

Теорема отсчетов во временной области для инфинитного сигнала: аналитическое выражение и геометрическая иллюстрация

Г.С. Ханян

ФГУП «Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова», г. Москва,
khanyan@rtc.ciam.ru

Аннотация — Работа посвящена исследованию теоремы отсчетов для сигнала бесконечной длительности двумя взаимодополняющими методами – аналитическим и геометрическим. Проводится сравнение с результатами, полученными ранее для сигнала конечной длительности.

Ключевые слова — гармонический сигнал, индекс полосы частот, канонические переменные, суммирование рядов.

I. ВВЕДЕНИЕ

Одним из фундаментальных положений теории информации является теорема отсчетов во временной области, широко известная в классической формулировке Уиттекера-Котельникова-Шеннона [1] как способ восстановления по своим отсчетам $s(t_n)$ сигнала бесконечной длительности $s(t)$ с финитной спектральной функцией $S(f)$, спектры амплитуд $A(f) = 2|S(f)|$ и фаз $\Phi(f) = \arg S(f)$ которого ограничены верхней частотой среза: $0 \leq f < F/2$, где F – частота дискретизации.

Менее известны версии теоремы с конечным числом отсчетов N (см., напр., [2], где N – нечетно) и с полосовой фильтрацией, где частоты среза $F_{low} = GF/2$, $F_{up} = (G+1)F/2$ определяются индексом частотной полосы $G \geq 0$ (целочисленным – во избежание наложения частот – см., напр., [3]-[4]). Эти и другие многочисленные обобщения теоремы (нетригонометрическое ядро, неравномерная дискретизация, ошибки срезания, шум и т.д.) освещены в обширной литературе, с достаточной полнотой представленной (248 источников) в цитируемой многими авторами обзорной статье [5].

Исследования автора ([6]-[8] и др.) посвящены полосовой фильтрации с бесконечным и конечным произвольным числом N отсчетов сигнала, наблюдаемого в полосе частот с произвольным вещественным индексом G . Один из первоначальных результатов инфинитной версии теоремы – формулы для частот среза (37) – был установлен в [6] исходя из идеи, что для отсутствия частотного наложения периодическое продолжение $S(f+gF)$ не должно пересекаться с зеркальным отражением $A(-f)$ и $\Phi(-f)$, где, как оказалось, $g = [G]$, что было подтверждено в [6]-[8] путем анализа преобразования (42) базового сигнала – фрагмента гармонических колебаний (1) длительностью $T = N/F$.

В настоящей работе проводится начатый в [6] исчерпывающий анализ инфинитной версии теоремы [1].

II. ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Гармонический сигнал бесконечной длительности

$$s(t) = a \cos(2\pi ft + \varphi), \quad -\infty < t < +\infty \quad (1)$$

с параметрами $a \geq 0$, $-\infty < f < +\infty$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$ подвергается, при базовом (определенно указанном) моменте времени t_0 , дискретизации с частотой F :

$$s(t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - t_n) dt = a \cos(2\pi f t_n + \varphi); \quad t_n = t_0 + n/F, \quad (2)$$

после чего восстанавливается преобразованием

$$s'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \frac{\sin \pi(G+1)F(t-t_n) - \sin \pi GF(t-t_n)}{\pi F(t-t_n)}, \quad (3)$$

ядро которого содержит три параметра – частоту дискретизации F , индекс полосы G и базовое время t_0 .

Результат преобразования $s'(t)$ отмечен штрихом, поскольку далеко не очевидны условия, накладываемые на параметры преобразования F , G , t_0 и сигнала a , f , φ , при которых преобразование (3) тождественное:

$$s'(t) = s(t), \quad (4)$$

что и составляет содержание теоремы отсчетов для инфинитного гармонического сигнала – сигнал (1) восстанавливается по своим отсчетам (2) по интерполяционной формуле (3).

Как только будут найдены, так или иначе зависящие от перечисленных параметров границы частотной полосы F_{low} и F_{up} , внутри которой имеет место (4), то, в силу линейности преобразования (3), теорема отсчетов во временной области будет справедлива для сигнала

$$s(t) = \int_{F_{low}}^{F_{up}} a(f) \cos(2\pi ft + \varphi(f)) df, \quad (5)$$

представляющего собой суперпозицию гармонических колебаний (1).

Целью работы является определение этих границ, а также описание явлений, имеющих место, как при справедливости, так и при нарушении теоремы.

III. ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНЫМ ВЕЛИЧИНАМ

Перейдем в (1)-(2) к безразмерным по параметру F текущему времени $q= Ft$ и частоте сигнала $p=2f/F$, в результате чего (3) примет вид

$$s'(t) = s'(q/F) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi p q_n + \varphi) \times \frac{\sin \pi(G+1)(q-q_n) - \sin \pi G(q-q_n)}{\pi(q-q_n)}, \quad (6)$$

где $q_n = Ft_n = q_0 + n$ – последовательность отсчетов безразмерного времени q с базовым значением $q_0 = Ft_0$.

Введем вместо частоты p и индекса G связанную с ними пару безразмерных параметров

$$\xi = \frac{G+p+1}{2}, \quad \eta = \frac{G-p+1}{2}, \quad (7)$$

которые назовем каноническими переменными – в том (как выяснится в дальнейшем) смысле, что представляют они p и G в равноправном виде на плоскости (p, G) – по аналогии с равноправием обобщенных координат и обобщенных импульсов в функции Гамильтона физической системы в аналитической механике (или их операторов в квантовой механике).

Преобразование (6), рассматриваемое отныне как функция переменных (ξ, η) , принимает вид:

$$s'(t) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi(\xi-\eta)(q_0+n) + \varphi) \times \frac{\sin \pi(\xi+\eta)(q-q_0-n) - \sin \pi(\xi+\eta-1)(q-q_0-n)}{\pi(q-q_0-n)}. \quad (8)$$

IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Представив произведение косинуса (цифровой реализации сигнала) на каждый из синусов числителя ядра преобразования (8) в виде суммы двух синусов, и изменив индекс суммирования n на $-n$, получаем четырехчленное выражение

$$s'(t) = W(\xi, \eta, \varphi) + W(\eta, \xi, -\varphi) - W(\xi-1/2, \eta-1/2, \varphi) - W(\eta-1/2, \xi-1/2, -\varphi) \quad (9)$$

с базовой (материнской) функцией

$$W(\xi, \eta, \varphi) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi(\xi+\eta)q - \varphi - 2\pi\xi q_0 + 2\pi\xi n)}{2\pi(q-q_0+n)}. \quad (10)$$

Раскрытие синуса в числителе приводит правую часть (10) к двучленному выражению:

$$W(\xi, \eta, \varphi) = \frac{a}{2} U(\xi) \sin(\pi(\xi+\eta)q - \varphi - 2\pi\xi q_0) + \frac{a}{2} V(\xi) \cos(\pi(\xi+\eta)q - \varphi - 2\pi\xi q_0), \quad (11)$$

где $U(\xi)$ и $V(\xi)$ – тригонометрические ряды, суммы которых (для нецелых $q-q_0$) затабулированы в обширном справочнике по интегралам и рядам [9], п. 5.4.3.4:

$$U(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi\xi n}{\pi(q-q_0+n)} = \frac{\cos \pi(q-q_0)(1-2\{\xi\})}{\sin \pi(q-q_0)}, \quad (12)$$

$$V(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi\xi n}{\pi(q-q_0+n)} = \frac{\sin \pi(q-q_0)(1-2\{\xi\})}{\sin \pi(q-q_0)} \operatorname{sgn}\{\xi\}.$$

Вторая функция, $V(\xi)$, так же, как и $V(\eta)$, при целых и полужелых значениях аргументов $\xi=k+j/2$, $\eta=l+j/2$; $j=0$ или 1 ; $k, l=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ равна нулю, что мотивирует рассмотреть два случая вычисления (11). Примем $V(\xi) \neq 0$ и $V(\eta) \neq 0$ за основной случай, а $V(\xi)=0$ и $V(\eta)=0$ – за особый случай пары параметров (ξ, η) и их прототипов (p, G) . Различать эти два случая можно по тому, равны 1 или 0 соответственно, выражения $\operatorname{sgn}\{2\xi\}$ и $\operatorname{sgn}\{2\eta\}$.

A. Основной случай

Так как $\xi \neq k+j/2$, то $\operatorname{sgn}\{\xi\} = \operatorname{sgn}\{2\xi\} = 1$ в (12), и тогда

$$W(\xi, \eta, \varphi) = a \frac{\cos u \sin v + \sin u \cos v}{2 \sin \pi(q-q_0)}; \quad (13)$$

$$u = \pi(1-2\{\xi\})(q-q_0), \quad v = \pi(\xi+\eta)q - \varphi - 2\pi\xi q_0.$$

Пользуясь формулой синуса суммы двух углов, выражаем две из функций (9) в явной форме:

$$\begin{cases} W(\xi, \eta, \varphi) = a \frac{\sin(u+v)}{2 \sin \pi(q-q_0)} = a \frac{\sin(\pi(\eta-\xi)q + \pi(1+2\{\xi\})(q-q_0) - \varphi)}{2 \sin \pi(q-q_0)}. \\ W(\xi-1/2, \eta-1/2, \varphi) = a \frac{\sin(\pi(\eta-\xi)q + \pi(1+2\{\xi-1/2\})(q-q_0) - \varphi)}{2 \sin \pi(q-q_0)}. \end{cases} \quad (14)$$

Вычисляем разность между этими функциями по формуле разности синусов двух углов с применением основных свойств операций взятия целой и дробной части числа $[\xi+k] = [\xi] + k$, $\{\xi+k\} = \{\xi\}$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$:

$$\begin{aligned} s_{\xi, \eta}(\varphi) &= W(\xi, \eta, \varphi) - W(\xi-1/2, \eta-1/2, \varphi) = \\ &= -a \frac{\sin \pi[\{\xi\}-1/2](q-q_0)}{\sin \pi(q-q_0)} \times \\ &\times \cos(\pi(\eta-\xi)q + \pi(2\{\xi\} + [\{\xi\}+1/2])(q-q_0) - \varphi). \end{aligned} \quad (15)$$

Нетрудно показать, что множитель $j = [\{\xi\}-1/2]$ при $(q-q_0)$ в подсинусном выражении числителя дроби (15) равен 0 или -1 . В последнем случае синусы в числителе и знаменателе этой дроби сокращаются, а слагаемое $[\{\xi\}+1/2]$ в подкосинусном выражении становится равным нулю, поэтому его можно игнорировать не только при $j=-1$, но и при $j=0$, когда из-за равенства нулю всей дроби нулем окажется вся правая часть (15):

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = a(-[\{\xi\}-1/2]) \cos(\pi(\xi-\eta)q - 2\pi[\xi](q-q_0) + \varphi). \quad (16)$$

Точно таким же способом вычисляем разность двух оставшихся в (9) компонент сигнала:

$$\begin{aligned} s_{\eta, \xi}(-\varphi) &= W(\eta, \xi, -\varphi) - W(\eta-1/2, \xi-1/2, -\varphi) = \\ &= a(-[\{\eta\}-1/2]) \cos(\pi(\eta-\xi)q - 2\pi[\eta](q-q_0) - \varphi) \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразованный сигнал (9) в итоге представляет собой сумму двух компонент (16) и (17):

$$s'(t) = s_{\xi, \eta}(\varphi) + s_{\eta, \xi}(-\varphi). \quad (18)$$

В. Особый случай

Рассмотрим сначала случай $\text{sgn}\{2\xi\} = 0$, не накладывая при этом никаких ограничений на η . Тогда $\xi = k + j/2$ при указанных выше j и k . По формулам (11)-(15) при $V(\xi) = V(\xi - 1/2) = 0$ получаем следующее выражение для первой компоненты сигнала (18):

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = a \frac{U(\xi) \sin v - U(\xi - 1/2) \sin(v - w)}{2}, \quad w = \pi(q - q_0). \quad (19)$$

Пользуясь указанными выше свойствами операций «целая и дробная часть числа», устанавливаем, что

$$U(\xi) = \frac{\cos(1 - 2\{k + j/2\})w}{\sin w} = \frac{j + (1 - j) \cos w}{\sin w}, \quad (20)$$

$$U(\xi - 1/2) = \frac{\cos(1 - 2\{k + j/2 - 1/2\})w}{\sin w} = \frac{(1 - j) + j \cos w}{\sin w}.$$

Подставив (20) в (19), и произведя эквивалентные тригонометрические преобразования, получаем:

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = a \frac{j + (1 - j) \cos w}{2 \sin w} \sin v - a \frac{(1 - j) + j \cos w}{2 \sin w} \times (\sin v \cos w - \cos v \sin w) = a \frac{\cos(v - jw)}{2}. \quad (21)$$

Теперь подставляем в (21) v и w из (13) и (19), учитывая при этом, что $j = 2\{j/2\} = 2(\xi - k) = 2(\xi - [\xi])$:

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = \frac{a}{2} \cos(\pi(\xi - \eta)q - 2\pi[\xi](q - q_0) + \varphi). \quad (22)$$

Точно таким же способом вычисляем вторую компоненту сигнала (18) для целых и полуцелых η :

$$s_{\eta, \xi}(-\varphi) = \frac{a}{2} \cos(\pi(\eta - \xi)q - 2\pi[\eta](q - q_0) - \varphi). \quad (23)$$

С. Объединение основного и особого случаев

Сравнивая выражения (22) и (23) с выражениями (16) и (17), замечаем, что отличаются они лишь коэффициентами при косинусах, одинаковых для каждой из компонент. Амплитуда ξ -компоненты $s_{\xi, \eta}(\varphi)$ сигнала (18) в основном случае (16) равна a , если $0 < \{\xi\} < 1/2$, и нулю – если $1/2 < \{\xi\} < 1$, в то время как в особом случае $\{\xi\} = 0$ или $1/2$ амплитуда эта равна $a/2$. Объединить оба случая можно следующим образом:

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = (a/2)(1 + (-1)^{[2\xi]} \text{sgn}\{2\xi\}) \times \cos(\pi(\xi - \eta)q - 2\pi[\xi](q - q_0) + \varphi). \quad (24)$$

Видно, что если $\text{sgn}\{2\xi\} = 0$, то множитель при косинусе равен 1, и амплитуда равна $a/2$; если же $\text{sgn}\{2\xi\} = 1$, то множитель этот равен 2 или 0 – в зависимости от того, четно или нечетно целое число $[2\xi]$. Если оно четно (равно $2k$), то из определения целой части $2k \leq 2\xi < 2k + 1$ следует $k < \xi < k + 1/2$, означающее $0 < \{\xi\} < 1/2$; если нечетно, то из $2k + 1 \leq 2\xi < 2k + 2$ следует

$1/2 < \{\xi\} < 1$. Точно так же, изменив знак подкосинусного выражения, обобщаем η -компоненту сигнала:

$$s_{\eta, \xi}(-\varphi) = (a/2)(1 + (-1)^{[2\eta]} \text{sgn}\{2\eta\}) \times \cos(\pi(\xi - \eta)q - 2\pi[\eta](q - q_0) + \varphi). \quad (25)$$

Д. Преобразование узловых точек

Так мы называем отсчеты текущего времени $t = t_m$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, взятые в (3) на отсчетах сигнала. При этом $q - q_0 = m$ и формулы (12) не применимы (знаменатель $\sin \pi m$ в выражениях для U и V становится равным нулю). Поэтому вычислим преобразование (8) другим методом. Подставив туда $q_0 = q - m$, имеем:

$$s'(t) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi(\xi - \eta)(q - m + n) + \varphi) \times \frac{\sin \pi(\xi + \eta)(m - n) - \sin \pi(\xi + \eta - 1)(m - n)}{\pi(m - n)}. \quad (26)$$

Заменив $n - m$ на индекс суммирования n и применив формулу разности синусов двух углов, приводим (26) к форме, не содержащей m явно:

$$s'(t) = a \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos(\pi(\xi - \eta)(q + n) + \varphi) \cos \pi(\xi + \eta - 1/2)n \frac{\sin \pi n/2}{\pi n/2}. \quad (27)$$

Основную проблему – деление на ноль в ядре преобразования (27) – решаем, обособив член ряда с номером $n = 0$, используя для этого первый замечательный предел $(\sin x)/x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$ (где $x = \pi n/2$) и объединив суммы по положительным и отрицательным n :

$$s'(t) = a \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi) + a \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos(\pi(\xi - \eta)(q + n) + \varphi) + \cos(\pi(\xi - \eta)(q - n) + \varphi)}{2} \right) \cos \pi(\xi + \eta - 1/2)n \frac{\sin \pi n/2}{\pi n/2}. \quad (28)$$

Члены ряда с четными номерами $n = 2k$ равны нулю (из-за $\sin \pi k = 0$ при $\pi k \neq 0$); для нечетных же номеров $n = 2k + 1$ формула (28) после сложения косинусов в больших круглых скобках принимает вид:

$$s'(t) = a \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi) \times \left(1 + 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \cos \pi(\xi - \eta)(2k + 1) \times \frac{\sin \pi(2k + 1)/2 \cos \pi(\xi + \eta - 1/2)(2k + 1)}{\pi(2k + 1)/2} \right). \quad (29)$$

Замечаем, что замена индекса суммирования k на $(-k - 1)$ оставляет члены суммы неизменными, в то время как само суммирование производится от $k = -\infty$ до $k = -1$, что позволяет, после переименования k обратно в n , представить объединение (29) по $\pm n$ в виде:

$$s'(t) = a \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi) \times \left(1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos \pi(\xi - \eta)(2n + 1) \times \frac{\sin \pi(2n + 1)/2 \cos \pi(\xi + \eta - 1/2)(2n + 1)}{\pi(2n + 1)/2} \right). \quad (30)$$

Дальнейшие тригонометрические преобразования (детали опускаем) приводят (30) к двучленному выражению (18), на этот раз с «материнской» компонентой

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = (a/2) \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi) \times \quad (31)$$

$$\times \left(1 + \cos 2\pi\xi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi(2\xi)n}{\pi(n+1/2)} + \sin 2\pi\xi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi(2\xi)n}{\pi(n+1/2)} \right).$$

Ряды в (31) суммируются по формулам (12), в которых $q - q_0$ формально заменяем на $1/2$, а $\xi - \eta$ на 2ξ :

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = (a/2) \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi) \times \quad (32)$$

$$\times (1 + (\cos 2\pi\xi \cos \pi\{2\xi\}) \operatorname{sgn}\{2\xi\} + \sin 2\pi\xi \sin \pi\{2\xi\}).$$

Снова рассматриваем два случая по знаку дробной части 2ξ в (32) – основной и особый:

$$s_{\xi, \eta}(\varphi) = \begin{cases} a \frac{1 + (-1)^{\lfloor 2\xi \rfloor}}{2} \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi), & \operatorname{sgn}\{2\xi\} = 1. \\ (a/2) \cos(\pi(\xi - \eta)q + \varphi), & \operatorname{sgn}\{2\xi\} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Наконец, вносим под косинус фиктивное, кратное 2π слагаемое $-2\pi\{\xi\}m$, где, как условились, $m = q - q_0$, и, тем самым, сводим формулу (33) к формуле (22).

Таким образом, преобразование узловых точек t_m по интерполяционной формуле (8), а, значит, и (3), представляет собой всего лишь частный случай восстановления сигнала во все моменты времени t .

V. АНАЛИЗ ПРЕОБРАЗОВАННОГО СИГНАЛА

Преобразованный сигнал (18) для всех без исключения значений времени t , канонических переменных ξ , η и параметров сигнала a , φ и $f = pF/2$, где $p = \xi - \eta$ из формул (7), выглядит как бигармонический сигнал – сумма двух гармонических ξ - и η -компонент (24)-(25):

$$s'(t) = a_\xi \cos(2\pi(f - [\xi]F)t + \varphi + 2\pi[\xi]Ft_0) + \quad (34)$$

$$+ a_\eta \cos(2\pi(f + [\eta]F)t + \varphi - 2\pi[\eta]Ft_0);$$

$$a_\xi = a \frac{1 + (-1)^{\lfloor 2\xi \rfloor} \operatorname{sgn}\{2\xi\}}{2}, \quad a_\eta = a \frac{1 + (-1)^{\lfloor 2\eta \rfloor} \operatorname{sgn}\{2\eta\}}{2}.$$

Амплитуды компонент a_ξ , a_η в зависимости от четности целых чисел $\lfloor 2\xi \rfloor$, $\lfloor 2\eta \rfloor$ и от равенства нулю или единице знаков неотрицательных чисел $\{2\xi\}$, $\{2\eta\}$ могут принимать одно из трех значений a , $a/2$, 0 каждая. Это порождает, в зависимости от комбинации этих значений, явления справедливости и различных нарушений утверждения теоремы (4), анализируемые в нижеследующих пунктах А-Е текущего раздела и изображенные на рис. 1 каждое в своем цветовом оформлении на плоскости канонических переменных (ξ, η) , поворот осей которой на 45° по часовой стрелке осуществляет, путем обращения формул (7): $p = \xi - \eta$, $G = \xi + \eta - 1$, отображение результатов преобразования (8) на плоскость параметров (p, G) .

А. Условия справедливости теоремы отсчетов

Непосредственно из (34) видно, что условием (4) тождественности преобразования (3) сигнала (1) будет либо обнуление одной из гармонических компонент при сохранении другой с амплитудой a и отсутствии

смещения ее частоты и фазы, либо двукратное ослабление обеих компонент без смещения частоты и фазы:

$$\begin{cases} a_\xi = a, & [\xi] = 0, & a_\eta = 0 \\ a_\eta = a, & [\eta] = 0, & a_\xi = 0 \\ a_\xi = a_\eta = a/2, & [\xi] = [\eta] = 0 \end{cases} \quad (35)$$

Амплитуда ξ -компоненты в верхней строке совокупности равенств (35) будет равна a , если (-1) в (34) возводится в четную степень: $\lfloor 2\xi \rfloor = 2k$; при этом $\{2\xi\} \neq 0$ и отсутствует смещение, т.е. $[\xi] = 0$. Формулируются эти условия как система неравенств $2k \leq 2\xi < 2k + 1$, $0 \leq \xi < 1$, $2\xi \neq 2k$, решением которой является неравенство $0 < \xi < 1/2$. Для равенства нулю η -компоненты (-1) возводится в нечетную степень: $\lfloor 2\eta \rfloor = 2l - 1$; при этом $\{2\eta\} \neq 0$ безотносительно наличия или отсутствия смещения, что формулируется как система $2l - 1 \leq 2\eta < 2l$, $2\eta \neq 2l - 1$, решением которой является неравенство $l - 1/2 < \eta < l$. Поменяв местами ξ с η и k с l , устанавливаем, что вторая строка (35) эквивалентна системе неравенств $0 < \eta < 1/2$, $k - 1/2 < \xi < k$. В третьей строке (35) условие отсутствия смещения $[\xi] = [\eta] = 0$ дает систему неравенств $0 \leq \xi < 1$, $0 \leq \eta < 1$, или же, $0 \leq 2\xi < 2$, $0 \leq 2\eta < 2$. Отсюда имеем $\lfloor 2\xi \rfloor = 0$ или 1 , $\lfloor 2\eta \rfloor = 0$ или 1 , что вместе с условием равенства обеих амплитуд $a/2$: $\{2\xi\} = \{2\eta\} = 0$, означаящим $2\xi = \lfloor 2\xi \rfloor$, $2\eta = \lfloor 2\eta \rfloor$, определяет 4 изолированные точки на плоскости (ξ, η) : $(0, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1/2)$.

Итак, области справедливости теоремы описываются совокупностью соотношений

$$\begin{cases} 0 < \xi < 1/2, & l - 1/2 < \eta < l; & 0 < \eta < 1/2, & k - 1/2 < \xi < k \\ \xi = 0, & \eta = 0; & \xi = 0, & \eta = 1/2; & \xi = 1/2, & \eta = 0; & \xi = 1/2, & \eta = 1/2 \end{cases} \quad (36)$$

где запятая и точка с запятой означают логические «и» и «или» соответственно – с приоритетом ‘^’ над ‘v’.

Верхняя строка совокупности (36) определяет на рис. 1 квадратики зеленого цвета без внешних границ, нижняя – указанные четыре точки ярко-зеленого цвета, расположенные в вершинах центрального квадратики. Целочисленные переменные k и l нумеруют квадратики, расположенные вдоль горизонтальной и вертикальной оси плоскости (ξ, η) , соответственно. Отрезку ярко-зеленого цвета $0 \leq p < 1$ при $G = 0$ (в виде стрелки, включающей начальную точку и исключающей конечную) соответствует классическая формулировка теоремы [1]. В ней утверждается, согласно принятому нами обозначению $f = pF/2$, что сигнал (5), спектр которого расположен в полосе частот $0 \leq f < F/2$, восстанавливается по отсчетам, полученным с частотой дискретизации F посредством интерполяционной формулы (3) с индексом частотной полосы $G = 0$. Видно, что и при других целых значениях G , полосы частот, где справедлива теорема, также представлены диагоналями зеленых квадратики, параллельными диагональной оси частот p : $GF/2 < f < (G+1)F/2$.

Диапазон частот $F_{low} < |f| < F_{up}$, где справедлива теорема, в общем случае вещественного G , как

установлено в [6] и будет подтверждено позже (см. (44) в разд. VI), определяется по формулам

$$\begin{cases} F_{low} = ([|G+1/2|] - |\{G\}-1/2|+1/2)F/2 \\ F_{up} = ([|G+1/2|] + |\{G\}-1/2|+1/2)F/2 \end{cases} \quad (37)$$

Диапазон максимален при целых G : $F_{up}-F_{low}=F/2$, и вырождается при полуцелых: $F_{up}-F_{low}=0$.

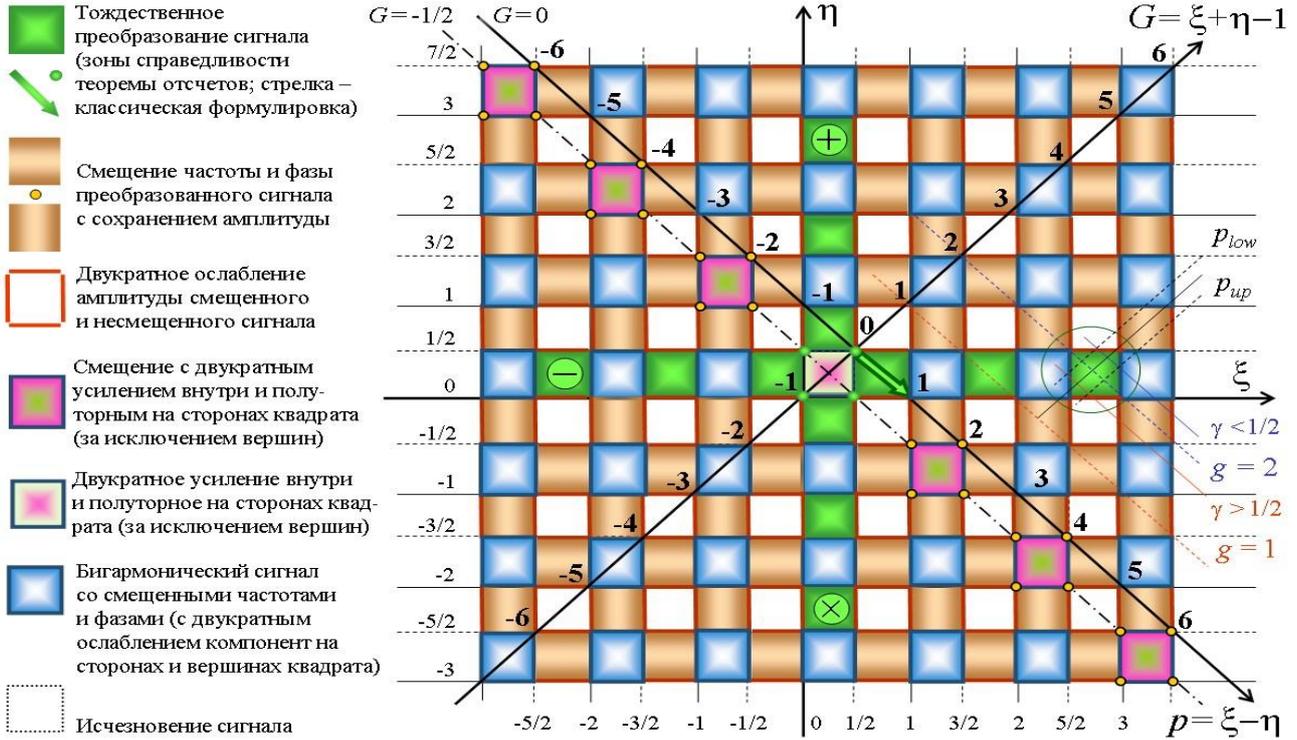


Рис. 1. Геометрическое представление результатов преобразования инфинитного гармонического сигнала интерполяционной формулой теоремы отсчетов во временной области

V. Двукратное и полуторное усиление и двукратное ослабление сигнала

Преобразованный сигнал (34) может иметь ту же частоту f и фазу φ , что исходный (1), но отличную от a амплитуду в соответствии с названными в заголовке данного пункта явлениями нарушения теоремы:

$$\begin{cases} ([\xi] = 0 \wedge a_\xi = a/2 \wedge a_\eta = 0) \vee ([\eta] = 0 \wedge a_\eta = a/2 \wedge a_\xi = 0) \\ [\xi] = [\eta] = 0 \\ (a_\xi = a/2 \wedge a_\eta = a) \vee (a_\xi = a \wedge a_\eta = a/2) \vee (a_\xi = a \wedge a_\eta = a) \end{cases} \quad (38)$$

Первая строка совокупности (38) определяет условия двукратного ослабления сигнала: амплитуда одной из компонент равна $a/2$ (при отсутствии смещения частоты и фазы), другой компоненты – нулю (безразлично при каком смещении).

Система из двух следующих строк допускает существование обеих компонент с амплитудами a и / или $a/2$, но при отсутствии смещения частот и фаз у обеих компонент. Равенство амплитуд a_ξ и a_η нулю или a мы анализировали в предыдущем пункте. Равенства же $a_\xi = a/2$, $a_\eta = a/2$ имеют место при $\text{sgn}\{2\xi\} = 0$, $\text{sgn}\{2\eta\} = 0$ – когда ξ , η – целые или полуцелые числа.

Формулировка этих условий на языке неравенств, их эквивалентные преобразования (детали которых опускаем), приводят (38) к следующей совокупности соотношений относительно ξ и η :

$$\begin{cases} (\xi = 0 \vee \xi = 1/2) \wedge (0 < \eta < 1/2 \vee l - 1/2 < \eta < l) \\ (\eta = 0 \vee \eta = 1/2) \wedge (0 < \xi < 1/2 \vee k - 1/2 < \xi < k) \\ 0 < \xi < 1/2 \wedge 0 < \eta < 1/2 \end{cases} \quad (39)$$

Первая строка (39) описывает на рис. 1 два вертикальных отрезка длиной $1/2$ (с исключенными концами) синего цвета, где происходит полуторное усиление сигнала, а также серию эквидистантных (пронумерованных целым числом $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) таких же отрезков красного цвета, где происходит двукратное ослабление сигнала. Если в только что сделанном описании поменять местами символы ξ и η , а также символы l и k , то точно такие же отрезки, но только горизонтальные, иллюстрирует на рис. 1 вторая строка (39). Наконец, в третьей строке дается описание центрального квадрата, внутри которого происходит двукратное усиление сигнала.

С. Смещение сигнала по частоте и фазе

Преобразованный сигнал смещен по частоте и фазе по сравнению с исходным при следующих условиях:

$$\begin{cases} [\xi] \neq 0 \wedge ([2\xi] \bmod 2 = 0 \vee \{2\xi\} = 0) \wedge ([2\eta] \bmod 2 = 1 \wedge \{2\eta\} \neq 0) \\ [\eta] \neq 0 \wedge ([2\eta] \bmod 2 = 0 \vee \{2\eta\} = 0) \wedge ([2\xi] \bmod 2 = 1 \wedge \{2\xi\} \neq 0) \\ ([2\xi] \bmod 2 = 0 \vee \{2\xi\} = 0) \wedge ([2\eta] \bmod 2 = 0 \vee \{2\eta\} = 0) \wedge ([\xi] = -[\eta] \neq 0) \end{cases} \quad (40)$$

Первая и вторая строка в совокупности (40) говорят о том, что сигнал однокомпонентный – состоит либо из ξ -компоненты ($[\xi] \neq 0, a_\xi \neq 0, a_\eta = 0$), либо из η -компоненты ($[\eta] \neq 0, a_\eta \neq 0, a_\xi = 0$). Третья строка допускает наличие двух компонент, но при условии, что обе смещены на одинаковую ненулевую частоту и фазу ($a_\xi \neq 0, a_\eta \neq 0, [\xi] = -[\eta] \neq 0$). Смещение может сопровождаться явлениями усиления и ослабления сигнала, описанными в предыдущем пункте.

Записав операции взятия целых и дробных частей в (40) на языке неравенств, и произведя над ними эквивалентные преобразования (детали которых опускаем), приходим к системе неравенств с не зависящими друг от друга целыми числами k и l :

$$\begin{cases} k \leq \xi \leq k + 1/2 \wedge l - 1/2 < \eta < l \\ k \leq \eta \leq k + 1/2 \wedge l - 1/2 < \xi < l \\ k \leq \xi \leq k + 1/2 \wedge -k \leq \eta \leq -k + 1/2 \\ k = \pm 1, \pm 2, \dots; \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (41)$$

Чистое смещение (с сохранением амплитуды a – при строгом для k и l неравенстве ‘<’ в (41) вместо нестрогого ‘ \leq ’) изображено на рис. 1 квадратиками желто-коричневого цвета; смещение с двукратным ослаблением представлено сторонами этих квадратиков красного цвета. Двукратное усиление имеет место внутри квадратиков розового цвета, расположенных на диагонали вдоль оси p , полуторное – на их сторонах синего цвета, в то время как на вершинах квадратиков – в изолированных точках желтого цвета – амплитуда не искажена.

Д. Наложение разночастотных компонент сигнала

Условия $a_\xi \neq 0$ и $a_\eta \neq 0$ при $[\xi] \neq -[\eta]$ означают, что преобразованный сигнал (34) состоит из двух разночастотных компонент. Такое расщепление исходного сигнала (3), как показано в [8], создает на краях диапазона частот $[G]F/2 < f < [G+1]F/2$ с нецелым индексом $G > 0$ хорошо известный в литературе эффект наложения частот (полное описание этого явления для всех значений G и f представлено системой соотношений (45)). Сформулированные же здесь условия наложения на языке неравенств выглядят так: $k \leq \xi \leq k + 1/2, \quad l \leq \eta \leq l + 1/2, \quad k \neq -l$, где $k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Зоны наложения на рис. 1 представлены квадратиками синего цвета с амплитудами компонент $a_\xi = a_\eta = a$ внутри, $a_\xi = 2a_\eta = a$ и $a_\eta = 2a_\xi = a$ на горизонтальных и вертикальных сторонах соответственно, $a_\xi = a_\eta = a/2$ – в вершинах.

Е. Полное исчезновение сигнала

Это парадоксальное явление, впервые описанное в литературе автором [8], очевидно из формулы (34): $a_\xi = a_\eta = 0$. Сводится это двойное равенство (как показано

выше для случаев обнуления амплитуды) к системе неравенств $k - 1/2 < \xi < k, \quad l - 1/2 < \eta < l$, где k и l – не зависящие друг от друга произвольные целые числа. Каждая пара (k, l) определяет на рис. 1 квадратик белого цвета с исключенными сторонами и вершинами.

VI. СРАВНЕНИЕ С ТЕОРЕМОЙ ОТСЧЕТОВ ДЛЯ ФИНИТНОГО ВО ВРЕМЕНИ СИГНАЛА

И с математической, и с физической точки зрения настоящую теорему можно рассматривать как частный случай теоремы отсчетов во временной области для финитного сигнала – при устремлении его длительности T к бесконечности при постоянстве ширины F его спектральной функции. В формулировке для конечного числа отсчетов $N = FT$, преобразуемых по формуле

$$s'(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin \pi(G+1)F(t-t_n) - \sin \pi GF(t-t_n)}{N \sin \pi F(t-t_n)/N}, \quad (42)$$

она была доказана в работах автора [6]-[8]. Следует отметить, что разработанный там метод вычисления конечной суммы (42) радикально отличается от суммирования бесконечного ряда (3) по готовым формулам (12). Для конечного числа отсчетов принципиально невозможно вывести явную двучленную аналитическую формулу типа (34), а можно лишь (для рациональных значений p и G) представить $s'(t)$ как разложение в бесконечный ряд гармоник – смещенных по частоте и фазе копий исходного сигнала (1), не более чем две из которых имеют ненулевую амплитуду. Условия справедливости и нарушений теоремы описываются в форме неравенств, куда входит неопределенный целочисленный параметр l – номер ветви преобразованного сигнала. Только теперь стало ясно, что фигурирующие в этих неравенствах номера ветвей (см. (43), (45), (46)) есть не что иное, как $l = l' = [\xi], \quad l'' = -[\eta]$ в подкосинусных выражениях формулы (34). Без этой явной формулы, разумеется, не может быть речи о канонических переменных ξ и η , представляющих результат преобразования сигнала в виде «шахматной доски» на рис. 1, расцветка клеток которой показывает удивительную симметрию и равноправие параметров p и G – текущей частоты сигнала и диапазона частот, где эта частота находится.

Основной результат финитной версии теоремы – неравенство, связывающее между собой p и G при явлении существования l -й ветви сигнала в чистом виде (без наложения на нее другой компоненты):

$$\begin{cases} s'(t) = a \cos(2\pi(f - IF)t + \varphi + 2\pi IFt_0) \\ \left\| \left| f/F - l \right| - \left(\left\| G + 1/2 \right\| + 1/2 \right) / 2 < \left(\left\| G \right\| - 1/2 \right) + 1/N \right) / 2 \end{cases} \quad (43)$$

Полагая $l = 0$, получаем при $N \rightarrow \infty$ соотношение

$$\left\| \left| p \right| - \left\| \left\| G + 1/2 \right\| - 1/2 \right\| - \left\| \left\| G \right\| - 1/2 \right\| < 0, \quad (44)$$

определяющее границы применимости нашей теоремы – анонсированные формулами (37) и оформленные в первой строке (36) как совокупность неравенств, описывающих квадратика зеленого цвета на рис. 1.

Примечательно, что весьма нетривиальный аналитический результат (44) можно вывести из геометрических построений на рис. 1, и, тем самым, осуществить

взаимную верификацию обеих версий теоремы. Для этого достаточно рассмотреть обведенный окружностью квадратик зеленого цвета, пронизанный двумя параллельными его диагоналями линиями уровня $G=g+\gamma$, где $g=[G]$ – целая часть индекса полосы, $\gamma=\{G\}$ – его дробная часть. Линии эти представляют два характерных случая по γ : $\gamma < 1/2$ ($g=2$, синий цвет), $\gamma > 1/2$ ($g=1$, красный цвет). Теорема справедлива внутри квадратика на двух параллельных отрезках $p_{low} < p < p_{up}$, границы которых $p_{low}=2F_{low}/F$ и $p_{up}=2F_{up}/F$ являются точками пересечения указанных линий уровня с линиями $\eta=1/2$, $\xi=k$ (где $k=3$) и $\xi=k-1/2$, $\eta=0$, соответственно. Из подобия прямоугольных равнобедренных треугольников по обе стороны от диагонали квадратика (на линии $G=2$) и получаем неравенство (44), но без модульных скобок в левой его части. Скобки эти устанавливаются путем анализа соотношений симметрии данного квадратика с квадратиками, отмеченными знаками '+', '-', 'x'. Симметрия эта обусловлена инвариантностью преобразований (3) и (42) относительно замены $G+1/2$ на $-G-1/2$.

Только что показанный геометрический способ вряд ли применим для верификации полученных в [8] путем подробного анализа неравенств, описывающих условие наложения двух ветвей

$$\begin{cases} s'(t) = a \cos(2\pi(f - I'F)t + \varphi + 2\pi I'Ft_0) + \\ + a \cos(2\pi(f - I''F)t + \varphi + 2\pi I''Ft_0) \\ |f/F - (I' + I'')/2| < (1/2 - |\{G\} - 1/2| + 1/N)/2 \\ |I' - I''| = |[G] + 1| \end{cases} \quad (45)$$

и условие $s'(t) = 0$ полного исчезновения сигнала

$$|f/F - I - 1/2| - |[G] + 1|/2 < (1/2 - |\{G\} - 1/2| + 1/N)/2. \quad (46)$$

Зато переход к каноническим переменным (7) при $N \rightarrow \infty$ представляет систему из второго и третьего соотношений (45) в изящной форме:

$$\begin{cases} |\{\xi\} - \{\eta\}| + |\{\xi + \eta\} - 1/2| < 1/2 \\ |[\xi] + [\eta]| = |[\xi + \eta]| \end{cases} \quad (47)$$

Оказывается, неравенство в первой строке (47) окрашивает плоскость (ξ, η) в «шахматную доску» с полями $1/2 \times 1/2$ (без граничных точек) – черными, где оно верно, и белыми, где оно ложно. Равенство во второй строке перекрашивает половину этих полей в белый цвет (где оно несовместимо с неравенством). Итоговая картина представлена на рис. 1, где роль оставшихся черных полей играют квадратика синего цвета (зоны наложения двух разночастотных гармоник с $a_\xi = a_\eta = a$) и зоны «автоналожения» – квадратика розового цвета (удвоение амплитуды со смещением частоты и фазы) и центральный квадратик (двукратное усиление сигнала).

Из рис. 1 видно, что зоны исчезновения сигнала расположены в таком же шахматном порядке, что и зоны наложения частот, но смещены по отношению к последним на $1/2$ по ξ и на $1/2$ по η . Интересно, что смещение это обеспечивается всего лишь отрицанием равенства во второй строке (47): $|[\xi] + [\eta]| \neq |[\xi + \eta]|$.

На рис. 2 показаны результаты преобразования конечного гармонического сигнала (42) в виде дискретных точек плоскости (p, G) , расцветка которых отражает все вычислимые явления: справедливость теоремы (44), смещение сигнала (43), наложение и автоналожение частот (45), исчезновение сигнала (46). Картина получена компьютерным моделированием указанных формул, и, по-существу, верифицирует инфинитивную версию теоремы, проиллюстрированную на рис. 1.

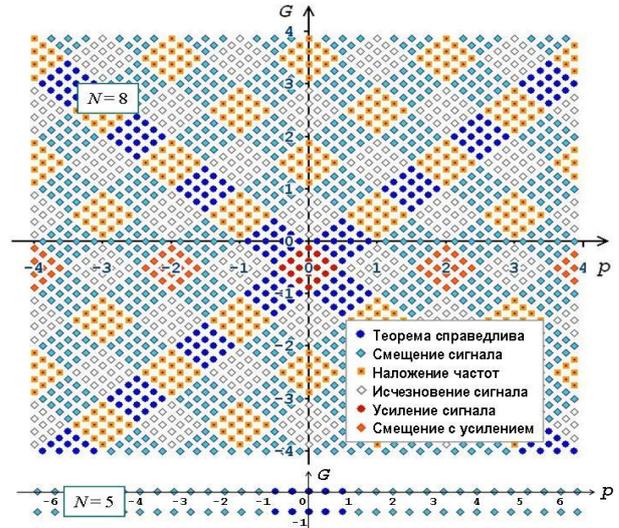


Рис. 2. Геометрическое представление результатов преобразования конечного гармонического сигнала

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована и доказана теорема отсчетов во временной области для процесса бесконечной длительности, протекающего в ограниченной полосе частот с произвольным индексом G .

Зоны проанализированных в разд. V явлений справедливости и нарушения теоремы заполняют всю плоскость параметров (p, G) , поворот осей которой на 45° представляет эти же результаты на плоскости канонических переменных (ξ, η) в «шахматном» порядке – с большей наглядностью, как их аналитических выражений, так и геометрических местоположений.

Проведено сравнение результатов преобразования сигналов бесконечной и конечной длительности, показавшее, что обе версии теоремы – инфинитивная и конечная – являются частными случаями друг друга.

Представление безразмерной частоты сигнала и индекса диапазона ее изменения в виде равноправных канонических переменных расширяет теоретическую значимость теоремы отсчетов за рамки ее приложений по передаче и приему информации, сжатию данных, интерполяции функций и т.д., и делает возможным формулировку фундаментальных физических принципов на языке соотношений фурье-анализа.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и волоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития

- слаботочной промышленности. М.: Всесоюз. энергетич. комитет, 1933.
- [2] Linden D.A., "A discussion of sampling theorems," Proc. IRE, vol. 47, July 1959, pp. 1219-1226.
- [3] Jianhua Liu, Xiyuan Zhou, and Yingning Peng, "Spectral arrangement and other topics in first-order bandpass sampling theory," in IEEE Trans. Signal Process., vol. 49, no. 6, June 2001, pp. 1260-1263.
- [4] Петров В.В., Усков А.С. Информационная теория синтеза оптимальных систем контроля и управления (непрерывные системы). М.: Энергия, 1975. 232 с.
- [5] Jerri A.J., "The Shannon sampling theorem – its various extensions and applications: a tutorial review," Proc. IEEE, vol. 65, no. 11, November 1977, pp. 1565-1596.
- [6] Ханян Г.С. Обобщение теоремы отсчетов на случай нецелого индекса полосы частот // Международная научно-техническая

- конференция к 100-летию со дня рождения В.А. Котельникова: Москва, 21–23 октября 2008: Тез. докл. М.: Изд. дом МЭИ, 2008. С. 35-37.
- [7] Ханян Г.С. Теорема отсчетов для сигнала конечной длительности с необязательно нулевым индексом частотной полосы // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 2 (139). С. 20-25.
- [8] Ханян Г.С. Особенности преобразования гармонического сигнала ограниченной длительности по теореме отсчетов // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2016. Сб. трудов / под общ. ред. академика РАН А.Л. Стемповского. М.: ИПИМ РАН, 2016. Часть I. С. 210-217. URL: <http://www.mes-conference.ru/data/year2016/pdf/D041.pdf>.
- [9] Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Sampling Theorem in Time Domain for Infinite Duration Signal: Analytical Expression and Geometric Illustration

G.S. Khanyan

Central Institute of Aviation Motors, Moscow, khanyan@rtc.ciam.ru

Abstract — The work is devoted to proving the time domain sampling theorem for an infinite duration process occurring in a limited frequency band. The kernel of interpolation transform of a process' elementary component – the harmonic signal of amplitude a , frequency f , and initial phase Φ – contains the sampling frequency F and a dimensionless parameter G – the frequency band index which determines, along with dimensionless frequency $p = 2\pi f/F$, the conversion result: a biharmonic signal, both component amplitudes of which take one of the values $a, a/2, 0$. This gives a rise to the following mutually exclusive spectral phenomena (effects): validity of the theorem in a frequency band the lower cut-off frequency of which is not inferior to $[G]F/2$ and the upper one does not exceed $[G+1]F/2$; frequency overlay; double attenuation and doubling or one-and-a-half-times signal amplification with or without the frequency and phase offset; complete signal disappearance. A geometric illustration of these phenomena shows that their zones (the set of points on (p,G) plane where a phenomenon takes place), each painted with its own color, consist of squares of unity-length diagonal or their sides and vertices covering the entire plane. When rotating the p and G axes of this plane by $\pi/4$ by introducing variables $Ksi = (G+p+1)/2$, $Eta = (G-p+1)/2$, called canonical, squares of size $1/2 \times 1/2$ are oriented along the coordinate axes, covering the plane (Ksi, Eta) in a "staggered" order so that the white fields are zones where the signal is purely harmonic, the black ones where it is biharmonic or disappears. A comparative analysis of both infinite and finite duration signals transform has shown that both theorem versions – infinite and finite – are special cases of each other. The representation of signal frequency and its variation range index in a form of peer canonical variables, by analogy with the equal status of generalized coordinates and momenta in the Hamilton function of a mechanical system, extends the theoretical significance of sampling theorem beyond its scope of applications for transmission of information, data compression, interpolation, etc., and makes it possible to formulate fundamental physical principles in the language of Fourier analysis statements.

Keywords — harmonic signal, frequency band index, canonical variables, summation of series.

REFERENCES

- [1] Kotelnikov V.A., "O propusknoy sposobnosti «efira» i provoloki v elektrosvyazi (On the transmission capacity of 'ether' and wire in electro-communications)," First all-union conf. on questions of commun., January 14, 1933 (in Russian).
- [2] Linden D.A., "A discussion of sampling theorems," Proc. IRE, vol. 47, July 1959, pp. 1219-1226.
- [3] Jianhua Liu, Xiyuan Zhou, and Yingning Peng, "Spectral arrangement and other topics in first-order bandpass sampling theory," in IEEE Trans. Signal Process., vol. 49, no. 6, June 2001, pp. 1260-1263.
- [4] Petrov V.V., Uskov A.S., Informatsionnaya teoriya sinteza optimal'nykh sistem kontrolya i upravleniya: nepreryvnyye sistemy (Information theory of synthesis of optimal control and management systems: continuous systems), Moscow: "Energia", 1975, 232 p. (In Russian).
- [5] Jerri A.J., "The Shannon sampling theorem – its various extensions and applications: a tutorial review," Proc. IEEE, vol. 65, no. 11, November 1977, pp. 1565-1596.
- [6] Khanyan G.S., "Obobshcheniye teoremy otschetov na sluchay netselogo indeksa polusy chastot (Generalization of sampling theorem to the case of non-integer index of the band)," International scientific conference on the 100th anniversary of V.A. Kotelnikov: Moscow, 21–23 October 2008, Abstracts, Publishing house of MPEI, Moscow, 2008, pp. 35-37 (in Russian).
- [7] Khanyan G.S. "Teorema otschetov dlya signala konechnoy dlitel'nosti s neobyazatel'no nulevym indeksom chastotnoy polusy (Sampling theorem for finite duration signal with a non-obligatory zero index of the frequency band)," Izvestiya Yuzhn. Feder. Universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2013, no. 2 (139), pp. 20-25 (in Russian).
- [8] Khanyan G.S. "Features of limited duration harmonic signal transform by sampling theorem," Problems of advanced micro- and nanoelectronic systems development, 2017, Part I, Moscow, IPPM RAS. Pp. 54-60 (translated from Russian).
- [9] Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. Integraly i ryady. Elementarnyye funktsii (Integrals and series. Elementary functions). Moscow: Nauka, 1981. 800 p. (In Russian).