УДК 621.38+621.373.1 DOI: 10.31114/2078-7707-2020-1-40-45

Параметризованная модель Курамото для связанных осцилляторов с дробными соотношениями частот

М.М. Гурарий, С.Г. Русаков

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН (ИППМ РАН), г. Москва
gourary@ippm.ru

***Аннотация* — В статье рассматривается построение модели Курамото, которая может быть использована в процедурах схемотехнического проектирования для анализа больших систем взаимодействующих автогенераторов. Параметрами предложенной модели генератора Курамото являются гармоники его периодического решения и вектора проекции возбуждений, которые могут быть получены путем моделирования схемы генератора в режиме свободных колебаний. Параметры взаимодействия генераторов задаются передаточными функциями линейных межсоединений. Предложено распространение модели на генераторные системы с отношением собственных частот генераторов, близким к рациональным дробям.**

***Ключевые слова* — связанные генераторы, модель Курамото, фазовая макромодель, синхронизация, динамическая система**

I. Введение

Анализ взаимосвязанных осцилляторов является одной из основных проблем теории нелинейных динамических систем. Такой анализ играет важную роль в различных областях исследований, включая биологию, химию, физику, нейронные сети и т. д. [1-3]. Особый интерес представляет анализ взаимодействующих колебаний в электронных схемах [4]. Проектирование генераторов в радиотехнических интегральных схемах (ИС) требует оценки возмущений, вызванных взаимодействием генератора с другими блоками ИС, включая другие генераторные схемы.

Полное схемотехническое моделирование осцилляторной системы пригодно для небольшого числа простых осцилляторов, но применение такого подхода к высокоразмерным системам требует очень больших вычислительных затрат. Это приводит к необходимости применения упрощенных методов. Наиболее распространенным упрощением является модель Курамото (МК) [5], где каждое обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) представляет фазовое поведение соответствующего генератора.

Однако использование МК для анализа связанных электронных генераторов встречает следующие существенные трудности.

1. МК представляет собой феноменологическую модель, которая обычно применяется для качественного анализа колебательных систем. Параметры МК не определяются характеристиками отдельных генераторных схем и не могут быть получены путем их моделирования.

2. Взаимодействия осцилляторов в большинстве случаев характеризуются постоянным коэффициентом связи. Учет динамических свойств рассматривался лишь для некоторых частных случаев, как, например, связи с задержкой по времени [6], биологические связи из-за диффузии химического вещества [7], инерционные связи в электрических сетях с вращающимися генераторами и двигателями [8].

3. Существенным ограничением МК является то, что она представляет собой систему с близкими значениями собственных частот генераторов [9]. Однако эффекты синхронизации могут также возникать, если отношения естественных частот близки к рациональным дробям [10]. Такие соотношения могут возникать из-за наличия большого количества разных генераторов в современных ИС

Целью данного исследования является предложение подхода, который устраняет указанные выше недостатки известной МК.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 2 представлены основные уравнения известных фазовых макромоделей, включая МК. В разделе 3 приведен вывод параметризованной МК путем применения уравнений сглаженной макромодели к анализу генераторов, связанных линейными динамическими системами. Раздел 4 содержит разработку параметризованной МК для осцилляторов с собственными частотами, близкими к рациональным дробям.

II. Математическое представление известных моделей осциллятора при внешнем возбуждении

A. Модель Курамото

МК в общем виде представляется следующей системой ОДУ [5]:

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m + \sum_{n=1}^{N} u_{mn}(\theta_m - \theta_n). \quad (1)$$

Здесь θ_m, ω_m - мгновенная фаза и собственная частота m-го генератора, N - число генераторов, u_{mn} ($\Delta\theta$) - функции связи.

Если ансамбль подвергается внешнему воздействию с частотой ω_{N+1}, то расширение МК учитывает его [5] как (N + 1)-й член, добавленный к правой части каждого уравнения в (1). Число уравнений расширенной системы не изменяется, а ее переменными яввляются те же N фаз, так как фаза внешнего возбуждения известна.

В простейшем случае, когда один генератор однонаправленно возбуждается внешним источником колебаний, система (1) сводится к одному уравнению

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + u_{ex}(\theta - \theta_{ex}). \quad (2)$$

Функции связи в МК (1) или (2) не связаны с характеристиками генераторов и межсоединений. Этот недостаток отсутствует в нелинейной фазовой макромодели [11], которую часто называют Флоке-макромодель, так как она получена с помощью теории Флоке.

B. Флоке-макромодель

Пусть x(t) - периодическое стационарное (PSS) решение уравнений свободного осциллятора, а b(t) - его малое возмущение. Тогда возмущенное решение представляется в виде $x_p(t) = x(t + \alpha(t))$ с изменяющейся во времени задержкой α (t), определяемой нелинейным ОДУ [11, 12]:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = v^T\big(t + \alpha(t)\big) \cdot b(t), \alpha(0) = 0. \quad (3)$$

Здесь периодическая вектор-функция v(t) – это вектор проекции возмущения (ВПВ), который вычисляется непосредственно из системы ОДУ генератора [13]. ВПВ определяет чувствительность фазы генератора к внешнему возбуждению. Важным преимуществом (3) по сравнению с МК (1) является разделение силы взаимодействия на чувствительность генератора $v(t)$ и интенсивность его возбуждения $b(t)$. Чувствительность является свойством генератора, а интенсивность возбуждения определяется как сигналом возбуждающего генератора, так и параметрами их межсоединений. Эта модель применялась в [12] для анализа связанных генераторов путем расширения (3) с добавлением уравнений межсоединений для системы N генераторов

$$\frac{d\alpha_m(t)}{dt} = v_m^T(t + \alpha_m(t)) \cdot \sum_{n=1}^{N} \gamma_{mn}(t), \alpha(0) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\gamma_{mn}(t)$ - сигнал возбуждения m-го генератора в результате прохождения выходного сигнала n-го генератора $x_n(t)$ через межсоединение mn, определенное линейной системой [13], имеющей общий вид

$$C_{mn}\frac{dz}{dt} + G_{mn}z = F_{mn}x_n\big(t + \alpha_n(t)\big), \gamma_{mn} = D_{mn}z. \quad (5)$$

Здесь z – это вектор внутренних состояний межсоединения mn с матрицами проводимостей G_{mn} и емкостей C_{mn}. Матрица F_{mn} определяет воздействие n-го генератора на межсоединение, а D_{mn} - влияние межсоединения на сигнал возбуждения m-го генератора. Таким образом, совместное решение систем ОДУ (4, 5) определяет поведение связанных генераторов.

В [14] было показано, что решение (4, 5) включает в себя высокочастотные колебания, препятствующие применению макромодели. Другим недостатком модели является невозможность определения условий синхронизации типа (2).

C. Сглаженная Флоке-макромодель

Для устранения недостатков Флоке-макромодели, представленной во временной области (3), в [14] была предложена ее сглаженная форма в виде фазового уравнения в частотной области. Уравнение применимо к произвольному генератору при малом возбуждении $b(t)$. Для генератора с собственной частотой ω_0 векторное возбуждение $b(t)$ задается рядами Фурье с медленно меняющимися во времени комплексными амплитудами, определяемыми вектором $\tilde{B}(t)$

$$b(t) = \sum_{k=-K}^{K} \tilde{B}_k(t)\, exp(jk\omega_0 t). \quad (6)$$

Предполагается, что сигнал генератора при возбуждении совпадает по форме с сигналом свободного генератора (имеет те же гармоники X_k) и имеет изменяющийся во времени фазовый сдвиг φ(t)

$$x(t) = \sum_{k=-K}^{K} X_k\, exp\Big(jk\big(\omega_0 t + \varphi(t)\big)\Big). \quad (7)$$

Тогда медленно изменяющаяся фаза φ(t) удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d\varphi}{dt} = W\left(\tilde{B}(t), \varphi(t)\right), \quad (8)$$

где функция захвата $W(\tilde{B}, \varphi)$ представляет 2π-периодическую зависимость от фазы φ

$$W(\tilde{B}(t), \varphi) = \sum_{k=-K}^{K} \tilde{B}_k(t) V_k\, exp(-jk\varphi). \quad (9)$$

Здесь V_k - k-я гармоника ВПВ генератора $v(t)$.

В случае чистого периодического возбуждения с частотой $\omega_0 + \Delta\omega$ и не зависящих от времени гармоник B_k можно получить условия синхронизации [14], подставив $d\varphi/dt = \Delta\omega$ и $\tilde{B}_k(t) = B_k\, exp(jk\Delta\omega t)$ в (8), (9). Полученное алгебраическое уравнение имеет вид

$$\Delta\omega/\omega_0 = W(B, \varphi_0), \qquad (10)$$

где φ_0 - фаза захвата генератора.

Максимальные и минимальные значения $W(B, \varphi)$ определяют диапазон захвата генератора $\Delta\omega$ для данного сигнала возбуждения

$$\min_{0\le\varphi<2\pi} W(B,\varphi) \le \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \le \max_{0\le\varphi<2\pi} W(B,\varphi). \qquad (11)$$

Этот результат был получен ранее в [15] на основе прямого анализа синхронизированного генератора.

III. Параметризованная форма модели Курамото

В этом разделе представлен вывод параметризованной МК с динамическими связями путем анализа связанных осцилляторов с использованием сглаженной Флоке макромодели (8, 9).

A. Параметризация модели генератора Курамото характеристиками свободного генератора

Уравнения (8) и (9) описывают поведение генератора аналогично модели (2), если сигнал внешнего генератора задаётся по аналогии с (7):

$$x^{ex}(t) = \sum_{k=-K}^{K} X_k^{ex}\, exp\, jk\big(\omega_{ex}t + \varphi_{ex}(t)\big). \qquad (12)$$

Мы предполагаем, что входное возбуждение $b^{ex}(t)$ определяется коэффициентом K^{ex} линейной связи с внешним генератором (12)

$$b^{ex}(t) = K^{ex}x^{ex}(t), \qquad (13)$$

Подставив (12) в (13) и сравнив полученные члены с (6), можно сделать вывод, что

$$\tilde{B}_k(t) = K^{ex}X_k^{ex}\, exp\left(jk\big(\Delta\omega_{ex}t + \varphi_{ex}(t)\big)\right). \qquad (14)$$

После подстановки (14) в (9) получаем

$$W(\tilde{B}^{ex}, \varphi) =$$

$$= \sum_{k=-K}^{K} K^{ex}X_k^{ex}V_k\, exp\, jk(\varphi_{ex} + \Delta\omega_{ex}t - \varphi). \qquad (15)$$

Относительные фазы φ, φ_{ex} генераторов выражаются через их мгновенные фазы θ, θ_{ex} выражениями

$$\varphi = \theta - \omega_0 t, \qquad \varphi_{ex} = \theta_{ex} - \omega_{ex}t, \qquad (16)$$

а их производные по времени имеют вид

$$d\varphi/dt = d\theta/dt - \omega_0, \qquad (17)$$

Заменив переменные в (8), (15) на основе (16), (17) и выполнив элементарные преобразования, получим уравнение (2) в виде

$$u_{ex}(\Delta\theta) = \sum_{k=-K}^{K} K^{ex}\omega_0 X_k^{ex}V_k\, exp(jk\Delta\theta). \qquad (18)$$

Таким образом, в (18) 2π-периодическая функции связи $u_{ex}(\Delta\theta)$ представлена рядом Фурье с амплитудами гармоник $U_k^{ex} = K^{ex}\omega_0 X_k^{ex}V_k$, которые определяются параметрами возбуждающего генератора (ω_0 X_k^{ex}) и параметрами возмущенного генератора (V_k).

Этот результат может быть легко распространен на общий вид МК (1) путем определения функций связи $u_{mn}(\Delta\theta)$ аналогично (18) в виде ряда Фурье с представлением величины k-й гармоники в виде

$$U_k^{mn} = K^{mn}\omega_m V_k^m X_k^n. \qquad (19)$$

Здесь K^{mn} - коэффициент связи между выходным сигналом m-го генератора и соответствующим возбуждением n-го генератора. Параметры ω_m, V_k^m, X_k^n определяются моделированием соответствующего генератора в режиме свободных колебаний.

B. Параметризация взаимосвязей частотно-зависимыми передаточными функциями

Предположение о постоянстве коэффициента связи (13) не всегда верно на практике, особенно в электронных схемах. Чаще всего возбуждения $b(t)$ (6) являются результатом прохождения сигнала генератора (7) через межсоединение. Мы предполагаем, что это межсоединение представлено линейной системой, подобной (5), которая определяет передаточную функцию (ПФ) в частотной области $H^{mn}(\omega)$.

ПФ получается путем решения линейной алгебраической системы уравнений и для (5) имеет вид

$$H^{mn}(\omega) = D^{mn}(G^{mn} + j\omega C^{mn})^{-1}F^{mn} \ . \qquad (20)$$

Сигнал n-го осциллятора имеет вид (12), и с учетом (16) представляется как

$$x^n(t) = \sum_{k=-K}^{K} X_k^n\, exp\, jk\theta_n(t). \qquad (21)$$

Выражение (21) представляет колебание с изменяющейся мгновенной частотой $\omega_n^{inst} = d\theta_n/dt = \dot{\theta}_n$. Мгновенная частота k-го члена в (12) равна $k\dot{\theta}_n$. Таким образом, коэффициенты связи между членом (21) и соответствующим членом возбуждения могут быть приблизительно оценены как TF $H^{mn}(k\omega_n^{inst}) = H^{mn}(k\dot{\theta}_n)$. Замена постоянного коэффициента K^{mn} частотно-зависимой $H^{mn}(k\dot{\theta}_n)$ приводит к следующему виду МК.

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m + \sum_{k=-K}^{K} u_{mn}\left(\frac{d\theta_n}{dt}, \theta_m - \theta_n\right). \tag{22}$$

Здесь функция связи $u_{mn}(\dot{\theta}_n, \Delta\theta)$ - 2π-периодическая по отношению к Δθ. Её амплитуды гармоник имеют вид

$$U_k^{mn}(\dot{\theta}_n) = H^{mn}(\dot{\theta}_n)\omega_m V_k^m X_k^n. \tag{23}$$

Отметим, что в отличие от (1) уравнение (22) является системой ОДУ, неразрешенной по отношению к производным.

IV. Модель Курамото с дробным соотношением частот генераторов

Уравнения (22) были получены в предположении близких значений собственных частот генераторов ω_m. Здесь мы рассмотрим генераторы с соотношениями частот, близкими к рациональным дробям и определяемыми взаимно простыми числами p_m, p_n

$$\frac{\omega_m}{\omega_n} \approx \frac{p_m}{p_n} or \frac{\omega_m}{p_m} \approx \frac{\omega_n}{p_n}. \tag{24}$$

A. *Один генератор при одиночном возбуждении*

Сначала рассмотрим простой случай (2), (18) с соотношением частот: $\omega_0/\omega_{ex} \approx \mathrm{p/q}$.

Анализ при этом может быть сведен к случаю близких частот. Любой периодический процесс с периодом T (круговой частотой f=1/T) и гармониками A_i можно также рассматривать как процесс с с любым кратным периодом $\overline{T} = mT$ (и частотой $\overline{f} = 1/\overline{T}$) и гармониками $\overline{A}_l$, где $\overline{A}_{m\cdot i} = A_i$ для i = 0, 1, 2,… и $\overline{A}_l = 0$ для $l \neq m \cdot i$. Таким образом, последовательность $\overline{A}_l$ содержит m-1 нулей между соседними гармониками A_i

$$\overline{A} = [\ldots, A_0, \overbrace{0,\ldots,0}^{m-1}, A_1, \overbrace{0,\ldots,0}^{m-1}, A_2, \overbrace{0,\ldots,0}^{m-1}, \ldots \tag{25}$$

Поэтому мы можем рассматривать собственные частоты двух генераторов и их мгновенные фазы как

$$\overline{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{p} \approx \overline{\omega}_{ex} = \frac{\omega_{ex}}{q}, \overline{\theta} = \frac{\theta}{p}, \overline{\theta}_{ex} = \frac{\theta_{ex}}{q}. \tag{26}$$

Тогда (2) для преобразованных генераторов имеет вид

$$\frac{d\overline{\theta}}{dt} = \overline{\omega}_0 + u_{ex}(\overline{\theta} - \overline{\theta}_{ex}). \tag{27}$$

После замены переменных в соответствии с (26)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + pu_{ex}\left(\frac{\theta}{p} - \frac{\theta_{ex}}{q}\right). \tag{28}$$

В рядах Фурье (18) для $u_{ex}(\Delta\overline{\theta}) = u_{ex}(\overline{\theta} - \overline{\theta}_{ex})$ ненулевой член может появиться только в том случае, если обе гармоники X_k^{ex} и V_k отличны от нуля. В силу (25) это происходит для индексов $k = l \cdot p \cdot q$ для любого целого числа l. Тогда (18) можно преобразовать к виду

$$u_{ex}(\Delta\overline{\theta}) = \sum_{l=-L}^{L} K^{ex}\overline{\omega}_0 X_{lpq}^{ex} V_{lpq} exp(jlpq\Delta\overline{\theta}). \tag{29}$$

Учитывая, что $p \cdot q \cdot \Delta\overline{\theta} = q\theta - p\theta_{ex}$, и заменяя в (29) индекс нумерации l на k в (29), получим

$$pu_{ex}(\Delta\overline{\theta}) = \overline{u}_{ex}(q\theta - p\theta_{ex}) =$$

$$= K^{ex}\omega_0 \sum_{l=-L}^{L} X_{kpq}^{ex} V_{kpq}\, exp\, jk(q\theta - p\theta_{ex}). \tag{30}$$

Тогда МК (28) примет вид

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0 + \overline{u}_{ex}(q\theta - p\theta_{ex}), \tag{31}$$

где функция $\overline{u}_{ex}$ определяется формулой (31).

B. *Взаимно возбужденные генераторы*

Для распространения полученных результатов на произвольную систему (1) сначала введем общий вид функции связи как $U(X, V, H, p/q, \omega_{inst}, \delta)$. Здесь X - вектор гармоник сигнала возбуждающего генератора, V - вектор гармоник ВПВ возмущенного генератора, H - передаточная функция межсоединения между генераторами, ω_{inst} - мгновенная частота возбуждающего генератора, δ - расхождение между мгновенными фазами осцилляторов (например, в (31) $\delta = q\theta - p\theta_{ex}$).

Аналогично приведенному выше выводу ряда Фурье (30) можно получить ряд Фурье для функции $U(X, V, H, p/q, \delta)$:

$$U(X, V, H, p/q, \omega_{inst}, \delta) =$$

$$= \sum_{l=-L}^{L} H(\omega_{inst}) X_{kpq} V_{kpq}\, exp\, jk(\delta). \tag{32}$$

Для применения (32) необходимо определить рациональные дроби p_{ij}/q_{ij}, соответствующие приближенным значениям отношений частот каждой пары связанных генераторов. Для существования этих дробей достаточно, чтобы отношения частоты первого генератора к частоте любого другого i-го генератора были близки к рациональным дробям

$$\omega_1/\omega_i \approx p_i/q_i. \tag{33}$$

Условия (33) обеспечивает рациональные отношения частот любых двух генераторов

$$\frac{\omega_i}{\omega_j} = \frac{\omega_1/\omega_j}{\omega_1/\omega_i} \approx \frac{p_j/q_j}{p_i/q_i} = \frac{p_j q_i}{p_i q_j} = \frac{p_{ij}}{q_{ij}}. \tag{34}$$

Чтобы определить взаимные величины p_{ij}, q_{ij} в соответствии с (34), можно выполнить операцию

$$r = gcd(p_j q_i, p_i q_j), p_{ij} = p_j q_i / r, q_{ij} = p_i q_j / r. \tag{35}$$

Здесь gcd (N, M) обозначает наибольший общий делитель двух целых чисел N, M.

Для известных $\omega_m, p_{mn}, q_{mn}, X^n, V^m, H^{mn}$ мы можем параметризовать функции связи, применяя общую функцию (32)

$$u_{mn}(\omega_{inst}, \delta) =$$
$$= \omega_m U(X^n, V^m, H^{mn}, p_{mn}/q_{mn}, \omega_{inst}, \delta). \tag{36}$$

Тогда система ОДУ для МК представляется как

$$\frac{d\theta_n}{dt} = \omega_m + \sum_{n=1}^{N} u_{mn}\left(p_{mn}\frac{d\theta_m}{dt}, q_{mn}\theta_m - p_{mn}\theta_n\right). \tag{37}$$

Полученная система (37) представляет собой МК для ансамбля осцилляторов с соотношением частот, близким к рациональным дробям.

V. Заключение

В статье предлагаются модификации модели Курамото, обеспечивающие ее применение к задачам схемотехнического моделирования.

Для автогенераторов предложена модель Курамото, параметризованная значениями гармоник сигнала свободного генератора и гармоник его Вектора Проекции Возмущений, представляющего чувствительность генератора к возбуждению. Гармоники для параметризации могут быть получены путем моделирования периодического режима свободных колебаний генератора.

В модель включены динамические связи между генераторами, определяемые частотно-зависимыми передаточными функциями линейных межсоединений. Частотный аргумент передаточной функции определяется производной по времени соответствующей фазовой переменной. Такой подход сохраняет порядок системы ОДУ модели.

Задача анализа системы связанных осцилляторов с соотношением собственных частот, близким к рациональным дробям, рассмотрена впервые. Ранее модель Курамото рассматривалась лишь для колебательных систем с близкими частотами. Новый подход основан на рассмотрении колебательного процесса как процесса с кратным периодом.

Поддержка

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-07-00733).

Литература

[1] P. Maffezzoni, B. Bahr, Z. Zhang and L. Daniel, "Oscillator Array Models for Associative Memory and Pattern Recognition," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 62, no. 6, pp. 1591-1598, June 2015. doi: 10.1109/TCSI.2015.2418851

[2] M. Bonnin, F. Corinto and M. Gilli, "Periodic Oscillations in Weakly Connected Cellular Nonlinear Networks," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 55, no. 6, pp. 1671-1684, July 2008. doi: 10.1109/TCSI.2008.916460

[3] P. Ashwin, S. Coombes, R. Nicks, “Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience,” *J. Math. Neurosc.* **6,** 2 (2016) doi:10.1186/s13408-015-0033-6

[4] P. Maffezzoni, B. Bahr, Z. Zhang and L. Daniel, "Reducing Phase Noise in Multi-Phase Oscillators," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 63, no. 3, pp. 379-388, March 2016.

[5] Acebrón, J. A., et al.: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. Reviews of Modern Physics 77(1), 137 – 185 (2005).

[6] Jörg, D.J., et al.: Synchronization Dynamics in the Presence of Coupling Delays and Phase Shifts. Phys Rev Lett. 112(17): 174101, (2014).

[7] Batistaa, C.A.S., et al.: Synchronization of phase oscillators with coupling mediated by a diffusing substance. Physica A, 470, 236-248 (2017)

[8] Grzybowski, J.M.V., et al.: On synchronization in power-grids modelled as networks of second-order Kuramoto oscillators. Chaos 26(11) , 113113 (2016)

[9] Izhikevich, E. M., Kuramoto, Y., 2006. Weakly coupled oscillators. Encyclopedia of Mathematical Physics 5, 448.

[10] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley, 1986.

[11] Demir, A., Mehrotra, A., Roychowdhury, J.: Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization. IEEE Trans. on CAS I. 47(5), 655, (2000)

[12] Harutyunyan, D., et al.: Simulation of mutually coupled oscillators using nonlinear phase macromodels and model order reduction techniques, In: M. Gunter (Ed.): Coupled Mul-tiscale Simulation and Optimization in Nanoelectronics, Mathematics in Industry 21, pp. 398-432. Springer, Berlin, Heidelberg (2015).

[13] Demir A., Roychowdhury, J. A reliable and efficient procedure for oscillator PPV computation, with phase noise macromodeling applications. IEEE Trans. on Comp.-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 22(2), 188-197 (2003).

[14] Gourary M.M., Rusakov S.G., et al.: Smoothed Form of Nonlinear Phase Macromodel for Oscillators. In: IEEE/ACM Int. Conf. on Comp.-Aided Design, pp. 807 - 814 (2008).

[15] Gourary, M.M., Rusakov, S.G., et al.: Injection Locking Conditions under Small Periodic Excitations. In: 2008 IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst., pp. 544-547 (2008).

Parametrized Kuramoto Model for Coupled Oscillators with Fractional Frequencies Ratios

M.M. Gourary, S.G. Rusakov

Institute for Design Problems in Microelectronics of Russian Academy of Sciences,
gourary@yandex.ru

***Abstract* — The paper proposes modifications of the Kuramoto model providing its application to the problems of the circuit simulation. The development of the parametrized Kuramoto model is based on the smoothed form of the PPV macromodel earlier proposed by authors.**

The proposed parametrized model of Kuramoto oscillator is based on harmonics of the oscillator waveform and the oscillator PPV harmonics representing the oscillator sensitivity to the excitation. All harmonics for the model parametrizing can be obtained by the simulation of the free-running oscillator.

Dynamic couplings are parametrized by frequency-dependent transfer functions of linear interconnects included into the model. The frequency argument of the transfer function is defined by the time derivative of the corresponding phase variable. Such an approach saves the order of the model's ODE system.

The problem of analyzing a system of coupled oscillators with natural frequencies close to the fractional ratio is considered for the first time. Previously Kuramoto model was used to analyze oscillatory systems with close frequencies only. An approach to the model construction is based on the transformation of the oscillatory equation to the equation with a multiple period. The developed model contains numerators and denominators of rational fractions as additional parameters affecting the presentation of the phase argument of coupling functions.

***Keywords* — coupled oscillators, Kuramoto model, phase macromodel, synchronization, dynamical system.**

REFERENCES

[1] P. Maffezzoni, B. Bahr, Z. Zhang and L. Daniel, "Oscillator Array Models for Associative Memory and Pattern Recognition," in IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 62, no. 6, pp. 1591-1598, June 2015. doi: 10.1109/TCSI.2015.2418851

[2] M. Bonnin, F. Corinto and M. Gilli, "Periodic Oscillations in Weakly Connected Cellular Nonlinear Networks," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 55, no. 6, pp. 1671-1684, July 2008. doi: 10.1109/TCSI.2008.916460

[3] P. Ashwin, S. Coombes, R. Nicks, "Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience," *J. Math. Neurosc.* **6,** 2 (2016) doi:10.1186/s13408-015-0033-6

[4] P. Maffezzoni, B. Bahr, Z. Zhang and L. Daniel, "Reducing Phase Noise in Multi-Phase Oscillators," in *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, vol. 63, no. 3, pp. 379-388, March 2016.

[5] Acebrón, J. A., et al.: The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. Reviews of Modern Physics 77(1), 137 – 185 (2005).

[6] Jörg, D.J., et al.: Synchronization Dynamics in the Presence of Coupling Delays and Phase Shifts. Phys Rev Lett. 112(17): 174101, (2014).

[7] Batistaa, C.A.S., et al.: Synchronization of phase oscillators with coupling mediated by a diffusing substance. Physica A, 470, 236-248 (2017)

[8] Grzybowski, J.M.V., et al.: On synchronization in power-grids modelled as networks of second-order Kuramoto oscillators. Chaos 26(11) , 113113 (2016)

[9] Izhikevich, E. M., Kuramoto, Y., 2006. Weakly coupled oscillators. Encyclopedia of Mathematical Physics 5, 448.

[10] J. M. T. Thompson and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Wiley, 1986.

[11] Demir, A., Mehrotra, A., Roychowdhury, J.: Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization. IEEE Trans. on CAS I. 47(5), 655, (2000)

[12] Harutyunyan, D., et al.: Simulation of mutually coupled oscillators using nonlinear phase macromodels and model order reduction techniques, In: M. Gunter (Ed.): Coupled Mul-tiscale Simulation and Optimization in Nanoelectronics, Mathematics in Industry 21, pp. 398-432. Springer, Berlin, Heidelberg (2015).

[13] Demir A., Roychowdhury, J. A reliable and efficient procedure for oscillator PPV computation, with phase noise macromodeling applications. IEEE Trans. on Comp.-Aided Design of Integrated Circuits and Systems 22(2), 188-197 (2003).

[14] Gourary M.M., Rusakov S.G., et al.: Smoothed Form of Nonlinear Phase Macromodel for Oscillators. In: IEEE/ACM Int. Conf. on Comp.-Aided Design, pp. 807 - 814 (2008).

[15] Gourary, M.M., Rusakov, S.G., et al.: Injection Locking Conditions under Small Periodic Excitations. In: 2008 IEEE Int. Symp. on Circ. and Syst., pp. 544-547 (2008).