

Применение одношаговых методов интегрирования высокого порядка точности для анализа установившихся периодических режимов в интегральных схемах

М.М. Гурарий, М.М. Жаров, С.Г. Русаков, С.Л. Ульянов

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН (ИППМ РАН), iprm@iprm.ru

Аннотация — В работе предлагается вычислительный метод анализа установившегося периодического режима аналоговых интегральных схем. Решение периодической краевой задачи выполняется методом пристрелки-Ньютона, в котором для решения задачи с начальными значениями предлагается применить одношаговые методы численного интегрирования ОДУ, полученные на основе формулы Обрешкова. Приведены примеры анализа периодического установившегося режима.

Ключевые слова — схемотехническое моделирование, установившийся периодический режим, краевая задача, метод пристрелки, методы интегрирования.

I. ВВЕДЕНИЕ

При машинном проектировании современных аналоговых интегральных схем требуются программные средства для эффективного и точного моделирования и анализа. Одним из основных видов анализа является определение установившегося периодического режима схемы. Особенностью задачи определения установившегося режима в нелинейных цепях является то, что ее решение с помощью стандартного анализа переходных процессов требует значительных временных затрат [1]. Поэтому для ее эффективного решения требуются специализированные методы и виды анализа.

Установившийся периодический режим в цепи соответствует решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которое находится из решения периодической краевой задачи [1,2]. При разработке средств схемотехнического моделирования во временной области применяются неявные методы численного интегрирования ОДУ с автоматическим выбором шага и порядка. Для построения вычислительных методов решения периодической краевой задачи традиционно применяются методы конечных разностей или методы пристрелки [1, 2].

Методы конечных разностей используются для решения краевой задачи с помощью дискретизации исходной системы ОДУ на конечном множестве точек на интервале моделирования. При этом получается большая система уравнений, которая решается сразу для всех временных точек одновременно. Если для решения системы применяется метод Ньютона, то

вследствие большого числа переменных формирование матрицы Якоби системы и операции с ней требуют значительных затрат времени и памяти. Поэтому применение конечно-разностных методов ограничивается относительно небольшими по размеру схемами [1].

Методы пристрелки переводят решение граничной задачи в решение последовательности задач с начальными значениями. Задается исходное приближение для искомого начального значения, затем система интегрируется на интервале, полученные значения на концах интервала подставляются в граничное условие, производится коррекция решения итерационным методом. По сравнению с методами конечных разностей методы пристрелки требуют значительно меньших затрат памяти, так как нет необходимости хранить информацию о всех временных точках. Тем не менее, метод пристрелки с использованием метода Ньютона требует решения матричной системы уравнений при перевычислении матрицы чувствительностей на каждом временном шаге. Эффективный метод вычисления этой матрицы был предложен в работах [3, 4]. Кроме того, ньютоновская итерация включает решение линейной системы с плотной матрицей, что обуславливает рост вычислительных затрат при моделировании схем высокой размерности. С целью сокращения затрат в работе [5] предложено использовать итерационные методы решения линейной системы на шаге ньютоновской итерации, которые позволяют исключить явное формирование плотной матрицы Якоби. Вычислительный алгоритм, учитывающий периодическую структуру крыловского подпространства, предложен в работе [6].

Другим фактором, который определяет эффективность метода пристрелки, является метод численного интегрирования ОДУ, применяемый для решения задачи с начальными значениями. Традиционные алгоритмы численного интегрирования ОДУ в схемных симуляторах с автоматическим выбором шага и порядка основаны на использовании неявных методов интегрирования. Наиболее популярными методами являются неявный метод Эйлера, метод трапеций, методы ФДН или Гира порядка 1-6 [7-9]. Одношаговые метод Эйлера и метод трапеций являются А-устойчивыми и не имеют

ограничений при варьировании величины шага в процессе интегрирования жёстких систем ОДУ [7, 10]. Отметим, что на практике одношаговые методы имеют, как правило, лучшие свойства устойчивости в сравнении с многошаговыми методами. Многошаговые методы ФДН или Гира обладают свойствами жёсткой устойчивости и не имеют свойства А-устойчивости для методов порядка выше 2 [8, 10]. Однако применение А-устойчивых методов высоких порядков точности позволило бы сократить количество временных точек за счет больших временных шагов при заданной точности расчетов.

В данной статье предлагается метод пристрелки-Ньютона, в котором для решения задачи с начальными значениями предлагается применить одношаговые методы численного интегрирования ОДУ, полученные на основе формулы Обрешкова [11]. Основная трудность применения формулы Обрешкова для численного интегрирования системы ОДУ электронной схемы связана с необходимостью вычисления производных высоких порядков и частных производных для формирования матрицы Якоби. Для линейных схем данная задача решается относительно легко. В результате получается система алгебраических уравнений относительно переменных схемы и их производных [12]. Однако для получения аналогичной системы для случая нелинейной схемы требуется вычислить производные высших порядков нелинейных членов системы ОДУ, что исключает использование стандартной библиотеки моделей элементов схемного симулятора и требует создания специализированных моделей каждого нелинейного элемента схемы [12]. В данной работе используются методы интегрирования порядка 1-4, полученные с помощью формулы Обрешкова, которые не требуют вычисления производных высших порядков и, следовательно, решение задачи с начальными значениями выполняется с помощью стандартной библиотеки моделей элементов схемного симулятора.

II. МЕТОД ПРИСТРЕЛКИ-НЬЮТОНА

Модель схемы во временной области может быть задана в зарядовой форме системой дифференциальных уравнений [1, 2]

$$\dot{q}(v(t)) + i(v(t)) + u(t) = 0. \quad (1)$$

Здесь $v(t)$, $i(v(t))$, $q(v(t))$ – вектор-функции напряжений в узлах схемы, узловых токов и зарядов, u – вектор входных токов и $\dot{q}(v(t)) = \frac{dq(v(t))}{dt}$. Если схема

содержит источники напряжения или индуктивности, то модель схемы имеет тот же вид системы (1), однако вектор-функции $v(t)$, $i(v(t))$, $q(v(t))$ содержат дополнительные компоненты в соответствии с модифицированным узловым базисом [7].

При воздействии на схему периодического сигнала $u(t) = u(t+T)$, где T – период, в схеме возникает периодический процесс. Если схема имеет

установившейся периодический режим, то решение системы (1) должно удовлетворять условию

$$v(0) = v(T). \quad (2)$$

Система (1) с условием периодичности (2) образует краевую задачу. Метод пристрелки-Ньютона позволяет находить периодическое установившееся решение уравнения (1).

Метод пристрелки основан на замене решения краевой задачи (1), (2) на решение системы нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора состояния в начальный момент времени $v(0)$. Используя вектор-функцию $\varphi(v(t_0), t_0, t)$, задающую зависимость состояния $v(t)$ в момент времени t от состояния $v(t_0)$ в момент времени t_0 , и, полагая $t_0 = 0$, имеем $v(T) = \varphi(v(0), 0, T)$. Тогда условие (2) может быть записано в виде системы алгебраических уравнений относительно вектора $v(0)$

$$\varphi(v(0), 0, T) - v(0) = 0. \quad (3)$$

Метод пристрелки можно рассматривать как итерационный процесс решения нелинейной системы (3) относительно вектора $v(0)$, причем на каждом шаге итерационного процесса вектор $v(T) = \varphi(v(0), 0, T)$ находится решением задачи Коши с соответствующими начальными условиями [1, 2].

Применение итерационного метода Ньютона для решения алгебраической системы (3) приводит к линейной системе относительно вектора ньютоновской поправки на каждой итерации

$$[\Phi(T) - E]\Delta v^j(0) = -(\varphi(v^j(0), 0, T) - v^j(0)), \quad (4)$$

где j – номер ньютоновской итерации, $\Delta v^j(0) = v^{j+1}(0) - v^j(0)$ – вектор ньютоновской поправки, E – единичная матрица и $\Phi(T) = \frac{\partial \varphi(v(0), 0, T)}{\partial v(0)} = \frac{\partial v(T)}{\partial v(0)}$, $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица уравнений в вариациях

$$\frac{d}{dt}[C(v)\Phi(t)] + G(v)\Phi(t) = 0, \quad (5)$$

где $C(v) = \frac{\partial q(v(t))}{\partial v}$, $G(v) = \frac{\partial i(v(t))}{\partial v}$.

Вычисление матрицы $\Phi(t)$ может быть выполнено в процессе интегрирования основной системы ОДУ (1). Действительно, при интегрировании уравнения (1) (решении начальной задачи) выполняется дискретизация этого уравнения с помощью какого-либо метода. Например, использование неявного метода Эйлера дает [1, 2]

$$r(v_{n+1}) = \frac{1}{h}[q(v_{n+1}) - q(v_n)] - i(v_{n+1}) + u_{n+1} = 0. \quad (6)$$

Здесь v_n, v_{n+1} – значения вектора в точках $t=t_n$ и $t=t_{n+1}=t_n+h$, h – шаг.

Применение метода Ньютона для решения системы нелинейных уравнений (6) дает линейную систему относительно ньютоновской поправки

$$[G(v_{n+1}^j) + \frac{C(v_{n+1}^j)}{h}](v_{n+1}^{j+1} - v_{n+1}^j) = -r(v_{n+1}^j), \quad (7)$$

где $G(v_{n+1}^j) = \frac{\partial i(v_{n+1}^j)}{\partial v}$, $C(v_{n+1}^j) = \frac{\partial q(v_{n+1}^j)}{\partial v}$.

Дифференцирование (6) по $v_0 = v(0)$ дает

$$[G(v_{n+1}) + \frac{C(v_{n+1})}{h}] \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_0} = \frac{C(v_n)}{h} \frac{\partial v_n}{\partial v_0}, \quad (8)$$

Формула (8) позволяет выполнить эффективное вычисление матрицы $\Phi(t)$, так как необходимая для вычислений матрица Якоби определяется и декомпозируется в процессе интегрирования основной системы ОДУ (1).

III. ФОРМУЛА ОБРЕШКОВА

Начальная задача для системы ОДУ в явной форме может быть записана в следующем виде [10]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $x(t), \dot{x}(t)$ – вектор неизвестных и вектор их первых производных по времени, f – нелинейная вектор-функция, x_0 – начальное значение неизвестных в момент времени $t=t_0$. В предположении, что условия существования и единственности решения удовлетворяются, система (9) для любого x_0 , имеет единственное решение $x=x(t, x_0)$.

Численный метод позволяет находить приближенное решение системы (9) во временных точках t_0, t_1, t_2, \dots . Полагая известным приближенное решение x_n в момент $t=t_n$, одношаговые методы находят приближенное решение x_{n+1} в момент $t=t_{n+1}=t_n+h$, где h – шаг по времени.

Методы Обрешкова [11] основаны на применении интерполяционной формулы Эрмита, которая позволяет получить линейную связь между x_{n+1} и их производными по времени $x_{n+1}^{(i)} = d^{(i)}x(t_{n+1})/dt^{(i)}$.

Для одношаговых методов формула Обрешкова имеет вид [11]

$$x_{n+1} - x_n = -\sum_{i=1}^m \alpha_i h^i x_{n+1}^{(i)} + \sum_{i=1}^l \beta_i h^i x_n^{(i)} + O(h^{l+m+1}) \quad (10)$$

где $x_n = x(t_n)$, $x_{n+1} = x(t_{n+1})$,

$$\alpha_i = (-1)^i \frac{(l+m-i)!}{(l+m)!} \frac{m!}{i!(m-i)!},$$

$$\beta_i = \frac{(l+m-i)!}{(l+m)!} \frac{l!}{i!(l-i)!}$$

В формуле (10) используются значения переменных и их l производных при t_n , и m производных при t_{n+1} . Формула (10) позволяет получить несколько методов различного порядка $p=l+m$. В работах [12,13] показано, что методы А-устойчивы при $m-2 \leq l \leq m$ и L-устойчивы при $m-2 \leq l < m$.

Здесь мы ограничимся случаем $l \leq 2, m \leq 2$. При этом формула (10) позволяет получить методы порядка 1-4. В табл. 1 приведены порядки и коэффициенты возможных методов.

Таблица 1

Коэффициенты метода интегрирования

порядок	l	m	α_1	α_2	β_1	β_2
4	2	2	-1/2	1/12	1/2	1/12
3	1	2	-2/3	1/6	1/3	-
2	0	2	1	1/2	-	-
2	1	1	-1/2	-	1/2	-
1	0	1	-1	-	-	-

Заметим, что случай $l=0, m=1$ соответствует обратному методу Эйлера и $l=m=1$ дает формулу трапеций.

IV. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ОБРЕШКОВА ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Применяя правило дифференцирования сложной функции, уравнение (1) можно представить в виде

$$C(v)\dot{v}(t) + i(v) + u(t) = 0. \quad (11)$$

Дифференцирование уравнения (1) дает

$$\ddot{q}(v) + G(v)\dot{v}(t) + \dot{u}(t) = 0. \quad (12)$$

Дискретизация дифференциальных уравнений позволяет получить последовательность систем разностных уравнений для временных точек. Наиболее общий подход заключается в замене вектора производных заряда конечно-разностной аппроксимацией, соответствующей применяемому методу интегрирования [2].

Применяя формулу Обрешкова (10) с различными l, m можно получить системы разностных уравнений, соответствующие порядку метода. Поскольку в уравнениях (11), (12) участвуют первые и вторые производные вектора зарядов значения m и l не должны быть больше 2. В частности, для $l=m=2$ для вектора зарядов можно записать

$$q(v_{n+1}) - q_n = -\alpha_1 h \dot{q}(v_{n+1}) - \alpha_2 h^2 \ddot{q}(v_{n+1}) + \beta_1 h \dot{q}_n + \beta_2 h^2 \ddot{q}_n \quad (13)$$

Здесь $q_n = q(v_n)$, $\dot{q}_n = \dot{q}(v_n)$, $\ddot{q}_n = \ddot{q}(v_n)$ известны.

Учитывая (1), (11), уравнение (13) можно переписать в виде

$$r_1(v_{n+1}, \dot{v}_{n+1}) = q(v_{n+1}) - q_n + \alpha_1 h[-i(v_{n+1}) - u_{n+1}] + \alpha_2 h^2[-G(v_{n+1})\dot{v}_{n+1} - \dot{u}_{n+1}] - \beta_1 h \dot{q}_n - \beta_2 h^2 \ddot{q}_n = 0 \quad (14)$$

Уравнение (12) дает

$$r_2(v_{n+1}, \dot{v}_{n+1}) = i(v_{n+1}) + \frac{C(v_{n+1})}{h}(h\dot{v}_{n+1}) + u_{n+1} = 0 \quad (15)$$

Выражения (14), (15) – нелинейные алгебраические уравнения относительно векторов v_{n+1} , \dot{v}_{n+1} . Аналогичные уравнения можно получить для случая $l=1, m=2$ и $l=0, m=2$.

Применяя метод Ньютона для решения уравнений (14), (15), приходим к линейной системе относительно ньютоновской поправки

$$J(v_{n+1}^{(j)}, \dot{v}_{n+1}^{(j)}) \begin{bmatrix} v_{n+1}^{(j+1)} - v_{n+1}^{(j)} \\ h(\dot{v}_{n+1}^{(j+1)} - \dot{v}_{n+1}^{(j)}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_1(v_{n+1}^{(j)}, \dot{v}_{n+1}^{(j)}) \\ r_2(v_{n+1}^{(j)}, \dot{v}_{n+1}^{(j)}) \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где $J = J(v_{n+1}^{(j)}, \dot{v}_{n+1}^{(j)})$ - матрица Якоби

$$J = \begin{bmatrix} C(v_{n+1}^{(j)}) - \alpha_1 h G(v_{n+1}^{(j)}) - \alpha_2 h^2 G'(v_{n+1}^{(j)})\dot{v}_{n+1}^{(j)} & -\alpha_2 h G(v_{n+1}^{(j)}) \\ G(v_{n+1}^{(j)}) + C'(v_{n+1}^{(j)})\dot{v}_{n+1}^{(j)} & C(v_{n+1}^{(j)})/h \end{bmatrix} \quad (17)$$

j – номер итерации и $G'(v) = \frac{\partial G(v)}{\partial v}$, $C'(v) = \frac{\partial C(v)}{\partial v}$.

Введем векторы $y_1 = v_{n+1}^{(j+1)} - v_{n+1}^{(j)}$, $y_2 = h(\dot{v}_{n+1}^{(j+1)} - \dot{v}_{n+1}^{(j)})$.

Тогда, опуская индекс итерации и аргументы функций, линейная система (16) может быть представлена в упрощенной форме

$$\begin{bmatrix} C - \alpha_1 h G - \alpha_2 h^2 G'\dot{v}_{n+1} & -\alpha_2 h G \\ G + C'\dot{v}_{n+1} & C/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \\ -r_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Пренебрегая членами G' , C' в матрице Якоби (17), получим окончательный вид линейной системы на ньютоновской итерации

$$\begin{bmatrix} C - \alpha_1 h G & -\alpha_2 h G \\ G & C/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \\ -r_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Таким образом, для внедрения в схемный симулятор одношаговых методов интегрирования на основе формулы Обрешкова не требуется вычисление производных высших порядков и, следовательно, реализация анализа переходного процесса основана на использовании существующих в симуляторе моделей элементов схем.

V. МЕТОД ПРИСТРЕЛКИ-НЬЮТОНА С ФОРМУЛОЙ ОБРЕШКОВА

Будем рассматривать периодическую краевую задачу, где для уравнения (1) выставляется условие (2).

Рассмотрим вычисление $\Phi(T)$ с начальным условием $\Phi(0) = E$.

Дифференцирование (14) по $v_0 = v(0)$ дает

$$\frac{\partial r_1(v_{n+1}, \dot{v}_{n+1})}{\partial v_0} = \left[C(v_{n+1}) - \alpha_1 h G(v_{n+1}) - \alpha_2 h^2 G'(v_{n+1})\dot{v}_{n+1} \right] \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_0} + \left[-C(v_n) + \beta_1 h G(v_n) + \beta_2 h^2 G'(v_n)\dot{v}_n \right] \frac{\partial v_n}{\partial v_0} - \alpha_2 h^2 G(v_{n+1}) \frac{\partial \dot{v}_{n+1}}{\partial v_0} + \beta_2 h^2 G(v_n) \frac{\partial \dot{v}_n}{\partial v_0} \quad (20)$$

Дифференцирование (15) по $v_0 = v(0)$ дает

$$\frac{\partial r_2(v_{n+1}, \dot{v}_{n+1})}{\partial v_0} = \left[G(v_{n+1}) + C'(v_{n+1})\dot{v}_{n+1} \right] \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_0} + C(v_{n+1}) \frac{\partial \dot{v}_{n+1}}{\partial v_0} \quad (21)$$

Действуя по аналогии с получением линейной системы (19), можно записать

$$\begin{bmatrix} C - \alpha_1 h G & -\alpha_2 h G \\ G & C/h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v_{n+1}}{\partial v_0} \\ h \frac{\partial \dot{v}_{n+1}}{\partial v_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где

$$p_1 = \left[C(v_n) - \beta_1 h G(v_n) \right] \frac{\partial v_n}{\partial v_0} - \beta_2 h G(v_n) h \frac{\partial \dot{v}_n}{\partial v_0} \quad (23)$$

$$p_2 = 0 \quad (24)$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ может быть эффективно вычислена из решения линейной системы (22). Так как матрица этой системы вычисляется и декомпозируется в процессе решения основной системы уравнений (16), то для вычисления $\Phi(t)$ потребуется выполнить только операции прямого и обратного хода для многих векторов правой части.

VI. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Алгоритм анализа периодического установившегося режима, основанный на методе пристрелки-Ньютона и одношаговых методах интегрирования Обрешкова с автоматическим выбором порядка (1-4) и шага, реализован в экспериментальной программе схемотехнического моделирования. Кроме этого, в программе реализованы анализ переходных процессов (TRAN) и

анализ периодического установившегося режима, использующие методы Эйлера и трапеций (табл. 2).

Таблица 2

Виды анализа

Имя анализа	Вид анализа	Метод
TRAN	Расчет переходного процесса	Эйлера, трапеций
PSS	Расчет периодического режима	Пристрелки-Ньютона, Эйлера, трапеций
PSS2	Расчет периодического режима	Пристрелки-Ньютона, методы Обрешкова

Здесь приведены расчеты периодического режима для трех тестовых схем. Схемы 1, 2 представлены на рис. 1, 2. Выбор этих схем в качестве тестовых объясняется тем, что представленные схемы имеют постоянные времена, которые обуславливают длительный процесс установления. В качестве примера на рис. 3 приведен переходной процесс в схеме 1, из которого видно, что для надежного определения установившегося режима необходимо выполнить интегрирование на интервале 4000-6000 периодов входного сигнала. Здесь $T=100$ мкс. В схеме 2 частота входного сигнала составляла 60 Гц, переходной процесс показан на рис. 4. Схема 3 – это операционный усилитель UA741 [1]. На вход усилителя подан сигнал частоты 100 КГц, переходной процесс показан на рис. 5.

При моделировании переходных процессов максимальный шаг интегрирования ограничивался величиной $0,1 \cdot T$. Аналогичное ограничение использовалось при расчетах периодического установившегося режима. В таблицах 3, 4 приведены данные анализа периодического установившегося режима PSS2, PSS: число итераций метода пристрелки-Ньютона (#it-sn), число итераций Ньютона при решении задачи Коши (#it-tran), общее число временных точек и число принятых временных точек (#tpnts). Для сравнения в табл. 5 приводятся число итераций Ньютона (#it-tran), число временных точек (#tpnts) при моделировании переходного процесса до получения установившегося решения.

Как следует из приведенных таблиц, анализ периодического установившегося режима PSS2 в 2-10 раз более эффективен анализа с традиционными методами интегрирования PSS по критерию общего числа временных точек. По сравнению с анализом переходного процесса общее количество точек в PSS2 меньше в 25-800 раз. Такой разброс вычислительного выигрыша объясняется различием интервала интегрирования для достижения установившегося режима. Для схем 1-3 этот интервал составляет 6000, 100 и 1000 периодов. Графики выходного сигнала схем в установившемся режиме, полученные с помощью

анализа PSS2 и TRAN, показаны на рис. 6-8. Отметим хорошее совпадение результатов.

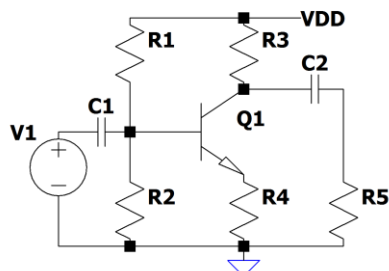


Рис. 1. Схема усилителя. $R1=7K, R2=3K, R3=2K, R4=1K, R5=1M, C1=0.1\mu\text{K}\Phi, C2=0.1\mu\text{K}\Phi, VDD=10B, V1=5\sin(2\pi 10^4 t)$

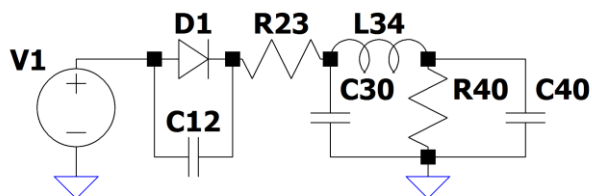


Рис. 2. Схема выпрямителя. $R23=5, R40=1K, C12=1\mu\text{K}\Phi, C30=1000\mu\text{K}\Phi, C40=1000\mu\text{K}\Phi, L34=0.1\text{Гн}, V1=10\sin(2\pi 60t)$

Таблица 3

Результаты расчета периодического режима PSS2

Схема	PSS2		
	#it-sn	#it-tran	#tpnts
1	2	1139	537(525)
2	5	1576	717(676)
3	3	644	325(325)

Таблица 4

Результаты расчета периодического режима PSS

Схема	PSS		
	#it-sn	#it-tran	#tpnts
1	5	14040	5138(5083)
2	6	3541	1341(1320)
3	4	1797	733(717)

Таблица 5

Результаты расчета переходного процесса TRAN

Схема	TRAN	
	#it-tran	#tpnts
1	1493534	464820(304863)
2	25604	9688(6576)
3	15240	5511(3575)

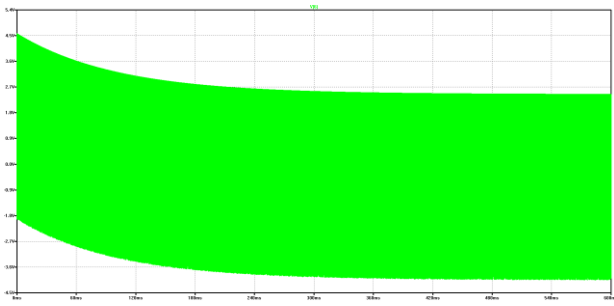


Рис. 3. Переходной процесс в схеме усилителя

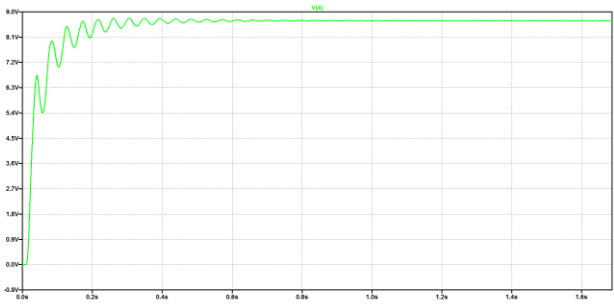


Рис. 4. Переходной процесс в схеме выпрямителя

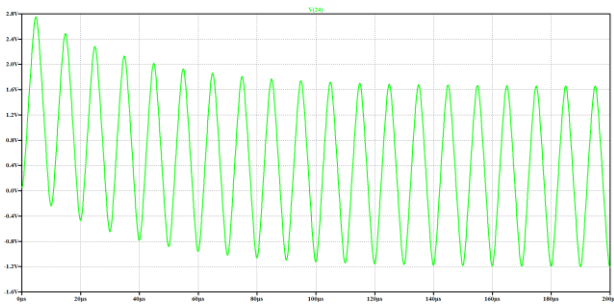


Рис. 5. Переходной процесс в схеме ОУ UA741

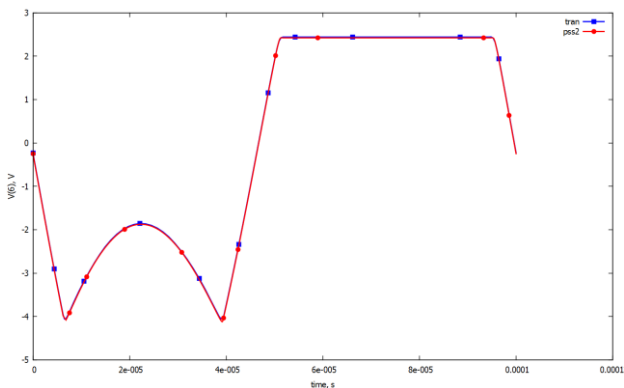


Рис. 6. Выходной сигнал в установившемся режиме в схеме усилителя

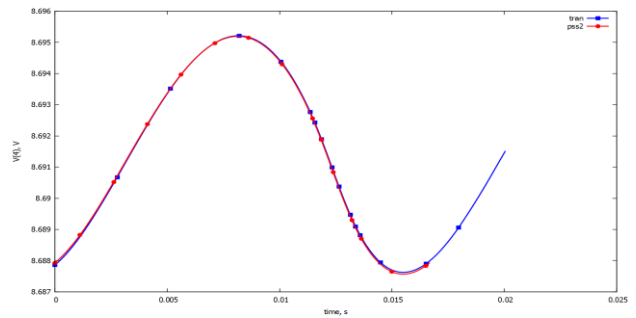


Рис. 7. Выходной сигнал в установившемся режиме в схеме выпрямителя

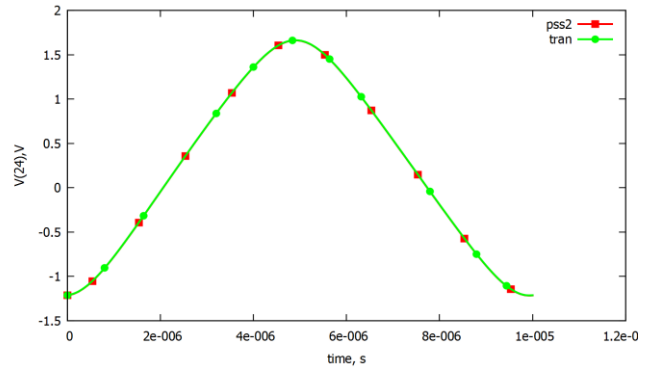


Рис. 8. Выходной сигнал в установившемся режиме в схеме ОУ UA741

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-07-00318.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Актуальные проблемы моделирования в системах автоматизации схемотехнического проектирования/ под ред. А.Л. Стемпковского – М.: Наука, 2003.-430 С.
- [2] Kundert K.S., White J., Sangiovanni-Vincentelli A. Steady-State Methods for Simulating Analog and Microwave Circuits – Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [3] Aprille T. J., Trick. T. N. A computer algorithm to determine the steady-state response of nonlinear oscillators // IEEE Trans. on Circuit Theory. 1972. Vol. CT-19. No. 4. P. 354-360.
- [4] Гурарий М.М., Русаков С.Г., Зарудный Д.И. Моделирование на ЭЦВМ периодических процессов в интегральных схемах // Автоматика и вычисл. техника. 1973. No. 1. С. 83-85.
- [5] Telichevesky R., Kundert K., White J. Efficient Steady-State Analysis based on Matrix-Free Krylov-Subspace Methods // in Proc. of IEEE Design Automation Conf. 1995. P. 480-484.
- [6] Liu X., Yu H, Tan S. A robust periodic Arnoldi shooting algorithm for efficient analysis of large-scale RF/MM ICs // in Proc. of IEEE Design Automation Conf. 2010. P. 573-578.
- [7] Vlach J. and Singhal K. Computer Methods for Circuit Analysis and Design. - New York: Van Nostrand Reinhold, 1983.
- [8] Gear C. W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.

- [9] Brayton R. K., Gustavson F. G., and Hachtel G. D., A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas // Proc. IEEE. 1972. vol. 60. No. 1. P. 98–108.
- [10] Butcher J. C. Numerical methods for ordinary differential equations, 2nd ed. - John Wiley & Sons, 2008.
- [11] Hairer E., Norsett S. P. and Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems - Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [12] Gad E., Nakhla M., Achar R., and Zhou Y. A-Stable and L-Stable high order integration methods for solving stiff differential equations // IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Sys. 2009. vol. 28. issue 9. P. 1359-1372.
- [13] Ehle B. L. A-Stable Methods and Padé Approximations to the Exponential // SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1973. vol. 4. No. 4. P. 671-680.

The application of single-step high order integration methods for periodic steady-state analysis of integrated circuits

M.M. Gourary, M.M. Zharov, S.G. Rusakov, S.L. Ulyanov

Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences, ippm@ippm.ru

Abstract — The application of conventional transient analysis to find the periodic steady-state solution often results in a long simulation time and hence special purpose means are needed. Unlike the transient analysis the periodic steady-state analysis solves a periodic boundary-value problem. The shooting-Newton method transforms the solution of the periodic boundary-value problem to the solution of sequence of initial value problems on one period of input signal. The initial value problem is solved using transient analysis. The efficiency of the method depends on both the computation of sensitivity matrix and the solution of linear system with dense Jacobian matrix. Another factor that determines the computational cost of the method is a numerical technique used to integrate differential equations on the period of input signal. To perform numerical integration of ordinary differential or differential-algebraic equations the comprehensive variable order and variable time step integration algorithms are used. The most commonly used methods are backward Euler, trapezoidal and backward-differentiation formulas (BDF). The common drawback of BDF methods is the lack of A-stability for order higher than 2. As a result high order methods are not implemented in modern simulators. However the usage of high order and A-stable methods allows to improve accuracy and speed up time-domain transient analysis. In this paper the method of periodic steady-state analysis in analog integrated circuits is proposed. The periodic boundary-value problem is solved using shooting-Newton method, in which to solve the initial value problem the single step integration methods based on the Obreshkov formula are suggested to apply. The formulation of methods of order 1 up to 4 are obtained for charge oriented circuit equations. The formulas for computing sensitivity matrix are presented. The numerical examples of steady-state analysis are given which demonstrate the numerical accuracy and efficiency of the proposed method.

Keywords — circuit simulation, periodic steady-state, boundary-value problem, shooting method, integration methods

REFERENCES

- [1] Aktualnye problemy modelirovaniya v systemah shemotekhnicheskogo proektirovaniya (Actual simulation problems in computer-aided circuit design systems) - Moscow: Nauka, 2003.
- [2] Kundert K.S., White J., Sangiovanni-Vincentelli A. Steady-State Methods for Simulating Analog and Microwave Circuits - Boston, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [3] Aprille T. J., Trick. T. N. A computer algorithm to determine the steady-state response of nonlinear oscillators. IEEE Trans. on Circuit Theory. 1972. Vol. CT-19. No. 4. P. 354-360.
- [4] Gourary M.M., Rusakov S.G., Zarudniy D.I. Modelirovanie na ECVm periodicheskikh processov v integralnykh shemah (Computer simulation of periodic processes in integrated circuits). Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika. 1973. No. 1. P. 83-85.
- [5] Telichevsky R., Kundert K., White J. Efficient Steady-State Analysis based on Matrix-Free Krylov-Subspace Methods. in Proc. of IEEE Design Automation Conf. 1995. P. 480-484.
- [6] Liu X., Yu H, Tan S. A robust periodic Arnoldi shooting algorithm for efficient analysis of large-scale RF/MM ICs. in Proc. of IEEE Design Automation Conf. 2010. P. 573-578.
- [7] Vlach J. and Singhal K. Computer Methods for Circuit Analysis and Design. - New York: Van Nostrand Reinhold, 1983.
- [8] Gear C. W. Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971.
- [9] Brayton R. K., Gustavson F. G., and Hachtel G. D., A new efficient algorithm for solving differential-algebraic systems using implicit backward differentiation formulas. Proc. IEEE. 1972. vol. 60. No. 1. P. 98–108.
- [10] Butcher J. C. Numerical methods for ordinary differential equations, 2nd ed. - John Wiley & Sons, 2008.
- [11] Hairer E., Norsett S. P. and Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems - Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [12] Gad E., Nakhla M., Achar R., and Zhou Y. A-Stable and L-Stable highorder integration methods for solving stiff differential equations. IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circ. Sys. 2009. vol. 28. issue 9. P. 1359-1372.
- [13] Ehle B. L. A-Stable Methods and Padé Approximations to the Exponential. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1973. vol. 4. No. 4. P. 671-680.