structural synthesis of digital filters) // Advanced Science. 2017. № 1. S. 29 - 38.
- [33] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Universal'naya metodika ocenivaniya shumov okrugleniya v rekursivnyh cifrovyyh fil'trah, opisyyvaemyh topologicheskimi matricami (A universal method for estimating rounding noise in recursive digital filters described by topological matrices) // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoehlektronnyh sistem (MEHS). 2012. № 1. S. 561-564.
- [34] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Ocenivanie urovnya shumov okrugleniya v cifrovyyh fil'trah s proizvol'noj strukturnoj skhemoj (Estimation of rounding noise level in digital filters with arbitrary block diagram) // DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoy obrabotki signalov. 2012. T. 1. № 1. S. 98-100.
- [35] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., S. Armishev. Universal technique of the analysis of round-off noise in digital filters with arbitrary structure described by topological matrixes // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2013), Rostov-on-Don, Russia, 27-30 Sept. 2013. 4 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2013.6673199.
- [36] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., S. Armishev. Estimation of structural complexity of IIR digital filters // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2013), Rostov-on-Don, Russia, 27-30 Sept. 2013. 5 p. DOI: 10.1109/EWDTS.2013.6673143.
- [37] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., CHastikov A.V. Ocenivanie strukturnoj slozhnosti rekursivnyh cifrovyyh fil'trov (Evaluation of the structural complexity of recursive digital filters) // Izvestiya YUFU. Tekhnicheskije nauki. 2013. № 2 (139). S. 89-93.