

Оценивание частот синусоид на основе расширенных эквивалентных систем

Д.В. Иванов, О.И. Митрошин

Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара, dvi85@list.ru

Аннотация — Оценивание частот синусоид на основе полного метода наименьших квадратов позволяет получать более точные оценки по сравнению с классическим методом наименьших квадратов. Наиболее распространенным алгоритмом решения задачи полных наименьших квадратов является алгоритм на основе сингулярного разложения матрицы. Данный алгоритм имеет высокую вычислительную сложность. Альтернативным методом решения задачи полных наименьших квадратов является подход на основе смещенных нормальных систем. В работе предложена оценка частот синусоид по дискретным измерениям с шумом на основе расширенной системы линейных алгебраических уравнений эквивалентной нормальной смещенной системе уравнений.

Результаты моделирования показывают, что оценки частоты на основе расширенных систем сопоставимы по точности с решением задачи полных наименьших квадратов на основе сингулярного разложения матрицы и имеют существенно меньшее число обусловленности, чем смещенная нормальная система уравнений.

Ключевые слова — Метод полных наименьших квадратов, разрешающая способность, оценивание частоты, плохая обусловленность.

I. ВВЕДЕНИЕ

Задача, рассматриваемая в статье, является одной из задач спектрального анализа [1]. Во многих приложениях, особенно в области связи, радиолокации, гидролокации, геофизики, сейсмологии, рассматриваемые сигналы могут быть хорошо описаны суммой синусоид с шумом [2]. Проблеме оценки частот синусоид из конечного числа дискретных зашумленных измерений посвящено большое количество работ [1] - [5] из-за ее широкого применения в науке и технике.

Несмотря на то, что существует огромное число методов оценивания частоты, они могут быть классифицированы в качестве непараметрических или параметрических подходов. Непараметрические частотные методы основаны на применении преобразования Фурье. Непараметрические методы не накладывают никаких предположений о модели наблюдаемых данных последовательности. Разрешение или способность разрешать близко расположенные частоты с использованием непараметрических методов принципиально ограничено длиной доступных данных. В качестве альтернативы используют параметрический подход, который предполагает, что сигнал

удовлетворяет порождающей модели с известной функциональной формой. Параметрический подход позволяет достичь более высокого разрешения. Известны следующие параметрические оценки частоты: максимальное правдоподобие (МП) [6], нелинейный метод наименьших квадратов (НМНК) [7], полный метод наименьших квадратов (ПМНК) [8, 9], инструментальные переменные (ИП) [10], уравнения Юла - Уокера [11], итеративная фильтрация [12] и подпространственные методы, такие как усеченное разложение по сингулярным числам, MUSIC и ESPRIT [4].

Фактически, при аддитивном белом гауссовском шуме, МП и НМНК методы эквивалентны, и оба статистически эффективны, но их вычислительная сложность очень высокая. С другой стороны, остальные вышеупомянутые параметрические методы используют линейное предсказание (ЛП) синусоидальных сигналов и обеспечивают субоптимальную оценку эффективности, но вычислительная сложность их меньше. Точность оценивания частот синусоид методом полных наименьших квадратов, а также близость получаемых значений частот к теоретической наивысшей точности (границе Крамера-Рао) рассматривается в [8].

Принципиальным ограничением для разрешающей способности параметрических методов является вычислительная устойчивость алгоритмов и несмещенность получаемых оценок. Это связано с тем, что при близких частотах оцениваемых синусоид задача становится плохо обусловленной.

Известно, что применение метода полных наименьших квадратов позволяет повысить разрешающую способность по сравнению с классическим методом наименьших квадратов. Наиболее распространенным алгоритмом решения задачи полных наименьших квадратов является алгоритм на основе сингулярного разложения матрицы. Данный алгоритм имеет высокую вычислительную сложность. Альтернативным методом решения задачи полных наименьших квадратов является подход на основе смещенных нормальных систем. В [13] отмечалось, что решение задачи полных наименьших квадратов в виде смещенной нормальной системы может быть предпочтительнее в некоторых случаях.

В статье предложена оценка частот синусоид на основе расширенной эквивалентной системы

уравнений. Предложенный в статье алгоритм оценивания частот синусоид методом полных наименьших квадратов на основе эквивалентных систем позволяет совместить точность алгоритма оценивания на основе сингулярного разложения и вычислительную простоту методов на основе нормальной смещенной системы. В связи с этим предложенный подход позволяет снизить требования к быстродействию системы или разрядности АЦП, что может послужить основой создания новых эффективных микро – и нанoeлектронных систем.

Статья организована следующим образом. В секции II представлена постановка задачи оценивания частот синусоид по зашумленным наблюдениям. В секции III сумма L синусоид представлена в виде разностного уравнения. Секция IV посвящена методу наименьших квадратов (МНК). В секции V описаны методы решения задачи полных наименьших квадратов, а также показано, как задача оценивания частоты может быть приведена к задаче полных наименьших квадратов. В секции VI представлены результаты моделирования. Заключение приведено в секции VII.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Проблема оценивания частот синусоид формулируется следующим образом. Даны дискретные измерения с шумом:

$$x(n) = s(n) + q(n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

где

$$s(n) = \sum_{l=1}^L \alpha_l \sin(\omega_l n + \phi_l), \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (2)$$

α_l , $\omega_l \in (0, \pi)$ и $\phi_l \in [0, 2\pi)$ неизвестные амплитуды, частоты и фазы l -той синусоиды. $q(n)$ аддитивный белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_q^2 . Предполагается, что число синусоид L заранее известно.

Требуется определить оценки $\hat{\omega}_l$ по N зашумленным последовательностям наблюдений $\{x(n)\}$.

III. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЗАДАЧИ В ФОРМЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Оценивание частот ω_l из зашумленного сигнала представляет собой сложную задачу из-за того, что частоты ω_l входят в уравнение (2) нелинейно.

Известно, что сигнал $s(n)$ может быть однозначно представлен как линейная комбинация $2L$ предыдущих отсчетов

$$s(n) = -\sum_{i=1}^{2L} a_i s(n-i), \quad (3)$$

где a_i постоянные коэффициенты. Частоты $\omega_l \in (0, \pi)$ связаны с коэффициентами a_i следующим уравнением [9]

$$\sum_{i=0}^{2L} a_i \exp(-j\omega_l i) = 0, \quad (4)$$

где $a_0 = 1$, $a_i = a_{2L-i}$.

Решая уравнение

$$\sum_{i=0}^{2L} a_i z^i = 0, \quad (5)$$

можно определить частоты ω_l , как фазы $\exp(\pm j\omega_l)$ корней уравнения (5). Таким образом, задача оценивания частот ω_l может быть сведена к оцениванию коэффициентов a_i , входящих в уравнение линейно.

Используя свойство коэффициентов a_i запишем исходную задачу в следующем виде:

$$\begin{aligned} -s(n) - s(n-2L) &= \\ &= \sum_{i=1}^{L-1} a_i (s(n-i) - s(n-2L+i)) + a_L s(n-L), \end{aligned} \quad (6)$$

$$x(n) = s(n) + q(n),$$

Определим выражение для ошибки:

$$\begin{aligned} e(n) &= +q(n) + q(n-2L) + \\ &+ \sum_{i=1}^{L-1} a_i (q(n-i) - q(n-2L+i)) + a_L q(n-L). \end{aligned} \quad (7)$$

Запишем уравнение (6) в матричной форме

$$Y = Xa, \quad (8)$$

где $Y = (-x(N-1) - x(N-2L-1), \dots, -x(2L) - x(0))^T$,
 $a = (a_1, \dots, a_L)^T$,

$$X = \begin{pmatrix} -x(N-2) - x(N-2L) & \dots & x(N-L-1) \\ -x(N-3) - x(N-2L-1) & \dots & x(N-L-2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -x(2L-1) - x(1) & \dots & x(L) \end{pmatrix}^T.$$

IV. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Наиболее распространённым методом оценивания параметров для уравнения (8) является метод наименьших квадратов, который минимизирует сумму квадратов ошибки:

$$J(a) = \sum_{n=2L}^N (e(n))^2 = e^T e = (Y - Xa)^T (Y - Xa),$$

где $e = (e(N-1), \dots, e(2L))^T$.

Оценка \hat{a}_{LS} по методу наименьших квадратов может быть получена как решение системы нормальных уравнений:

$$\hat{a}_{LS} = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Применение метода наименьших квадратов для оценивания коэффициентов уравнения (8) приведет к смещенным оценкам, так как ошибка (7) не является “белым шумом”.

V. МЕТОД ПОЛНЫХ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Несмещенные оценки частоты могут быть получены на основе минимизации обобщенного отношения Рэлея [14]. Найдем дисперсию ошибки $e(n)$

$$\sigma_e^2 = E\left((e(n))^2\right) = 2 + a^T D a = 2(1 + a^T \bar{D} a),$$

где \bar{D} диагональная матрица следующего вида

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Критерий на основе минимизации обобщенного отношения Рэлея имеет вид:

$$\min_a \frac{\|Y - Xa\|_2^2}{1 + a^T \bar{D} a}. \quad (9)$$

Преобразуем задачу (9) к задаче полных наименьших квадратов. Введем новый вектор переменных

$$\tilde{a} = Na, \quad (10)$$

где $\bar{D} = N^T N$.

Запишем критерий (9) с помощью нового вектора переменных

$$\min_{\tilde{a}} \frac{\|Y - XN^{-1}\tilde{a}\|_2^2}{1 + \tilde{a}^T \tilde{a}}. \quad (11)$$

A. Решение задачи полных наименьших квадратов на основе сингулярного разложения.

Наиболее распространённый подход к минимизации (11) основан на использовании сингулярного разложения. Решение задачи (11) требует вычисления минимального сингулярного числа расширенной матрицы $C = (XN^{-1}, Y)$ и соответствующего этому числу правого сингулярного вектора.

Сингулярное разложение матрицы имеет вид [15]:

$$C = U \Sigma V^T,$$

где матрица $U_{(N-2L) \times (N-2L)}$ - левый сингулярный вектор, $V_{(L+1) \times (L+1)}$ - правый сингулярный вектор,

матрицы U и V являются ортонормальными $U^T U = U U^T = I$, $V^T V = V V^T = I$,

$$\Sigma_{(N-2L) \times (L+1)} = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\min\{N-2L, L+1\}}\},$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min\{N-2L, L+1\}}$ - сингулярные числа матрицы C . Матрица V имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \dots & v_{1,(L+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{(L+1),1} & \dots & v_{(L+1),(L+1)} \end{pmatrix}.$$

Если $v_{(L+1),(L+1)} \neq 0$ и $\sigma_L \neq \sigma_{L+1}$, задача (11) имеет единственное решение:

$$\hat{a}_{LS1} = -\frac{1}{v_{(L+1),(L+1)}} (v_{1,1} \dots v_{L,L})^T. \quad (12)$$

Оценки частоты, полученные на основе правого сингулярного вектора, имеют высокую точность. Однако задача поиска сингулярного вектора является нелинейной и имеет высокую вычислительную сложность. Ее численное решение сопряжено со значительными трудностями [16].

B. Решение на основе нормальной смещенной системы

Второй подход основан на решении смещенной нормальной системы. В обзоре [13] отмечалось, что данный подход в отдельных случаях может давать решение точнее, чем метод на основе сингулярного разложения.

В [17] показано, что если выполняется условие

$$\sigma = \sigma_{\min}(C) < \sigma_{\min}(XN^{-1}), \quad (13)$$

то решение задачи (11) может быть получено из системы уравнений

$$\left((XN^{-1})^T XN^{-1} - \sigma^2 I \right) \tilde{a} = (XN^{-1})^T Y, \quad (14)$$

При решении системы (13) нелинейной остается лишь скалярная задача поиска минимального сингулярного числа $\lambda_{\min}(C)$. Данная задача всегда хорошо обусловлена [16]. Векторная же задача является линейной. Однако система (13) часто бывает плохо обусловлена. Число обусловленности нормальной смещенной матрицы определяется из следующего соотношения:

$$\text{cond}_2 \left((XN^{-1})^T XN^{-1} - \sigma^2 I \right) = \frac{\sigma_{\max}^2(XN^{-1}) - \sigma^2}{\sigma_{\min}^2(XN^{-1}) - \sigma^2}.$$

Плохая обусловленность (13) возникает по двум причинам: из-за произведения $C^T C$ и из-за возможной близости $\sigma_{\min}^2(XH^{-1})$ и σ^2 . Для повышения устойчивости решения смещенной нормальной системы уравнений может быть применен метод Холецкого. Метод Холецкого имеет существенный недостаток - на плохо обусловленных матрицах он может приводить к неприемлемой погрешности в решении системы уравнений.

В [18] предлагается использовать расширенную систему эквивалентную смещенной нормальной системе (14)

$$\bar{X}\bar{a} = \bar{Y}, \quad (15)$$

или

$$\left(\begin{array}{ccc|c} I & 0 & kXH^{-1} & k\bar{e} \\ \hline 0 & I & jk\sigma I & kr \\ \hline (kXH^{-1})^T & jk\sigma I & 0 & \hat{a} \end{array} \right) \begin{pmatrix} k\bar{e} \\ kr \\ \hat{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kY \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $k > 0$ произвольный множитель, $j = \sqrt{-1}$.

Число обусловленности матрицы $\bar{X}(k)$ имеет вид [18]:

$$\text{cond}_2(\bar{X}(k)) = \frac{\sqrt{1+k^2\mu_{\max}+k^2\sigma^2}}{\sqrt{1+k^2\mu_{\min}+k^2\sigma^2}} \times \left| \frac{\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{k^2(\mu_{\max}-\sigma^2)}{(1+k^2\mu_{\max}+k^2\sigma^2)^{3/2}}\right)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{k^2(\mu_{\min}-\sigma^2)}{(1+k^2\mu_{\min}+k^2\sigma^2)^{3/2}}\right)\right)} \right|, \quad (17)$$

где μ_{\max}, μ_{\min} максимальное и минимальное собственные числа матрицы $XH^{-1}(XH^{-1})^T$.

Задачу поиска минимального значения числа обусловленности можно рассматривать как задачу выбора оптимального множителя k :

$$\inf_{k>0} \text{cond}_2(\bar{X}(k)) \quad (18)$$

Задача (17) не имеет аналитического решения, но может быть решена численными методами. На практике в качестве оценки k_{opt} можно использовать величину

$$\hat{k}_{opt} = \frac{\sigma_{\max}(XH^{-1}) + \sigma}{\sigma_{\min}(XH^{-1}) + \sigma} \sqrt{\frac{2}{\sigma_{\max}^2(XH^{-1}) + \sigma^2}}. \quad (19)$$

Задача (16) может быть решена стандартными методами решения систем уравнений, например, с помощью LU-разложения. Из уравнения $\hat{a} = H\hat{a}$ можно получить оценку вектора параметров \hat{a} .

$$\hat{a} = H^{-1}\hat{a}. \quad (20)$$

Алгоритм

Шаг 1. Выполнить разложение $\bar{D} = H^T H$ и произвести замену переменной (10)

Шаг.2 Найти наименьшее сингулярное число матрицы C .

Шаг 3. Рассчитать значение множителя по (17) или (18)

Шаг 4. Решить систему уравнений (15) с помощью метода Гаусса или алгоритма [15].

Шаг 5. Найти оценку параметров $\hat{a}_{TLS2} = H^{-1}\hat{a}$.

VI. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Модель сигнала без шума описывается уравнением:

$$s(n) = \sum_{l=1}^5 \alpha_l \sin(\omega_l n + \phi_l), \quad (21)$$

где $\alpha = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$, $\omega = (1.1 \ 1.2 \ 1.3 \ 1.4 \ 1.5)$,

$\phi = (\pi \ \pi/2 \ \pi/3 \ \pi/4 \ \pi/5)$.

Число наблюдений $N = 2000$. Отношение “сигнал-шум” для суммы синусоид [19]:

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{\alpha_1^2}{2\sigma_\xi^2} \right), \quad (22)$$

и было равно $\text{SNR} = 17$ dB.

Фрагменты реализации сигнала без шума $s(n)$ и сигнала с шумом $x(n)$ представлены на рис. 1.

Обусловленности задач (14) и (15) приведены в таблице 1:

Таблица 1

Значения чисел обусловленности	cond_2
$(XH^{-1})^T XH^{-1} - \sigma^2 I$	27590
$\bar{X}(k)$	37.91

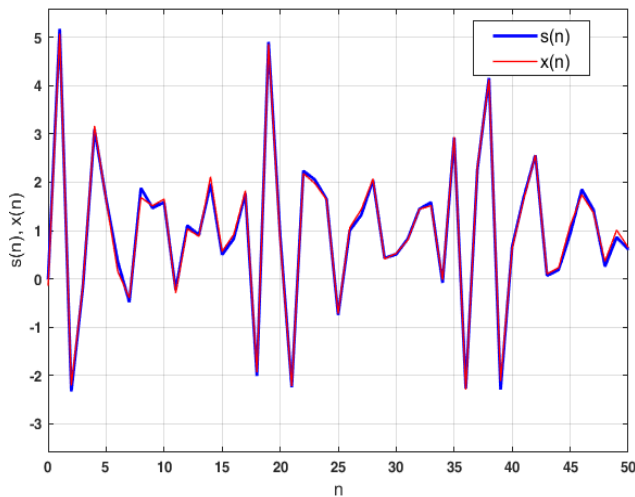


Рис. 1. Фрагменты реализации сигнала без шума $s(n)$ и сигнала с шумом $x(n)$

Алгоритмы сравнивались по рассогласованию вектора оценок коэффициентов \hat{a} и рассогласованию вектора оценок частот $\hat{\omega}$:

$$\delta a = 20 \lg \left(\frac{\|\hat{a} - a\|_2}{\|a\|_2} \right), \quad (23)$$

$$\delta \omega = 20 \lg \left(\frac{\|\hat{\omega} - \omega\|_2}{\|\omega\|_2} \right). \quad (24)$$

Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Рассогласование векторов оценок параметров \hat{a} и $\hat{\omega}$

	δa , dB	$\delta \omega$, dB
\hat{a}_{LS}	-0.0690	-13.1209
\hat{a}_{TLS2}	-23.8545	-37.6913
\hat{a}_{TLS2}	-23.8545	-37.6913

В табл. 3 приведены значения истинных частот сигнала и их оценок.

Таблица 3

Истинные значения частот и их оценки

ω	$\hat{\omega}_{LS}$	$\hat{\omega}_{TLS}$
1.35	0.4155	-1.3482
1.70	1.3591	-1.6819
2.05	1.7799	1.9990
2.40	2.2561	2.3700
2.75	2.7195	2.7447

Представленные в разделе результаты показывают, что оценки частоты на основе расширенных систем сопоставимы по точности с решением задачи полных наименьших квадратов на основе сингулярного разложения матрицы и имеют существенно меньшее

число обусловленности, чем смещенная нормальная система уравнений.

VII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен метод оценивания частот синусоид с шумом на основе решения смещенной нормальной системы. Результаты моделирования показали, что предложенная оценка частот синусоид по точности не уступает оценкам, полученным на основе сингулярного разложения матрицы, и имеет меньшее число обусловленности чем смещенная нормальная система. Возможность получать решение задачи полных наименьших квадратов без нахождения правого сингулярного вектора и матрицы $(XH^{-1})^T XH^{-1} - \sigma^2 I$ является несомненным достоинством оценок частоты на основе расширенных систем, по сравнению с решениями на основе сингулярного разложения матрицы или смещенной нормальной системы, соответственно. Дальнейшим направлением исследований является разработка рекуррентных алгоритмов, позволяющих проводить оценивание частот в режиме реального времени.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Marple S.L., Digital Spectral Analysis with Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [2] Stoica P., Moses R., Introduction to Spectral Analysis. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [3] Stoica P., List of references on spectral line analysis// Signal Process. 1993. V. 31, № 3. P. 1298–1319.
- [4] Kay S.M., Modern Spectral Estimation: Theory and Application. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [5] B. G. Quinn and E. J. Hannan, The Estimation and Tracking of Frequency Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [6] Rife D.C., Boorstyn R.R., Multiple tone parameter estimation from discrete-time observations // Bell Syst. Tech. J. 1976. P. 1389–1410.
- [7] P. Stoica and A. Nehorai, "Statistical analysis of two nonlinear least squares estimators of sine wave parameters in the colored noise case," in Proc. Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 4, New York, 1988, pp. 2408–2411.
- [8] M. D. Rahman and K. B. Yu, "Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 5, pp. 1440–1454, Oct. 1987.
- [9] Ivanov D.V., Katsyuba O.A., Grigorovskiy, B.K. Determination of frequency in three-phase electric circuits with autocorrelated noise. // Russ. Electr. Engin. 2017. № 88, P. 123–126.
- [10] Y. T. Chan, J. M. M. Lavoie, and J. B. Plant, "A parameter estimation approach to estimation of frequencies of sinusoids," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process., vol. ASSP-29, no. 2, pp. 214–219, Apr. 1981.
- [11] Y. T. Chan and R. P. Langford, "Spectral estimation via the high-order Yule-Walker equations," IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-30, no. 5, pp. 689–698, Oct. 1982.
- [12] Li T.H., Kedem B. Iterative filtering for multiple frequency estimation//IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42, №. 5, P. 1120–1131, 1994.

- [13] Markovsky I., Van Huffel S., Overview of total least-squares methods //Signal Processing. 2007. V.87, №.10. P. 2283-2302.
- [14] Ivanov D.V. et al, Identification of exponential trend models with fractional white noise //J. Phys.: Conf. Ser., 2019. 1368 042061.
- [15]. Golub G. H.; van Loan C.F. Matrix Computations (3rd ed.), Johns Hopkins University Press, 1996.
- [16] Wilkinson, J. H.,The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University Press, Inc. 1988.
- [17] Zhdanov A.I. Solving incorrect stochastic linear algebraic equations by the regularized maximum likelihood method. // ZhVMiMF. 1988.V. 28. No. 9. S. 1420-1425.
- [18] Zhdanov A.I., Shamarov P.A., Direct projection method in the problem of complete least squares // Autom. Remote Control. 2000. V. 61, № 4, P. 610-620.
- [19] Stoica P., Moses R.L., Soderstrom T., Li J., Optimal high-order Yule-Walker estimation of sinusoidal frequencies // IEEE Transactions on Signal Processing. 1991. V. 39, № 6, P. 1360-1368, doi: 10.1109/78.136542.

Estimation of Frequencies of Sinusoids Based on the Augmented Equivalent Systems

D.V. Ivanov, O.I. Mitroshin

Samara State University of Transport, Samara, dvi85@list.ru

Abstract — A large number of papers are devoted to the problem of estimating the frequencies of sinusoids from a finite number of discrete noisy measurements because of its widespread use in science and technology. Estimating the frequencies of sinusoids based on the total least-squares method (TLS) allows us to obtain more accurate estimates compared to the ordinary least-squares method (OLS). The most common algorithm for solving the total least squares problem is an algorithm based on a singular matrix decomposition. This algorithm has high computational complexity. An alternative method for solving the problem of complete least squares is the approach based on biased normal systems. The paper proposes an estimate of the frequencies of sinusoids from discrete measurements with noise based on augmented equivalent systems. The ability to obtain a solution of the complete least squares problem without finding the right singular vector and multiplying the data matrices is an undeniable advantage of frequency estimates based on augmented systems compared to solutions based on a singular matrix decomposition or a biased normal system, respectively. The simulation results show that frequency estimates based on augmented systems are comparable in accuracy with the solution of the complete least squares problem based on a singular matrix decomposition and have a significantly lower condition number than a shifted normal system of equations.

Keywords — Total Least Squares Method, Resolution, Frequency Estimation.

REFERENCES

- [1] Marple S.L., Digital Spectral Analysis with Applications. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1987.
- [2] Stoica P., Moses R., Introduction to Spectral Analysis. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1997.
- [3] Stoica P., List of references on spectral line analysis// Signal Process. 1993. V. 31, № 3. P. 1298–1319.
- [4] Kay S.M., Modern Spectral Estimation : Theory and Application. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988.
- [5] B. G. Quinn and E. J. Hannan, The Estimation and Tracking of Frequency Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [6] Rife D.C., Boorstyn R.R., Multiple tone parameter estimation from discrete-time observations // Bell Syst. Tech. J. 1976. P. 1389–1410.
- [7] P. Stoica and A. Nehorai, “Statistical analysis of two nonlinear least squares estimators of sine wave parameters in the colored noise case,” in Proc. Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. 4, New York, 1988, pp. 2408–2411.
- [8] M. D. Rahman and K. B. Yu, “Total least squares approach for frequency estimation using linear prediction,” IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 5, pp. 1440–1454, Oct. 1987.
- [9].Ivanov D.V., Katsyuba O.A., Grigorovskiy, B.K. Determination of frequency in three-phase electric circuits with autocorrelated noise. // Russ. Electr. Engin. 2017. № 88, P. 123–126 .
- [10] Y. T. Chan, J. M. M. Lavoie, and J. B. Plant, “A parameter estimation approach to estimation of frequencies of sinusoids,” IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Process., vol. ASSP-29, no. 2, pp. 214–219, Apr. 1981.
- [11] Y. T. Chan and R. P. Langford, “Spectral estimation via the high-order Yule-Walker equations,” IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Processing, vol. ASSP-30, no. 5, pp. 689–698, Oct. 1982.
- [12] Li T.H., Kedem B. Iterative filtering for multiple frequency estimation//IEEE Trans. Signal Processing. 1994. V. 42, №. 5, P. 1120–1131, 1994.
- [13] Markovsky I., Van Huffel S., Overview of total least-squares methods //Signal Processing. 2007. V.87, №.10. P. 2283-2302,
- [14] Ivanov D.V. et al, Identification of exponential trend models with fractional white noise //J. Phys.: Conf. Ser., 2019. 1368 042061.
- [15]. Golub G. H.; van Loan C.F. Matrix Computations (3rd ed.), Johns Hopkins University Press, 1996.
- [16] Wilkinson, J. H.,The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford University Press, Inc. 1988.
- [17] Zhdanov A.I. Solving incorrect stochastic linear algebraic equations by the regularized maximum likelihood method. // ZhVMiMF. 1988.V. 28. No. 9. P. 1420-1425.
- [18] Zhdanov A.I., Shamarov P. A., Direct projection method in the problem of complete least squares, Autom. Remote Control. 2000. V. 61, № 4, P. 610-620.
- [19] Stoica P., Moses R.L., Soderstrom T., Li J., Optimal high-order Yule-Walker estimation of sinusoidal frequencies // IEEE Transactions on Signal Processing. 1991. V. 39, № 6, P. 1360-1368, doi: 10.1109/78.136542.