

# Восстановление аналитического сигнала, искаженного алиасингом первого порядка

В.А. Лесников<sup>1</sup>, Т.В. Наумович<sup>2</sup>, А.В. Частиков<sup>3</sup>

Вятский государственный университет, г. Киров

<sup>1</sup>Vladislav.Lesnikov.Ru@IEEE.org, <sup>2</sup>NTV\_new@mail.ru, <sup>3</sup>AlChast@mail.ru

**Аннотация** — Субнайквистовая дискретизация – один из подходов, применяемых в цифровой обработке сигналов. Однако наложение спектров (алиасинг) при несоблюдении требований к частоте дискретизации, определяемых теоремой отсчетов (теоремой Котельникова) приводит к искажению сигналов. Для компенсации последствий алиасинга в данной работе применяется подход на основе многоканальной обработки входного сигнала, причем частоты дискретизации в каждом из каналов различаются и меньше, чем того требует теорема отсчетов. В данной работе рассматривается обработка комплексного аналитического сигнала. Рассмотрение ограничено двухканальным случаем.

**Ключевые слова** — субнайквистовая дискретизация, алиасинг первого порядка, восстановление искаженного алиасингом сигнала, аналитический сигнал, двухканальная двухчастотная дискретизация.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов в широком диапазоне частот является актуальной проблемой в развитии современных радиоэлектронных систем. В соответствии с теоремой отсчетов частота дискретизации должна превосходить удвоенную максимальную частоту обрабатываемого сигнала с финитным спектром [1]. Это создает серьезные ограничения для реализации обработки широкополосного сигнала в режиме реального времени. Полосовая дискретизация расширяет горизонты цифровой обработки сигналов. В этом случае частота дискретизации определяется шириной полосы обрабатываемого сигнала [2].

Дополнительные возможности для усложнения алгоритмов и/или продвижения цифровой обработки сигналов в более высокочастотные области открываются с помощью субнайквистовской дискретизации [3]. В этом случае частота дискретизации значительно ниже, чем дискретизация по Найквисту.

Среди стратегий субнайквистовской дискретизации, в последние годы интенсивно развиваются методы сжатой дискретизации (compressed sampling). Они

основаны на том факте, что теорема отсчетов Найквиста-Шеннона создает достаточные условия для восстановления дискретизированных процессов с финитным спектром, в то время как при определенных условиях они не являются необходимыми [4].

Многие разновидности сжатой дискретизации основаны на случайной дискретизации. Подход, описанный в данной работе, основан на детерминированной эквидистантной дискретизации.

В этой работе мы рассматриваем только дискретизацию аналитических сигналов. Аналитическим сигналом называется комплексный сигнал

$$x(t) = \hat{x}(t) + j\mathcal{H}(\hat{x}(t)), \quad (1)$$

где  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}$  - действительный сигнал,  $j$  - мнимая единица ( $j^2 = -1$ ),

$$\mathcal{H}(\hat{x}(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (2)$$

- преобразование Гильберта от  $\hat{x}(t)$ . Важным свойством аналитического сигнала является то, что на отрицательных частотах его спектр равен нулю.

Спектр аналоговых сигналов является аperiodическим. Эквидистантная дискретизация делает спектр периодическим, а период равен частоте дискретизации [5]. Периодически повторяющиеся части спектра называются алиасами. При дискретизации по Найквисту (частота дискретизации  $f_s = \Delta f$ , где  $\Delta f$  - ширина полосы обрабатываемого сигнала) и передискретизации (oversampling,  $f_s > \Delta f$ ) алиасы не пересекаются. Перекрытие алиасов при субнайквистовской дискретизации (undersampling,  $f_s < \Delta f$ ), называется алиасингом. Если существуют частоты, на которых перекрываются  $N+1$  алиасов, то имеет место алиасинг  $N$ -го порядка [1]. В этой работе мы рассматриваем только алиасинг первого порядка (рис. 1).

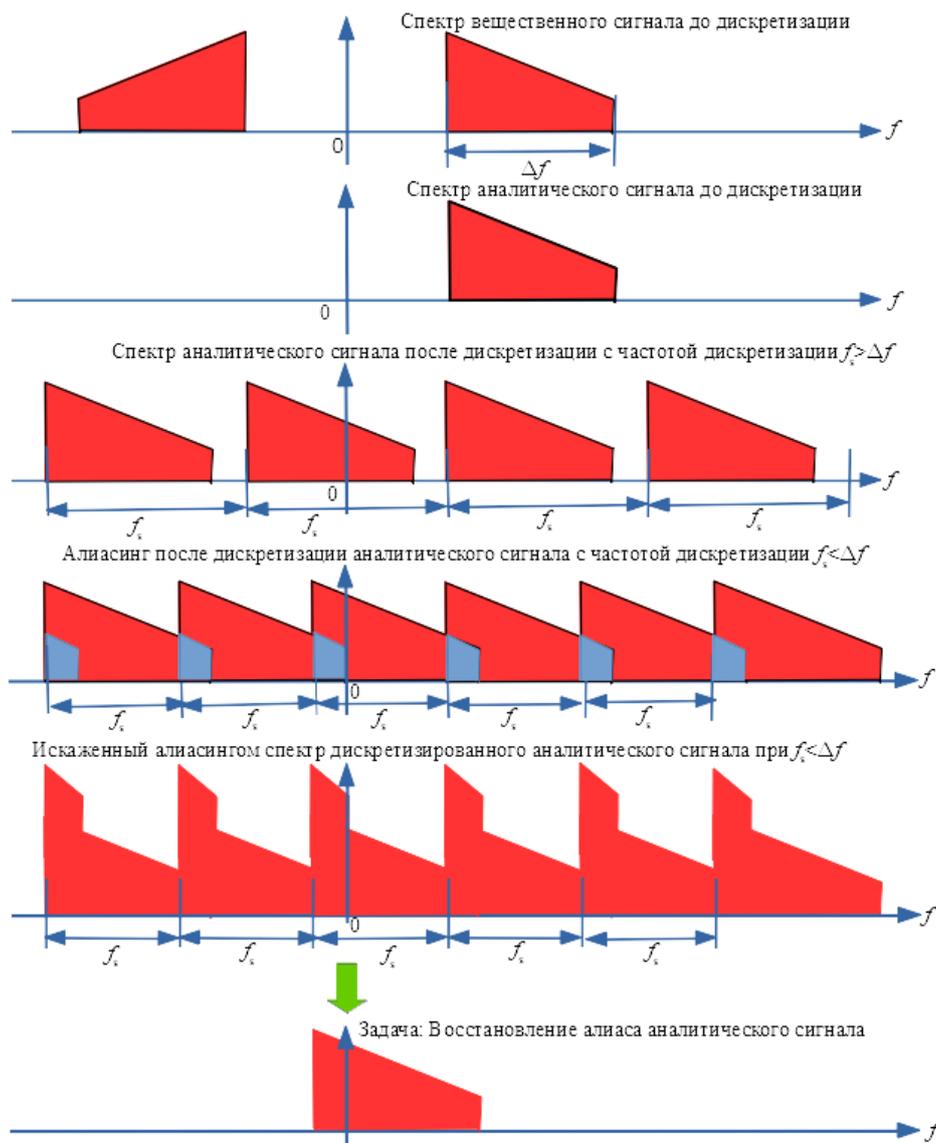


Рис. 1. Преобразование спектра аналитического сигнала при субнайквистовской дискретизации)

Алиасинг приводит к искажению сигнала из-за наложения спектра (рис. 1). В данной работе рассматривается задача восстановления аналитического сигнала, спектр которого искажен алиасингом первого порядка. При этом достаточно восстановить алиас, расположенный на частотах, близких к нулевой.

Алгоритмы восстановления сигналов, искаженных алиасингом начали разрабатываться достаточно давно. Например, известна публикация [6], в которой анализируется множество пробных периодов периодического сигнала с неизвестным периодом и выбирается наиболее удовлетворительный результат восстановления. В [7] алгоритмы восстановления используют дробное преобразование Фурье и линейное каноническое преобразование.

В нескольких публикациях предлагаются алгоритмы, основанные на обработке в  $N$  каналах, которые позволяют снизить частоту дискретизации в

каждом канале в  $N$  раз по сравнению с частотой Найквиста. В [8] и [9] описаны алгоритмы, основанные на дискретизации сигнала и его производных в каналах с одинаковой частотой дискретизации. В [10] в каналах осуществляются различные фазовые сдвиги сигнала, чтобы компенсировать алиасинг. В [11] осуществляется модуляция сигналов в каналах. А. Папулис [12] предлагает обобщенную схему дискретизации сигнала с конечным спектром, в которой в каждом из  $N$  каналов перед дискретизацией сигнал обрабатывается различными линейными системами, а частота дискретизации в каждом канале в  $N$  раз меньше, чем частота Найквиста  $f_{Nyquist}$ . Рис. 2 обобщает подходы, описанные в этом абзаце. Обработка сигнала в каждом из  $N$  каналов описывается оператором  $G_i$ . Преобразованные непрерывные сигналы проходят аналого-цифровое преобразование ADC с одинаковой частотой дискретизации  $f_s = f_{Nyquist} / N$ .

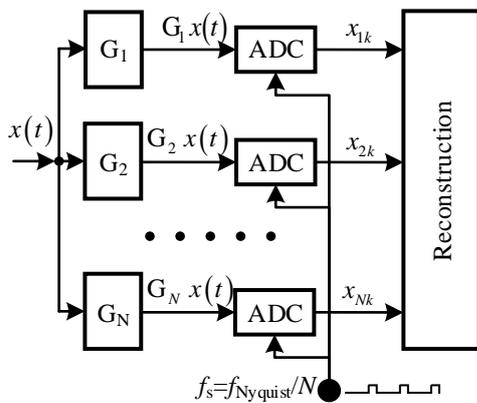


Рис. 2. Обобщенная схема многоканальной дискретизации

В данной работе исследуется многоканальная обработка, в которой операторы  $G_i$ ,  $x(t) = x(t)$  являются тождественными операторами (identity operator), а аналого-цифровые преобразователи ADC работают с разными частотами дискретизации, каждая из которых является субнайквистовской (рис. 3). Такую дискретизацию будем называть многоканальной многочастотной (multichannel multirate sampling).

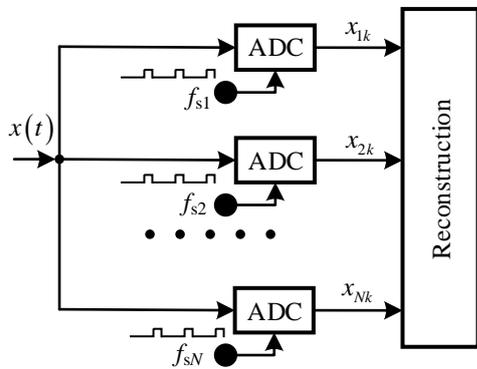


Рис. 3. Обобщенная схема многоканальной многочастотной дискретизации

Очевидно, что при этом снимается проблема точности аналоговых схем, реализующих линейные операторы.

В наших работах [13] - [15] эта задача решалась для вещественных сигналов соответственно для алиасинга первого и второго порядка. Данная работа развивает решения, представленные в [16].

Поскольку в данной работе рассматривается алиасинг первого порядка, то реализуется двухканальная двухчастотная дискретизация.

## II. ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ АЛИАСИНГА РАЗНОГО ПОРЯДКА

Как уже отмечалось выше, спектр дискретизированного аналитического сигнала формируется периодической последовательностью алиасов. Период последовательности алиасов равен частоте дискретизации. Ширину алиаса будем обозначать  $\Delta f$ , где

$$\Delta f = F_R - F_L, \quad (3)$$

$F_R$  и  $F_L$  - соответственно правая и левая границы алиаса. Очевидно, что условие отсутствия алиасинга имеет вид

$$f_{s[0]\min} = \Delta f \leq f_s, \quad (4)$$

где  $f_{s[0]}$  - частота дискретизации, при которой отсутствует алиасинг.

Конкретное положение алиасингов на оси частот, очевидно, определяется значениями  $F_L$  и  $\Delta f$ . На рис. 4 (и на следующем рисунке) алиасы, соответствующие спектру дискретизируемого аналитического сигнала, изображены красным прямоугольником. Алиасы, расположенные вблизи нулевой частоты, изображены зеленым прямоугольником. Остальные алиасы имеют светло-синий цвет.

Легко показать, что условием существования алиасинга первого порядка для аналитического сигнала с финитным спектром имеет вид (рис.4).

$$f_{s[1]\min} = \frac{\Delta f}{2} \leq f_s < f_{s[1]\max} = f_{s[0]\min} = \Delta f. \quad (5)$$

Рис. 4 иллюстрирует также ситуацию алиасинга второго порядка, условие существования которого формулируется следующим образом:

$$f_{s[2]\min} = \frac{\Delta f}{3} \leq f_s < f_{s[2]\max} = f_{s[1]\min} = \frac{\Delta f}{2}. \quad (6)$$

Очевидно, что условие существования алиасинга  $N$ -го порядка может быть сформулировано как

$$f_{s[N+1]\max} = f_{s[N]\min} = \frac{\Delta f}{N+1} \leq f_s < f_{s[N]\max} = f_{s[N-1]\min} = \frac{\Delta f}{N}. \quad (7)$$

## III. ДЕКОМПОЗИЦИЯ СПЕКТРА СИГНАЛА, ИСКАЖЕННОГО АЛИАСИНГОМ

Для решения проблемы восстановления искаженного спектра воспользуемся методикой, предложенной нами в [15]. Алиас разобьем на поддиапазоны одинакового размера  $\delta f$ .

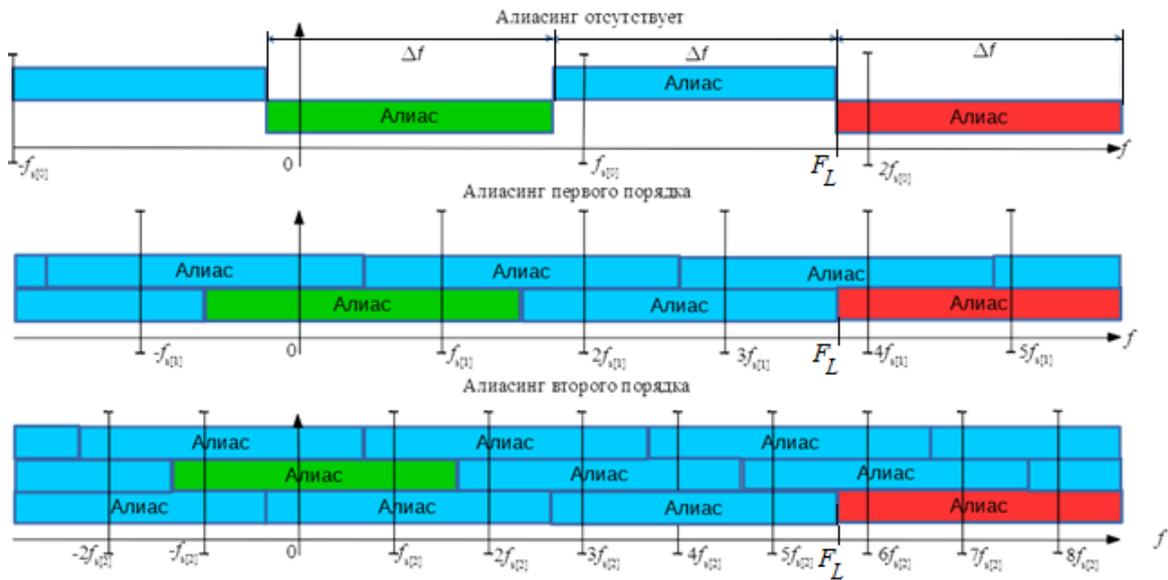


Рис. 4. Границы существования алиасинга различного порядка

Далее выберем частоты дискретизации в двух каналах  $f_{s0}$  и  $f_{s1}$ , удовлетворяющие условию (5). Интервалы Найквиста в обоих каналах тоже разбиваются на поддиапазоны размером  $\delta f$  таким образом, чтобы границы поддиапазонов в разных каналах совпадали. Поэтому можно записать следующие уравнения

$$\begin{cases} \Delta F = n_s \delta f, \\ f_{s0} = n_0 \delta f, \\ f_{s1} = n_1 \delta f, \\ 0.5n_s \leq n_1 < n_0 < n_s, \end{cases} \quad (8)$$

где  $n_s$ ,  $n_0$  и  $n_1$  – целые числа.

Минимальными значениями  $n_s$ ,  $n_0$  и  $n_1$ , удовлетворяющими этой системе уравнений являются

$$\begin{cases} n_s = 4, \\ n_1 = 2, \\ n_0 = 3. \end{cases} \quad (9)$$

Рис. 5 иллюстрирует процесс двухканальной двухчастотной дискретизации при рассчитанных параметрах.

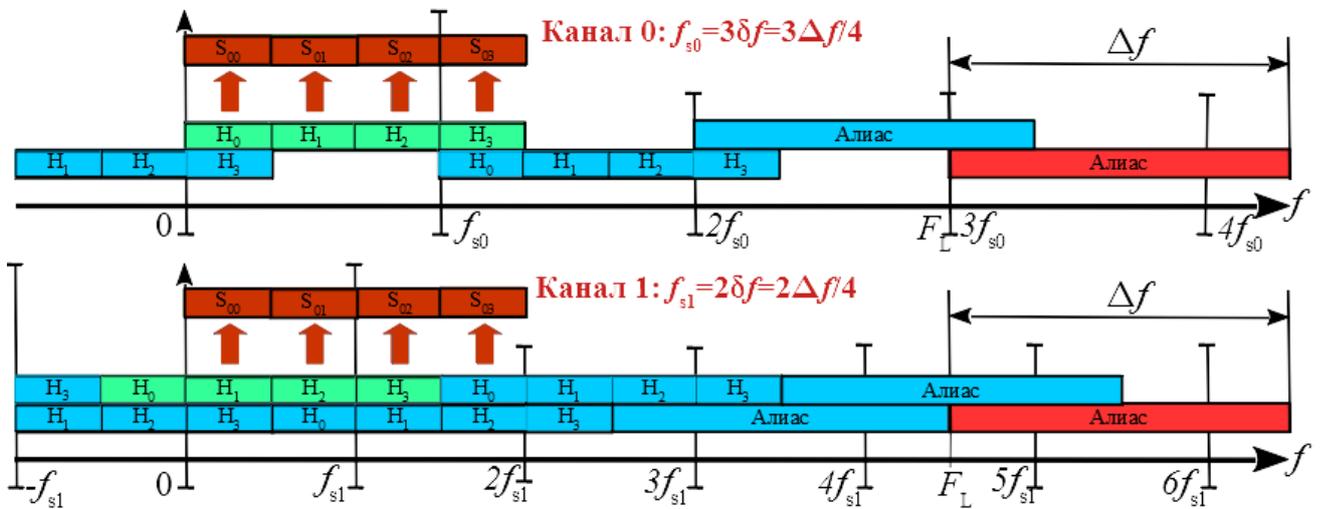


Рис. 5. Двухканальная двухчастотная дискретизация при  $n_s = 4$ ,  $n_0 = 3$ ,  $n_1 = 2$ ,  $F_L = 9\delta f$

#### IV. ВОССТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРА СИГНАЛА

Спектры сигналов в результате двухканальной двухчастотной дискретизации с указанными параметрами описывается следующими уравнениями.

Канал 0:

$$\begin{cases} S_{00} = H_0 + H_3, \\ S_{01} = H_1, \\ S_{02} = H_2, \\ S_{03} = H_3 + H_0. \end{cases} \quad (10)$$

Канал 1:

$$\begin{cases} S_{10} = H_1 + H_3, \\ S_{11} = H_2 + H_0, \\ S_{12} = H_3 + H_1, \\ S_{13} = H_0 + H_2. \end{cases} \quad (11)$$

В системах уравнений (10) и (11)  $S_{ij}$  – значения спектра в соответствующих поддиапазонах после субнаиквистовской дискретизации, искаженные алиасингом. Эти величины доступны для измерения, т. е. известны. Величины же  $H_i$  – искомые значения спектра в соответствующих поддиапазонах неискаженного алиаса. Т. е. приведенные выше системы уравнений необходимо решать относительно

$H_i$ . Эти уравнения решаются чрезвычайно просто.

Решение имеет вид

$$\begin{cases} H_0 = S_{11} - S_{02} = S_{13} - S_{02}, \\ H_1 = S_{01}, \\ H_2 = S_{02}, \\ H_3 = S_{10} - S_{01} = S_{12} - S_{01}. \end{cases} \quad (12)$$

Спектр неискаженного алиаса представляет собой конкатенацию

$$H = H_0 \parallel H_1 \parallel H_2 \parallel H_3. \quad (13)$$

Является ли выбор параметров, описываемый системой уравнений (9), единственно целесообразным? Ответ на этот вопрос пока не получен. Выбор минимального числа поддиапазонов не означает минимизацию общего числа измерений и вычислений. Увеличение  $ps$ , в частности, позволяет достичь более значительного уменьшения частоты дискретизации по сравнению с рассмотренным случаем. Действительно, в случае выбора (9) определяющие выбор частот дискретизации отношения равны  $n_1/n_s = 0.5$  и  $n_0/n_s = 0.75$ . Если же выбрать, например  $n_s = 16$ ,  $n_1 = 8$ ,  $n_0 = 9$ , то  $n_1/n_s = 0.5$  и  $n_0/n_s = 0.5625$ . Таким образом, в этом случае в канале 1 частота дискретизации будет в 1.333 раза меньше, чем в случае с минимальным числом интервалов.

Таблица 1

Вид уравнений, описывающих процесс алиасинга, в зависимости от  $F_L$

$\varphi_L$	$S_{00}$	$S_{01}$	$S_{02}$	$S_{03}$	$S_{10}$	$S_{11}$	$S_{12}$	$S_{13}$
0	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$
1	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$
2	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$
3	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$
4	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$
5	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$
6	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$
7	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$
8	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$
9	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$
10	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$
11	$H_1$	$H_2$	$H_0 + H_3$	$H_1$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$	$H_1 + H_3$	$H_0 + H_2$

Уравнения (10) и (11) составлены для конкретного значения  $F_L$ . Далее найдем уравнения для произвольных  $F_L$ . В Таблице 1 представлен вид уравнений, описывающих процесс алиасинга для нескольких первых значений  $\varphi_L$ , где

$$\varphi_L = \lfloor F_L / \delta f \rfloor. \quad (14)$$

Видим, что эти уравнения модифицируются при изменении  $F_L$ , причем модификация имеет периодический характер.

Анализ приведенных в табл. 1 уравнений позволяет записать их в следующем виде

$$S_{0,i} = \begin{cases} H_0 + H_3, & \text{если } i \bmod 3 = \varphi_L \bmod 3, \\ H_k, & \text{если } i = (k + \varphi_L \bmod 3) \bmod 3, \end{cases} \quad (15)$$

$$S_{1,i} = \begin{cases} H_0 + H_2, & \text{если } (\varphi_L + i) \bmod 2 = 0, \\ H_1 + H_3, & \text{если } (\varphi_L + i) \bmod 2 \neq 0, \end{cases} \quad (16)$$

где  $k = 0$  или  $k = 1$ .

#### V. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА ПРИ ДВУХКАНАЛЬНОЙ ДВУХЧАСТОТНОЙ ОБРАБОТКЕ

Основной особенностью вычисления спектра при предлагаемом подходе является невозможность непосредственного применения Дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Дело в том, что  $M$ -точечное ДПФ вычисляется на эквидистантной сетке частот. Расстояние между узлами сетки (бин) равно частоте дискретизации, деленной на  $M$ . Поскольку в каналах частота дискретизации разная, то и абсолютная величина бинов в каналах различна. В результате узлы сетки в различных каналах не совпадают (рис. 6). Поэтому арифметические операции, необходимые для решения полученных уравнений, в этом случае невозможно выполнить.

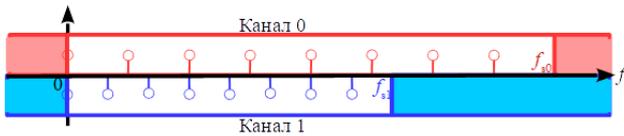


Рис. 6. Несоответствие отсчетов ДПФ-спектра между каналами

Для выхода из такого положения для вычисления спектра необходимо применять другие подходы.

Возможно применение обобщенного ДПФ (Generalized Discrete Fourier Transform [17], [18], известное также под названиями сдвинутое ДПФ (shifted DFT или offset DFT).

Такой инструмент как дискретно-временное преобразование Фурье (DTFT, Discrete Time Fourier Transform) [19] позволяет рассчитывать спектр на непрерывной оси частот.

Модификации алгоритма Гёрцеля (Goertzel algorithm) позволяют вычислять спектр на требуемых частотах.

#### VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта статья является продолжением серии работ, посвященных восстановлению сигналов, искаженных алиасингом при субнайквистовской дискретизации. Для этого используется метод, называемый многоканальной многочастотной дискретизацией. В отличие от других подходов к использованию многоканальной дискретизации, в этой статье аналого-цифровое преобразование в разных каналах выполняется с разными частотами дискретизации, каждый из которых не удовлетворяет требованиям

теоремы отсчетов. В этой статье рассмотрена субнайквистовская дискретизация комплексных сигналов, которые являются аналитическими. Рассмотрение ограничено только алиасингом первого порядка. Дальнейшие исследования будут посвящены исследованию комплексных и вещественных сигналов с различными порядками алиасинга.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Marks II R.J. Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory. New York: Springer-Verlag, 1991. 324 p.
- [2] Akansu A.N., Haddad P.R. Multiresolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands, and Wavelets, 2<sup>nd</sup> ed. San Diego, CA: Academic Press, 2000. 499 p.
- [3] Mishali M., Eldar Y.C. Sub-Nyquist sampling // IEEE Signal Processing Magazine. 2011. Vol. 28. Issue 6. Pp. 98-124.
- [4] Eldar Y.C. Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems. Cambridge University Press, 2015. 836 p.
- [5] Linden D.A. A discussion of sampling theorems // Proceedings of the IRE. 1959. Vol. 47. Issue 7. Pp. 1219-1226.
- [6] Rader C.M. Recovery of undersampled periodic waveforms // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1977. Vol. 25. No. 3. Pp. 242-249.
- [7] Sharma K.K., Joshi S.D. Signal reconstruction from the undersampled signal samples // Optics Communications. 2006. Vol. 268. Issue 2. Pp. 245-252.
- [8] Zayed A.I. Advances in Shannon's Sampling Theory. Boca Raton, New York, London, Tokyo: CRC Press, 1993. 334 p.
- [9] Vaidyanathan P.P. Generalizations of the sampling theorem: Seven decades after Nyquist // IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications. 2001. Vol. 48. Issue 9. Pp. 1094-1109.
- [10] Sanderson R.B., Tsui J.B.Y., Freese N. Reduction of aliasing ambiguities through phase relations // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. 1992. Vol. 28. Issue 4. Pp. 950-956.
- [11] Gedalyahu K., Tur R., Eldar Y.C. Multichannel sampling of pulse streams at the rate of innovation // arXiv: 1004.507. V. CAS-24. Pp. 652-654.
- [12] Li J. All-digital 2-channel parallel undersampling and reconstruction of band-limited signals // Signal, Image and Video Processing. 2008. Vol. 2. Issue 1. Pp. 89-99.
- [13] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Garsh D. // Unaliasing of undersampled spectra. 5<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2016). Bar, Montenegro, 12-16 June 2016. IEEE. Pp. 124-127.
- [14] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В., Гарш Д.Г. Восстановление спектра сигнала, искаженного при субдискретизации // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2016. Т. 6. № 2. С. 239-243. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_32721405\\_33212411.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_32721405_33212411.pdf).
- [15] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Undersampled spectrum reconstruction using multichannel multifrequency sampling // 8<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2019). Budva, Montenegro, 10-14 June 2019. IEEE. Pp. 124-127.
- [16] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Reconstruction of undersampled analytic signals under first order aliasing // 9<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2020). Budva, Montenegro, 8-12 June 2020. IEEE.

[17] Bi G., Zeng Y. *Transforms and Fast Algorithms for Signal Analysis and Representations*. New York City, NY: Springer Science & Business Media, 2012. 422 p.

[18] Corinthios M. *Signals, Systems, Transforms, and Digital Signal Processing with MATLAB*. Boca Raton, FL: CRC Press. 2009. 1256 p.

[19] Yang W.Y. *Signals and Systems with MATLAB*. New York City, NY: Springer Science & Business Media, 2009. 474 p.

# Recovery of an Analytical Signal Distorted by First-Order Aliasing

V.A. Lesnikov<sup>1</sup>, T.V. Naumovich<sup>2</sup>, A.V. Chastikov<sup>3</sup>

Vyatka State University, Kirov

<sup>1</sup>Vladislav.Lesnikov.Ru@IEEE.org, <sup>2</sup>NTV\_new@mail.ru, <sup>3</sup>AlChast@mail.ru

**Abstract** — This paper relates to one of the areas of digital signal processing in a wide frequency band based on the use of undersampling. In this case, the sampling rate is less than the Nyquist-Shannon sampling theorem requires. In this direction, compressed sampling methods are intensively used, based on the fact that the sampling theorem formulates sufficient requirements for the sampling frequency while under certain conditions they are not necessary. Very often these methods use random sampling. Our article uses deterministic undersampling. Undersampling results in aliasing that distorts the signals. Known signal restoration methods are based on multi-channel processing. At the same time, the channels carry out preliminary analog signal processing with subsequent undersampling with a single-frequency frequency in all channels. The proposed approach is based on the rejection of preliminary analog processing in the channels, but the frequency of the undersampling in different channels is different. Then the integration of the processing results in the channels for signal restoration is carried out.

**Keywords** — subnyquist sampling, first-order aliasing, restoration of a signal distorted by aliasing, analytical signal, two-channel two-rate sampling.

## REFERENCES

- [1] Marks II R.J. *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. New York: Springer-Verlag, 1991. 324 p.
- [2] Akansu A.N., Haddad P.R. *Multiresolution Signal Decomposition: Transforms, Subbands, and Wavelets*, 2<sup>nd</sup> ed. San Diego, CA: Academic Press, 2000. 499 p.
- [3] Mishali M., Eldar Y.C. Sub-Nyquist sampling // *IEEE Signal Processing Magazine*. 2011. Vol. 28. Issue 6. Pp. 98-124.
- [4] Eldar Y.C. *Sampling Theory: Beyond Bandlimited Systems*. Cambridge University Press, 2015. 836 p.
- [5] Linden D.A. A discussion of sampling theorems // *Proceedings of the IRE*. 1959. Vol. 47. Issue 7. Pp. 1219-1226.
- [6] Rader C.M. Recovery of undersampled periodic waveforms // *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1977. Vol. 25. No. 3. Pp. 242-249.
- [7] Sharma K.K., Joshi S.D. Signal reconstruction from the undersampled signal samples // *Optics Communications*. 2006. Vol. 268. Issue 2. Pp. 245-252.

[8] Zayed A.I. *Advances in Shannon's Sampling Theory*. Boca Raton, New York, London, Tokyo: CRC Press. 1993. 334 p.

[9] Vaidyanathan P.P. Generalizations of the sampling theorem: Seven decades after Nyquist // *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*. 2001. Vol. 48. Issue 9. Pp. 1094-1109.

[10] Sanderson R.B., Tsui J.B.Y., Freese N. Reduction of aliasing ambiguities through phase relations // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1992. Vol. 28. Issue 4. Pp. 950-956.

[11] Gedalyahu K., Tur R., Eldar Y.C. Multichannel sampling of pulse streams at the rate of innovation // *arXiv: 1004.507*. V. CAS-24. Pp. 652-654.

[12] Li J. All-digital 2-channel parallel undersampling and reconstruction of band-limited signals // *Signal, Image and Video Processing*. 2008. Vol. 2. Issue 1. Pp. 89-99.

[13] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Garsh D. // *Unaliasing of undersampled spectra*. 5<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2016). Bar, Montenegro, 12-16 June 2016. IEEE. Pp. 124-127.

[14] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Garsh D.G. Restoration of the spectrum of the signal, distorted due to undersampling // *DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoy obrabotki signalov*. 2016. T. 6. № 2. C. 239-243. URL: [https://www.elibrary.ru/download/elibrary\\_32721405\\_33212411.pdf](https://www.elibrary.ru/download/elibrary_32721405_33212411.pdf) (in Russian).

[15] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Undersampled spectrum reconstruction using multichannel multifrequency sampling // 8<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2019). Budva, Montenegro, 10-14 June 2019. IEEE. Pp. 124-127.

[16] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Reconstruction of undersampled analytic signals under first order aliasing // 9<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2020). Budva, Montenegro, 8-12 June 2020. IEEE.

[17] Bi G., Zeng Y. *Transforms and Fast Algorithms for Signal Analysis and Representations*. New York City, NY: Springer Science & Business Media, 2012. 422 p.

[18] Corinthios M. *Signals, Systems, Transforms, and Digital Signal Processing with MATLAB*. Boca Raton, FL: CRC Press. 2009. 1256 p.

[19] Yang W.Y. *Signals and Systems with MATLAB*. New York City, NY: Springer Science & Business Media, 2009. 474 p.