УДК 681.3:621.3.049.77 DOI: 10.31114/2078-7707-2020-3-224-229

Критерии численной оценки алгоритмов восстановления данных для аналого-информационных преобразователей

А.В. Быкова, М.Н. Полунин

АО «Научно-производственный центр «ЭЛВИС», г. Зеленоград, abykova@elvees.com

***Аннотация* — Традиционные подходы к дискретизации сигнала в современных системах с высокой пропускной способностью приводят к возникновению целого ряда проблем. Для решения этих проблем используют альтернативные подходы к дискретизации сигнала такие как теория сжатой дискретизации, на основе которой разрабатываются аналого-информационные преобразователи (АИП). Использование АИП позволяет уменьшить частоту дискретизации АЦП с сохранением доступного диапазона частот, что ведет к снижению потребляемой мощности и упрощению конструкции АЦП. Важную роль в АИП играет проблема эффективного восстановления сигнала из сжатых данных. Авторы данной статьи предлагают критерии для численной оценки различных алгоритмов восстановления данных.**

***Ключевые слова* — теория сжатой дискретизации, compressive sensing, аналого-информационные преобразователи, analog-to-information converter, система восстановления данных, алгоритмы восстановления данных, жадные алгоритмы.**

I. Введение

С развитием науки и техники возрастают требования к устройствам связи. Традиционно системы с высокой пропускной способностью дискретизируют сигнал согласно теореме Котельникова. Такой подход приводит к возникновению ряда проблем, из которых можно выделить две основные: первая проблема заключается в том, что при увеличении частоты дискретизации значительно возрастает ток потребления аналого-цифрового преобразователя, что приводит к значительному усложнению конструкции АЦП и всей сигнальной цепи; а вторая проблема заключается в необходимости хранить и передавать огромные объемы данных для дальнейшей обработки.

Для решения вышеперечисленных проблем можно использовать альтернативные подходы к дискретизации сигнала, одним из таких подходов является использование теории сжатой дискретизации, которая гласит, что сигнал может быть восстановлен из значительно меньшего количества точек, чем требуется по теореме Котельникова. Но восстановление сигнала возможно только при выполнении двух условий: разреженности и несогласованности[1]. Теория сжатой дискретизации широко используется и применяется во многих приложениях, включая компьютерную томографию, беспроводную связь[2], обработку изображений[3] и прочее.

Устройства, в основу которых положены принципы сжатой дискретизации, названы аналого-информационными преобразователями (АИП). Использование АИП позволяет уменьшить частоту дискретизации АЦП с сохранением доступного диапазона частот, что ведет к снижению потребляемой мощности и упрощению конструкции АЦП [4]-[5]. Структурно аналого-информационные преобразователи состоят из трех частей: системы считывания, АЦП и системы восстановления данных.

Проблема эффективного восстановления сигнала из сжатых данных играет важную роль в теории сжатой дискретизации [6]. Существует большое количество различных алгоритмов восстановления сигнала из сжатых данных, но большая часть подобных алгоритмов имеют большую вычислительную сложность [2]. В связи с этим, практически во всех существующих на данный момент устройствах, задача восстановления сигнала делегируется автономной обработке ЦПУ или ГПУ [7]-[8].

В данной работе авторы предлагают ввести критерии оценки алгоритмов, которые позволили бы наглядно сравнивать различные алгоритмы восстановления сжатого сигнала.

Во второй части данной статьи приведены основы теории сжатой дискретизации и рассмотрены существующие подходы к проблеме восстановления сжатого сигнала. В третьей части предложены критерии оценки данных алгоритмов. В четвертой части описан принцип работы жадных алгоритмов, а в пятой части приведено численное сравнение различных жадных алгоритмов.

II. Теория сжатой дискретизации

Механизм считывания информации о сигнале в теории сжатой дискретизации можно представить в виде системы линейных уравнений (1).

$$y = \langle \Phi, x \rangle, \tag{1}$$

где x - это входной сигнал длины N, $\Phi \in R$ - это случайная матрица измерения размерности M×N, (M << N), а выходной вектор измерений y будет иметь разрядность M.

Задача (1) является недоопределенной линейной системой уравнений, имеющей больше одного решения. Таким образом, одной из главных проблем является поиск единственного решения, которое имело бы минимальное отклонение от изначального сигнала. С точки зрения линейной алгебры, если нет никакого предшествующего знания, начального условия или ограничения, проблема (1) не будет иметь единственного решения. Чтобы устранить эту неопределенность необходимо искать решение с наименьшим числом ненулевых элементов.

Для применения теории сжатой дискретизации необходимо выполнение двух свойств: разреженности и несогласованности.

Большинство естественных сигналов могут быть представлены в некотором базисе с помощью небольшого числа значимых компонентов (по аналогии с работой кодеков сжатия с потерями). Представление сигнала в подобном базисе называется разреженным, количество ненулевых коэффициентов обозначим как уровень разреженности S. Если сигнал имеет только S ненулевых коэффициентов, то это S-разреженный сигнал.

Представим сигнал x в некотором разреженном базисе Ψ (2).

$$x = \sum_{i=1}^{N} f_i \Psi_i \text{ или } X = \Psi f \qquad (2)$$

Перепишем проблему (1) с учетом представления в разреженном базисе (3).

$$y = \Phi\Psi x \text{ или } y = Ax, \qquad (3)$$

где A - это матрица восстановления, которая является произведением матрицы измерения Φ и матрицы преобразования в разреженный базис Ψ.

В качестве меры разреженности используют l_0-норму, которая определяется как число ненулевых элементов вектора (4).

$$\|x\|_0 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^0 \qquad (4)$$

Используя знание о том, что исходный сигнал является разреженным, можно наложить условие поиска наиболее разреженного решения на задачу (1) [9]. Таким образом, получим оптимизационную задачу (5).

$$\begin{cases} \hat{x} = \arg\min \|x\|_0 \\ y = A \cdot x \end{cases}, \qquad (5)$$

где $\|\cdot\|_0$ – это l_0-норма. Задачу (5) называют проблемой разреженного представления.

На эффективность восстановления сигнала, кроме разреженности влияет ещё и независимость столбцов матрицы считывания. Для восстановления разреженного сигнала необходимо, чтобы столбцы матрицы считывания были статистически независимыми.

На данный момент в литературе представлено большое количество различных подходов к решению задачи (1), условно разделим их на пять групп:

1) Convex optimization approach (алгоритмы выпуклой оптимизации): в данном подходе задачу (1) преобразуют к задаче оптимизации l_1-нормы и решают при помощи методов линейного программирования [10]. Алгоритмы данной группы получили широкое распространение, несмотря на их высокую вычислительную сложность, благодаря тому, что существует большое количество алгоритмов оптимизации l_1-нормы.

2) Greedy approach (жадные алгоритмы): данный подход позволяет итеративным способом находить приближенное решение (5)[11]. На каждом шаге выбирается столбец матрицы восстановления A, который имеет наибольшую корреляцию с вектором измерений y. Затем индекс выбранного элемента добавляется в набор индексов и на каждом шаге производится локально-оптимизированная оценка вектора x и так до тех пор, пока не будет достигнут критерий остановки алгоритма.

3) Thresholding approach (пороговые алгоритмы): алгоритмы данной категории позволяют итеративным способом находить приближенное решение, используя некий пороговый оператор, отбрасывающий элементы, которые меньше заданного порога [12].

4) Non-Convex approach (Не выпуклые алгоритмы): в данном подходе задачу (1) преобразуют к задаче оптимизации l_p-нормы ($0<p<1$) [13].

5) Существуют алгоритмы, объединяющие в себе различные подходы, а также использующие совершенно иные методы решения [14].

III. Критерии оценки алгоритмов восстановления сигнала для аналого-информационных преобразователей

Многообразие подходов к проблеме восстановления сигнала породило большое количество алгоритмов, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками. В связи с этим, перед разработчиком АИП становится непростая задача поиска подходящего алгоритма. Выбор алгоритма будет зависеть от различных факторов, таких как архитектура системы считывания, требования к конечному устройству и прочее. Для того, чтобы упростить задачу выбора алгоритма в данной статье предлагается критерий оценки алгоритмов.

Для начала необходимо выделить параметры, которые будут иметь ключевое значение при выборе алгоритма. Одной из определяющих характеристик алгоритмов восстановления сигнала является допустимая погрешность. Обозначим ее как ε.

Важным критерием для любого алгоритма является время работы данного алгоритма. Для итерационных алгоритмов основным показателем, влияющим на время работы, является количество итераций, обозначим количество итераций I.

Необходимость реализации алгоритма в качестве СФ-блока накладывает ряд ограничений. Алгоритм должен иметь низкую вычислительную сложность, чтобы его интеграция в СБИС имела преимущество перед использованием внешних вычислительных устройств. При этом важную роль играют такие параметры как занимаемая площадь и потребление. Оценить данные параметры на уровне алгоритма затруднительно, но можно ввести некоторые относительные критерии оценки требуемой памяти. Для оценки памяти MEM будем подсчитывать сколько необходимо хранить матриц размера M×N (это размерность матрицы восстановления A) и векторов размерности M, совпадающей с размерностью сжатого сигнала, и размерности N, совпадающей с размерностью входного сигнала, в каждой итерации. Кроме того, в большинстве алгоритмов используется такая операция как метод наименьших квадратов, которая сама по себе будет требовать дополнительной памяти и вычислительных ресурсов, поэтому будем также оценивать число таких операций в каждой итерации алгоритма C. А для соразмерности с оценкой памяти будем считать, что одна такая операция соответствует объему памяти M×N+M+N.

Теперь введем оценочный коэффициент K_0. Чем меньше допустимая погрешность ε, тем точнее результат (тем ближе к исходному будет восстановленный сигнал), таким образом оценочный коэффициент должен быть обратно пропорционален допустимой погрешности $K_0 \sim 1/\varepsilon$. Аналогично с количеством итераций I, - чем меньше количество итераций, тем быстрее будет отрабатывать алгоритм, значит оценочный коэффициент обратно пропорционален количеству итераций. Но одна итерация в одном алгоритме может быть не равна по сложности и времени работы одной итерации другого алгоритма, поэтому оценка занимаемой памяти и сложности вычислительных операций, позволят более точно оценить сложность каждой итерации.

Таким образом, оценочный коэффициент K_0 может быть представлен как (6).

$$K_0 = \frac{1}{\varepsilon \cdot I \cdot (MEM + C)} \qquad (6)$$

Для получения более точной или более специфической оценки алгоритмов восстановления сжатого сигнала можно умножить оценочный коэффициент на такие критерии как процент верных решений, минимальное количество измерений для получения верного решения и прочее.

Далее более подробно рассмотрим жадные алгоритмы и сравним эти алгоритмы при помощи оценочного коэффициента.

IV. Matching pursuit

Стратегия жадного приближения хорошо подходит для поиска приближенного решения разреженного представления с минимизацией l_0-нормы. Одним из первых алгоритмов, использующих стратегию жадного приближения для решения задач (5), был matching pursuit(MP)[15]. Основная идея MP заключается в последовательном выборе лучшего элемента из словаря, основанного на схожести измерений и полученного приблизительного разреженного решения.

На каждом шаге выбирается такой столбец матрицы A , который имеет наибольшую корреляцию с вектором измерений y. Затем индекс выбранного элемента добавляется в набор индексов и на каждом шаге производится локально-оптимизированная оценка вектора x. Так как элементы вектора не являются ортогональными, один и тот же вектор может быть выбран на разных итерациях. Но эта проблема была решена в алгоритме orthogonal matching pursuit (OMP). Благодаря ортогонализации OMP алгоритм сходится за конечное число итераций. Основные шаги OMP алгоритма приведены в табл. 1.

Таблица 1

Алгоритм Orthogonal matching pursuit

Задача:	Аппроксимация проблемы (5)
Входные данные:	Вектор сжатых данных y, матрица измерений A, вектор разреженных коэффициентов x.
Начальные значения:	Номер итерации t=1, остаток r_0=y, x=0, множество индексов Λ=ø, множество восстановленных данных D_0= ø, где ø – пустое множество.
Условие выхода из алгоритма:	$\|r_t\| \leq \varepsilon$
Шаг 1	Поиск индекса наибольшего элемента $\lambda_t = \mathrm{argmax}\lvert< r_{t-1} , a_j>\rvert$
Шаг 2	Обновляем набор индексов, добавляя индекс, найденный на предыдущем шаге, и обновляем набор восстановленных данных.
Шаг 3	Вычисляем разреженные коэффициенты, используя метод наименьших квадратов
Шаг 4	Обновляем остаток представления
Шаг 5	t=t+1
Выходные данные:	D, x

Существует большое количество алгоритмов, построенных на основе MP и OMP, рассмотрим несколько таких алгоритмов:

1) Алгоритм GOMP, главное отличие которого от OMP заключается в том, что на каждой итерации выбирается K наибольших элементов, где K ≤ уровню разреженности S[16].

2) Улучшенный алгоритм GOMP, в котором на каждой итерации проверяется, что общее количество индексов на шаге 2 не больше S[16].

3) Предложенный Needell и другими regularized orthogonal matching pursuit (ROMP) [17], в котором индексы группируются по соразмерности, после чего выбирается группа индексов с наибольшей энергией.

4) MMP, в котором можно задать количество путей поиска индекса L. При L = 1 соответствует OMP [18].

Более детальное описание жадных алгоритмов для разреженного представления можно найти в [19].

V. Численная оценка

Оценим алгоритмы MP, OMP, GOMP, ImGOMP, ROMP и MMP, используя предложенный оценочный коэффициент. В табл. 2 приведена оценка требуемой памяти и сложности математических операций для вышеперечисленных алгоритмов.

Таблица 2

Оценка требуемой памяти и сложности математических операций

Алгоритм	Критерий	
	MEM	C
MP	2M×N+2M+3N	M×N+M+N
OMP	2M×N+3M+2N	M×N+M+N
GOMP	2M×N+3M+2N	M×N+M+N
ImGOMP	2M×N+3M+2N	M×N+M+N
ROMP	2M×N+3M+2N	M×N+M+N
MMP	L(2M×N+3M+2N)	(L+1)(M×N+M+N)

Для проведения исследования была составлена математическая модель АИП с системой считывания типа неравномерной дискретизации [20]-[21]. В качестве базиса разреженности Ψ использовался базис дискретного косинусного преобразования. В системе восстановления данных использовались алгоритмы MP, OMP, GOMP, ImGOMP, ROMP и MMP (для данного алгоритма количество путей поиска индекса L=2). Таким образом, на все алгоритмы поступали одинаковые данные.

На вход подается разреженный сигнал (S - гармоник равной амплитуды и случайной частоты) с добавлением случайного шума. Для всех алгоритмов допустимую погрешность установим $\varepsilon=10^{-3}$. Оценка требуемой памяти зависит от количества снимаемых отсчетов, в данном эксперименте количество снимаемых отсчетов M=500, а размер входного сигнала N=5000. Таким образом, в табл. 3 приведены численные значения для MEM и C.

От количества гармоник во входном сигнале будет зависеть количество итераций. В табл. 4 приведены количество итераций и значение оценочного коэффициента для сигнала с одной гармоникой, а в табл. 5 для сигнала с восемью гармониками.

Таблица 3

Численные значения критериев MEM и C

Алгоритм	Критерий	
	MEM	C
MP	5016000	2505500
OMP	5011500	2505500
GOMP	5011500	2505500
ImGOMP	5011500	2505500
ROMP	5011500	2505500
MMP	10023000	7516500

Таблица 4

Численные значения оценочного коэффициента для сигнала с одной гармоникой

Алгоритм	Критерии	
	I	K_0
MP	7374	1.8e-8
OMP	297	4.48e-7
GOMP	42	3.17e-6
ImGOMP	8	1.66e-5
ROMP	2	6.65e-5
MMP	297	1.92e-7

Таблица 5

Численные значения оценочного коэффициента для сигнала с восемью гармониками

Алгоритм	Критерии	
	I	K_0
MP	12399	1.07e-8
OMP	330	4.03e-7
GOMP	46	2.89e-6
ImGOMP	20	6.65e-6
ROMP	16	8.31e-6
MMP	332	1.72e-7

Из полученных данных видно, что несмотря на то, что алгоритмы OMP, GOMP, ImGOMP и ROMP имеют одинаковые численные значения при оценке требуемой памяти, количество итераций при восстановлении одних и тех же данных сильно разнятся и наиболее выгодным оказывается алгоритм ROMP, что и показывает значение оценочного коэффициента.

VI. Заключение

При разработке АИП немаловажную роль играет система восстановления данных. В литературе представлено большое количество алгоритмов восстановления данных. В данной статье авторы предлагают оценочный коэффициент, который позволяет сравнить различные алгоритмы восстановления данных. Коэффициент включает оценку предполагаемой занимаемой памяти, которая важна при интеграции системы восстановления данных в СБИС.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Candes E. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // IEEE Transactions on Information Theory. 2006. V. 52. № 2. P. 489–509.
[2] G. Taubock, F. Hlawatsch, D. Eiwen and H. Rauhut, Compressive Estimation of Doubly Selective Channels in Multicarrier Systems: Leakage Effects and Sparsity-Enhancing Processing // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2010. V. 4. № 2. P. 255–271.
[3] J. Bobin, J. Starck and R. Ottensamer, Compressed Sensing in Astronomy // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2008. V. 2. № 5. P. 718–726.
[4] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders, Atomic Decomposition by Basis Pursuit // SIAM Journal on Scientific Computing. 2006. V. 20. № 1. P. 33–61.
[5] Tibshirani, R. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1996. V. 58. № 1. P.267–288.
[6] Needell, D., Tropp, J.A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2009. V. 26. № 3. P.301–321.
[7] R. Chartrand and Wotao Yin, Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Las Vegas, NV. 2008. P.3869–3872.
[8] Candès, E.J., Recht, B. Exact Matrix Completion via Convex Optimization. // Foundations of Computational Mathematics. 2009. V. 9. № 6. P.717–772.
[9] David L. Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via $\ell 1$ minimization. // Proceedings of the National Academy of sciences. 2003. V. 100. № 5. P.2197-2202.
[10] J. Wright, A. Y. Yang, A. Ganesh, S. S. Sastry and Y. Ma, Robust Face Recognition via Sparse Representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2009. V. 31. № 2. P.210–227.
[11] W. Dai and O. Milenkovic, Subspace Pursuit for Compressive Sensing Signal Reconstruction // IEEE Transactions on Information Theory. 2009. V. 55. № 5. P.2230–2249.
[12] T. Blumensath and M. E. Davies, Normalized Iterative Hard Thresholding: Guaranteed Stability and Performance // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2010. V. 4. № 2. P.298–309.
[13] L. Qin, Z. Lina, Y. She and C. Zhang. A comparison of typical ℓp minimization algorithms // Neurocomputing. 2013. V. 119. P.413–424.
[14] R. Chartrand and V. Staneva, Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing // Inverse Problems. 2008. V. 24. № 3. P.35020.
[15] S. G. Mallat and Z. Zhang, Matching pursuits with time-frequency dictionaries // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. V. 41. № 12. P.3397–3415.
[16] L. Zhao and Y. Liu, A New Generalized Orthogonal Matching Pursuit Method // Journal of Electrical and Computer Engineering. 2017. V. 4. P.1–7.
[16] L. Zhao and Y. Liu, A New Generalized Orthogonal Matching Pursuit Method // Journal of Electrical and Computer Engineering. 2017. V. 4. P.1–7.
[17] Z. Tao, B. Zhengyao and Y. Lu, Normalized regularized orthogonal matching pursuit algorithm // IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), Chongqing. 2015. P.1060-1063.
[18] S. Kwon, J. Wang and B. Shim, Multipath Matching Pursuit // IEEE Transactions on Information Theory. 2014. P.1060-1063.
[19] J. A. Tropp, A. C. Gilbert, M. J. Strauss. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part I: Greedy pursuit // Signal Processing. 2006. V. 86. № 3. P.572–588.
[20] Полунин М.Н., Быкова А.В. Обзор архитектур аналого информационных преобразователей. Вопросы радиоэлектроники. 2019;(8):6-12.
[21] M. Polunin, A. Bykova, V. Losev, M. G. Putrya and T. Krupkina. Analysis of Parameter Dependencies of Non-uniform Sampling A2I Converter. // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus), St. Petersburg and Moscow, Russia. 2020. P. 1721-1724

Criteria for the Numerical Evaluation of Data Recovery Algorithms for Analogue-Information Converters

A.V. Bykova, M.N. Polunin

Joint Stock Company Research and Development Center «ELVEES», abykova@elvees.com

Abstract **— traditional approaches to signal sampling in modern systems with high bandwidth lead to a number of problems. Alternative approaches to signal sampling, such as the theory of compressed sampling, are used to solve these problems. Devices based on the principles of compressed sampling are called analog-to-information converters (AICs). Usage of AIC allows you reduction of the ADC sampling frequency while maintaining the available frequency range, which leads to lower power consumption and simplification of the ADC design. Structurally, analog-information converters consist of three parts: a reading system, an ADC and a data recovery system.**

The problem of efficient reconstruction of a signal from compressed data plays an important role in the theory of compressed sampling. There is a large number of different algorithms for recovering a signal from compressed data, but the most of these algorithms have great computational complexity. In connection to this, the task of signal recovery is delegated to the autonomous processing of the CPU or GPU in the almost all currently existing devices.

The variety of approaches to the problem of signal recovery has generated a large number of algorithms, each of which has its own advantages and disadvantages. In this regard, the task of choosing an appropriate algorithm becomes a daunting

task for an AIC developer. The choice of algorithm will depend on various factors, such as the architecture of the sampling system, the requirements for the final device and so on. In order to simplify the task of choosing an algorithm, this article proposes an estimated coefficient that allows you comparing different data recovery algorithms. The coefficient includes the following criteria: relative estimation of occupied memory, which is important when integrating a data recovery system in a VLSI, the number of iterations and the permissible error. In addition, the article compares various greedy algorithms using the proposed estimated coefficient.

Keywords **— theory of compressed sampling, compressive sensing, analog-to-information converters, data recovery system, data recovery algorithms, greedy algorithms.**

References

[1] Candes E. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information // IEEE Transactions on Information Theory. 2006. V. 52. № 2. P. 489–509.

[2] G. Taubock, F. Hlawatsch, D. Eiwen and H. Rauhut, Compressive Estimation of Doubly Selective Channels in Multicarrier Systems: Leakage Effects and Sparsity-Enhancing Processing // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2010. V. 4. № 2. P. 255–271.

[3] J. Bobin, J. Starck and R. Ottensamer, Compressed Sensing in Astronomy // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2008. V. 2. № 5. P. 718–726.

[4] Scott Shaobing Chen, David L. Donoho, and Michael A. Saunders, Atomic Decomposition by Basis Pursuit // SIAM Journal on Scientific Computing. 2006. V. 20. № 1. P. 33–61.

[5] Tibshirani, R. Regression Shrinkage and Selection via the Lasso // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1996. V. 58. № 1. P.267–288.

[6] Needell, D., Tropp, J.A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples // Applied and Computational Harmonic Analysis. 2009. V. 26. № 3. P.301–321.

[7] R. Chartrand and Wotao Yin, Iteratively reweighted algorithms for compressive sensing // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Las Vegas, NV. 2008. P.3869–3872.

[8] Candès, E.J., Recht, B. Exact Matrix Completion via Convex Optimization. // Foundations of Computational Mathematics. 2009. V. 9. № 6. P.717–772.

[9] David L. Donoho and Michael Elad. Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via $\ell 1$ minimization. // Proceedings of the National Academy of sciences. 2003. V. 100. № 5. P.2197-2202.

[10] J. Wright, A. Y. Yang, A. Ganesh, S. S. Sastry and Y. Ma, Robust Face Recognition via Sparse Representation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 2009. V. 31. № 2. P.210–227.

[11] W. Dai and O. Milenkovic, Subspace Pursuit for Compressive Sensing Signal Reconstruction // IEEE Transactions on Information Theory. 2009. V. 55. № 5. P.2230–2249.

[12] T. Blumensath and M. E. Davies, Normalized Iterative Hard Thresholding: Guaranteed Stability and Performance // IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing. 2010. V. 4. № 2. P.298–309.

[13] L. Qin, Z. Lina, Y. She and C. Zhang. A comparison of typical ℓp minimization algorithms // Neurocomputing. 2013. V. 119. P.413–424.

[14] R. Chartrand and V. Staneva, Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing // Inverse Problems. 2008. V. 24. № 3. P.35020.

[15] S. G. Mallat and Z. Zhang, Matching pursuits with time-frequency dictionaries // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. V. 41. № 12. P.3397–3415.

[16] L. Zhao and Y. Liu, A New Generalized Orthogonal Matching Pursuit Method // Journal of Electrical and Computer Engineering. 2017. V. 4. P.1–7.

[16] L. Zhao and Y. Liu, A New Generalized Orthogonal Matching Pursuit Method // Journal of Electrical and Computer Engineering. 2017. V. 4. P.1–7.

[17] Z. Tao, B. Zhengyao and Y. Lu, Normalized regularized orthogonal matching pursuit algorithm // IEEE Advanced Information Technology, Electronic and Automation Control Conference (IAEAC), Chongqing. 2015. P.1060-1063.

[18] S. Kwon, J. Wang and B. Shim, Multipath Matching Pursuit // IEEE Transactions on Information Theory. 2014. P.1060-1063.

[19] J. A. Tropp, A. C. Gilbert, M. J. Strauss. Algorithms for simultaneous sparse approximation. Part I: Greedy pursuit // Signal Processing. 2006. V. 86. № 3. P.572–588.

[20] Polunin M.N., Bykova A.V. Obzor arkhitektur analogo informatsionnykh preobrazovateley (Review of analog-to-information converters). Voprosy radioelektroniki. 2019;(8):6-12.

[21] M. Polunin, A. Bykova, V. Losev, M. G. Putrya and T. Krupkina. Analysis of Parameter Dependencies of Non-uniform Sampling A2I Converter. // IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus), St. Petersburg and Moscow, Russia. 2020. P. 1721-1724