УДК 621.391.84 DOI: 10.31114/2078-7707-2020-4-217-224

Структурная точность цифровых фильтров и структура коэффициентов знаменателя передаточной функции

В.А. Лесников[1], Т.В. Наумович[2], А.В. Частиков[3]

Вятский государственный университет, г. Киров

[1]Vladislav.Lesnikov.Ru@ieee.org, [2]ntv_new@mail.ru, [3]AlChast@mail.ru

***Аннотация* — Данная работа является составной частью проекта синтеза рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова. Реализация проекта предусматривает учет конечной длины слова уже на этапе расчета нулей и полюсов. Результаты этого этапа являются окончательными и не искажаются на этапе структурного синтеза. При расчете используется тот факт, что нули и полюсы практически реализуемого цифрового фильтра являются элементами множества алгебраических чисел соответствующей степени. На этапе структурного синтеза производится генерация структурной схемы цифрового фильтра. Эта структурная схема обеспечивает заданные степени алгебраических чисел, которые являются нулями и полюсами. Точные значения коэффициентов сгенерированной структуры цифрового фильтра рассчитываются с учетом ранее вычисленных нулей и полюсов. Различные структуры характеризуются структурной точностью, не зависящей от конкретных значений коэффициентов. Данная статья посвящена исследованию генерации структур, обеспечивающих заданную структурную точность знаменателя передаточной функции и заданную степень алгебраических чисел, являющихся полюсами.**

***Ключевые слова* — рекурсивные цифровые фильтры, конечная длина слова, алгебраические числа, структурная точность, топологическая матрица.**

I. Введение

Рекурсивные цифровые фильтры (РЦФ), как известно [1], имеют существенные преимущества перед нерекурсивными цифровыми фильтрами (НЦФ). Обратные связи, имеющиеся в структуре РЦФ, обеспечивают длительность импульсной характеристики РЦФ значительно большую, чем значение его порядка. Теоретически, если не учитывать конечность разрядности, эта длительность является бесконечной (РЦФ часто называют БИХ ЦФ – ЦФ с бесконечной импульсной характеристикой). Поэтому РЦФ позволяют реализовать заданные характеристики при существенно меньшем значении порядка, а значит и при меньших затратах вычислительных ресурсов, чем НЦФ. Однако, несмотря на длительную историю [2], проблема синтеза РЦФ с учетом конечной длины слова весьма далека от окончательного решения. При отсутствии жестких требований к характеристикам ЦФ задача синтеза и реализации и при условии ограниченной разрядности решается достаточно просто. При усложнении же требований к характеристикам ЦФ проявляется большое число проблем, которые оказываются непреодолимыми при практической реализации. Это обстоятельство приводит к тому, что разработчики отказываются от попыток реализовать преимущества рекурсивных ЦФ перед НЦФ.

Подтверждением этого может служить такой факт. Для реализации на программируемых логических интегральных схемах корпорация Altera предлагала разработчикам такое средство проектирования, как компилятор БИХ ЦФ IIR Compiler. Однако в 2003 году Altera прекратила поддержку этого продукта [3]. Xilinx тоже не имеет подобного средства. В то же время, как Xilinx, так и Intel FPGA поддерживают компилятор НЦФ (FIR Compiler).

Упомянутые трудности объясняются недостаточной глубиной знаний фундаментальных особенностей вычислительных процессов в рекурсивных ЦФ и отсутствием средств разработки, учитывающих эти особенности. Данная работа является развитием подхода, развиваемого в цикле публикаций авторов, к числу которых относятся [4]-[14], и в ней предлагается новый подход к синтезу рекурсивных ЦФ с конечной длиной слова, в котором предприняты попытки преодолеть упомянутые трудности синтеза.

Особенностью разрабатываемого подхода является то, что конечная длина слова учитывается еще до этапа структурного синтеза на этапе функционального синтеза. На этом этапе рассчитываются нули и полюсы передаточной функции, значения которых на последующих этапах не меняется. При этих расчетах учитывается тот факт, что в РЦФ с конечной разрядностью коэффициентов, нули и полюсы являются элементами множества алгебраических чисел [8] – [10].

На этапе структурного синтеза разрабатываемый подход предусматривает генерацию структур с учетом выявленных алгебраических и теоретико-числовых аспектов [11] - [14].

Данная работа относится к решению задачи повышения эффективности генерации структур, соответствующих результатам предыдущего этапа – этапа функционального синтеза.

II. Взаимосвязь передаточной функции ЦФ и топологической матрицы, описывающей его структуру

Алгоритм цифровой фильтрации основан на многократном циклическом повторении множества операций, описывающих вычисление очередного отсчета выходной последовательности. Множество этих операций принято изображать графически в виде структурной схемы ЦФ. Адекватной математической моделью структурной схемы является взвешенный ориентированный граф $\mathrm{G}=(\mathrm{V},\mathrm{E})$, N вершин $v_i \in \mathrm{V}$ которого ($i=1,...,N$) соответствуют узлам структурной схемы, а веса дуг $e_{ij} \in \mathrm{E}$ которого, соответствуют коэффициентам передачи t_{ij} от узла с номером j к узлу с номером i (предполагается, что коэффициент передачи рассчитывается для z-преобразований последовательностей отсчетов, вычисляемых в узлах). Граф G будем описывать матрицей смежности [15] $\mathbf{T}(z)$, которую будем называть топологической матрицей.

Условием физической реализуемости (вычислимости) ЦФ с топологической матрицей $\mathbf{T}(z)$ является существование такой нумерации узлов структурной схемы, что все элементы топологической матрицы, отличные от 0 и от z^{-1}, будут располагаться ниже главной диагонали [15]. В структурных схемах таких ЦФ отсутствуют замкнутые контуры без блоков задержки.

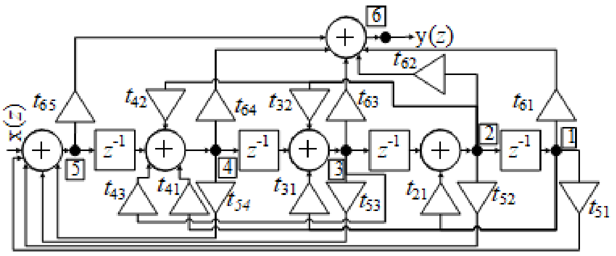

Рис. 1. Пример структурной схемы ЦФ (порядок ЦФ $n=4$, число узлов $N=6$)

На рис. 1 представлен пример структурной схемы РЦФ четвертого порядка. Топологическая матрица такой схемы имеет следующий вид

$$\mathbf{T}(z)=\begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & 0 & z^{-1} & 0 \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 0 & 0 \\ t_{61} & t_{62} & t_{63} & t_{64} & t_{65} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Работа ЦФ с произвольной топологической матрицей $\mathbf{T}(z)$, с произвольными входными и выходными узлами описывается матричным уравнением

$$\mathbf{Y}(z)=\mathbf{T}(z)\mathbf{Y}(z)+\mathbf{I}\,\mathrm{x}(z), \qquad (2)$$

где $\mathrm{x}(z)$ - z-преобразование входной последовательности, $\mathbf{Y}(z)=[\mathrm{y}_{ij}(z)]$ - матрица z-преобразований последовательностей, вычисленных в i-х узлах структуры, если входная последовательность подается на j-й узел, $\mathbf{I}$ - единичная матрица. Из уравнения (2) легко получить выражение для матрицы передаточных функций

$$\mathbf{H}(z)=\left[\mathrm{H}_{ij}(z)\right]=\frac{1}{\mathrm{x}(z)}\mathbf{Y}(z)=\left(\mathbf{I}-\mathbf{T}(z)\right)^{-1}, \qquad (3)$$

где $\mathrm{H}_{ij}(z)$ - передаточная функция ЦФ, описываемого топологической матрицей $\mathbf{T}(z)$, причем i и j - номера выходного и входного узлов, соответственно.

Передаточная функция произвольного РЦФ n-го порядка описывается выражением

$$\mathrm{H}(z)=\sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i} \Bigg/ \left(z^n+\sum_{i=1}^{n} a_i z^{n-i}\right). \qquad (4)$$

Уравнение (3) позволяет установить связь между коэффициентами полиномов числителя и знаменателя передаточной функции b_i и a_i и коэффициентами структурной схемы t_{ij} (элементами топологической матрицы).

Для РЦФ, представленного на рис. 1, соответствующие соотношения имеют следующий вид:

$$\begin{cases} a_1 = \; -t_{21}-t_{32}-t_{43}-t_{54}, \\ a_2 = t_{21}t_{43}-t_{42}-t_{53}-t_{31}+t_{21}t_{54}+t_{32}t_{54}, \\ a_3 = t_{21}t_{53}-t_{52}-t_{41}+t_{31}t_{54}, \\ a_4 = \; -t_{51}, \\ b_0 = \; -t_{65}, \\ b_1 = t_{21}t_{65}-t_{64}+t_{32}t_{65}+t_{43}t_{65}, \\ b_2 = t_{21}c_{64}-t_{63}+t_{31}t_{65}+t_{32}t_{64}+t_{42}t_{65}-t_{21}t_{43}t_{65}, \\ b_3 = t_{21}t_{63}-t_{62}+t_{31}t_{64}+t_{41}t_{65}, \\ b_4 = \; -t_{61}. \end{cases} \qquad (5)$$

Обратим внимание на то, что коэффициенты полиномов передаточной функции представляют собой сумму некоторых произведений некоторых коэффициентов ЦФ.

III. Структурная точность РЦФ

Под структурной точностью РЦФ будем понимать некоторую зависящую от структурной схемы характеристику, которая описывает точность вычислений инвариантно к конкретным параметрам фильтра (численным значениям коэффициентов структуры). В [7] было показано, что структурная точность определяется двумя факторами – степенью алгебраических чисел, являющихся нулями и полюсами ЦФ, и фактором, который будем называть структурой коэффициентов передаточной функции.

A. Алгебраико-числовая природа нулей и полюсов РЦФ – первый фактор структурной точности

Коэффициенты любого реального фильтра имеют конечную разрядность, поэтому они являются элементами множества рациональных чисел. Отсюда следует, что и коэффициенты b_i и a_i полиномов числителя и знаменателя передаточной функции (4) для практически реализуемых РЦФ, являясь суммой произведений определенных коэффициентов t_{kl}, также являются элементами множества рациональных чисел, а не принадлежат континууму вещественных чисел, как это было бы без учета конечной длины слова коэффициентов фильтра t_{kl}.

В то же время известно [16], [17], что корни полиномов $\mathrm{P}(z)$ с рациональными коэффициентами являются элементами счетного множества алгебраических чисел. Таким образом, нули z_{zi} и полюсы z_{pi} практически реализуемых РЦФ являются алгебраическими числами. Алгебраические числа характеризуются степенью (ниже мы будем говорить о степени нулей и полюсов). Степенью алгебраического числа z называется степень минимального (канонического) полинома этого числа - единственного полинома наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным единице [16], [17].

Максимальная степень алгебраического числа, являющегося корнем полинома $\mathrm{P}_n(z)$ n-й степени с рациональными коэффициентами, равна степени этого полинома n. Но в общем случае степень корня полинома может быть меньшей, чем n [13], [14]. В [14], [18] проведен анализ степеней нулей и полюсов некоторых классических структур ЦФ. Степень нулей и полюсов прямых форм РЦФ (I, II, транспонированные формы) равна порядку ЦФ. Степень нулей и полюсов каскадной формы ЦФ четного порядка равна двум. Степень полюсов параллельной формы четного порядка равна двум, а степень нулей равна порядку фильтра.

Проведенные исследования свойств топологической матрицы [11, 14, 18] показывают, что при генерации топологических матриц можно управлять степенью полюсов. Степень полюсов связана с «тонкой» структурой топологической матрицы следующим образом.

В топологической матрице $\mathbf{T}(z)$ необходимо выбрать квадратные подматрицы $\mathbf{T}_i$ со следующими свойствами. Первый элемент первой строки подматрицы является элементом главной диагонали $\mathbf{T}(z)$, а последний равен z^{-1} ($\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{T}_3$ и $\mathbf{T}_4$ на рис. 2).

Затем необходимо изолировать кластеры подматриц $\mathbf{T}_i$ так, чтобы подматрицы, включенные в кластер, имели общие элементы по меньшей мере с одной другой подматрицей кластера.

$$\mathrm{T}_1 \quad \mathrm{T}_0 \quad \mathrm{T}_2 \quad \mathrm{T}_4 \quad \mathrm{T}_3$$

$$\mathbf{T}(z)=\begin{bmatrix} 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ t_{p,1} & . & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ t_{p+1,1} & . & c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 & . & 0 \\ t_{p+2,1} & . & c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 & z^{-1} & . & 0 \\ t_{p+3,1} & . & c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & z^{-1} & 0 & . & 0 \\ t_{p+4,1} & . & c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 & 0 & . & 0 \\ t_{p+5,1} & . & c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ t_{N,1} & . & t_{N,q} & t_{N,q+1} & t_{N,q+2} & t_{N,q+3} & t_{N,q+4} & t_{N,q+5} & . & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 2. Пример «тонкой» структуры топологической матрицы

Далее выбирается подматрица $\mathbf{T}_0$ минимальной размерности, подматрицами которой являются матрицы $\mathbf{T}_0$ этого кластера. Первая строка и последний столбец матрицы $\mathbf{T}_0$ должны содержать элементы, равные z^{-1}.

Оказалось, что степень полюсов фильтра с такой структурой зависит только от подматриц $\mathbf{T}_0$. В то же время нули и полином числителя передаточной функции зависят от всех элементов $\mathbf{T}(z)$.

Было установлено, что подматрица $\mathbf{T}_0$ соответствует полюсам, степень которых равна числу подматриц $\mathbf{T}_i$, содержащихся в $\mathbf{T}_0$. Таким образом, рис. 2 описывает РЦФ, который имеет четыре полюса, являющиеся алгебраическими числами четвертой степени.

Поскольку топологическая матрица изображена не полностью, нельзя сделать вывод о порядке фильтра, поскольку $\mathbf{T}(z)$ может содержать другие подматрицы, подобные $\mathbf{T}_0$. Но в любом случае порядок фильтра не меньше четвертого.

Для удобства дальнейшего обсуждения введем компактные обозначения для структуры матрицы $\mathbf{T}_0$ размерности $N_0 \times N_0$:

$$\mathbf{Str}_{N_0}=\left[R_1 \quad R_2 \quad \ldots \quad R_{N_0-1}\right]. \tag{6}$$

Если $R_j \neq 0$, то $N_i \times N_i$ - это размерность подматрицы $\mathbf{T}_i$ ($i \geq 1$), для которой элемент z^{-1} находится в j-й строке матрицы $\mathbf{T}_0$, где

$$N_i = R_j - j. \tag{7}$$

Матрицу $\mathbf{T}_0$, показанную на рис. 2, обозначим как

$$\mathbf{Str}_6=\left[2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \quad 0\right]. \tag{8}$$

К сожалению, для нулей такого простого подхода к формированию степени получить не удается. Некоторые результаты в этой области представлены в [25]. Итак, при генерации топологической матрицы можно обеспечить необходимую степень полюсов. Покажем теперь, что степень полюсов является одним из факторов структурной точности.

При одинаковой разрядности дробной части коэффициентов полинома мощность счетного множества допустимых корней быстро возрастает с увеличением степени алгебраических чисел (рис. 3 и рис. 4), а значит и увеличивается точность реализации полюсов при одной и той же разрядности дробной части коэффициентов передаточной функции.

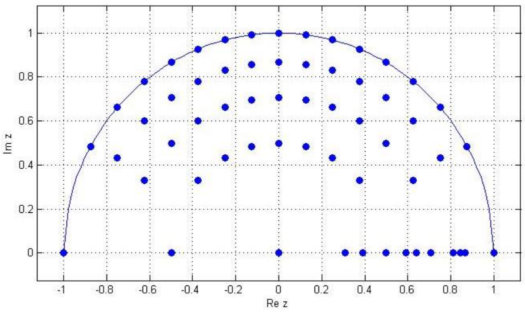

Рис. 3. Топография алгебраических чисел второй степени (длина дробной части коэффициентов полинома $m = 2$)

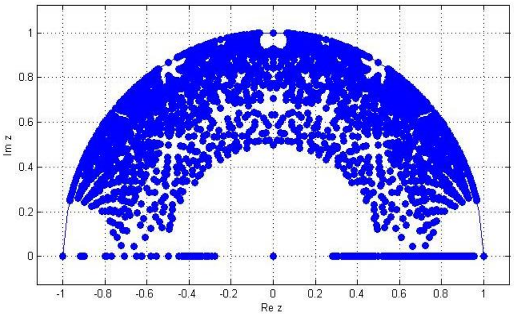

Рис. 4. Топография алгебраических чисел четвертой степени (длина дробной части коэффициентов полинома $m = 2$)

Итак, первым фактором структурной точности будет параметр

$$\mathbf{AlgPw} = \begin{bmatrix} n_z & n_p \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где n_z и n_p - степени нулей и полюсов, соответственно.

B. Взаимосвязь между разрядностью дробных частей сомножителей и произведений

Материал в этом разделе будет использоваться ниже при определении такого понятия, как «структура коэффициентов фильтра». Предположим, что рассматриваемые числа состоят из целой и дробной частей. Числа представлены двоичным кодом с фиксированной точкой. Конкретные арифметические аспекты реализации цифрового оборудования в этом случае не рассматриваются. Представляет интерес только точность представления коэффициента. Предыдущие исследования показали, что положение нулей и полюсов в плоскости z определяется разрядностью дробной части коэффициентов передаточной функции [9], [10]. Поэтому в этом случае разрядность целой части чисел не учитывается.

Рассмотрим произведение q чисел:

$$\mathrm{Pr} = \prod_{i=1}^{q} p_i \,. \tag{10}$$

Очевидно, что разрядность m_{Pr} дробной части произведения Pr зависит от разрядностей m_{p_i} дробных частей сомножителей p_i:

$$m_{\mathrm{Pr}} = \sum_{i=1}^{q} m_{p_i} \,. \tag{11}$$

Для приведенного выше примера ЦФ, коэффициенты которого определяются системой уравнений (5), полагая, что разрядности дробных частей всех коэффициентов t_{ij} одинаковы и равны

$$m_{t_{ij}} = m \,, \tag{12}$$

можно записать выражения для разрядности дробных частей коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции:

$$\begin{cases} m_{a_1} = m_{a_4} = m_{b_0} = m_{b_4} = m, \\ m_{a_2} = m_{a_3} = m_{b_1} = m_{b_3} = 2m, \\ m_{b_2} = 3m. \end{cases} \tag{13}$$

C. Структура коэффициентов РЦФ – второй фактор структурной точности

Вторым компонентом структурной точности является параметр, который мы назвали «структура коэффициента». Он состоит из двух частей. Первая часть

$$\mathbf{Sc}_{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} s_{b_0} & \ldots & s_{b_n} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} m_{b_0} & \ldots & m_{b_n} \end{bmatrix} \tag{14}$$

это структура коэффициентов числителя передаточной функции, вторая часть

$$\mathbf{Sc}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} s_{a_1} & \ldots & s_{a_n} \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} m_{a_1} & \ldots & m_{a_n} \end{bmatrix} \tag{15}$$

— это структура коэффициентов знаменателя.

Учитывая (5), можно записать следующие соотношения

$$\mathbf{Sc}_{\mathrm{n}} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} m & 2m & 3m & 2m & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\mathbf{Sc}_{\mathrm{d}} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} m & 2m & 2m & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

При одинаковой длине дробных частей коэффициентов РЦФ структура коэффициентов представляет собой вектор, элементами которого являются максимальное число сомножителей в произведениях, составляющих выражения коэффициентов передаточной функции через коэффициенты структурной схемы фильтра.

В этой работе мы ограничились изучением структуры коэффициентов знаменателя, поскольку природа структуры коэффициентов числителя имеет существенно иной характер.

IV. Генерация структур с заданной структурной точностью полюсов

Предполагается, что на этапе функционального синтеза значения нулей и полюсов, удовлетворяющих заданным требованиям, были получены с учетом конечной длины слова. Это означает, что входными данными для структурного синтеза являются степень n алгебраических чисел, которые являются нулями и полюсами, и разрядность коэффициентов передаточной функции. Коэффициенты передаточной функции фильтра представляют собой коэффициенты канонической формы (прямая форма II), эквивалентной структуре, которая будет получена на этапе структурного синтеза. Мы называем такую структуру эквивалентной канонической формой. В этой статье мы ограничимся только генерацией матрицы $\mathbf{T}_0$, которая обеспечивает точную реализацию заданных полюсов передаточной функции фильтра. В предыдущем разделе показано, как тонкая структура матрицы $\mathbf{T}_0$ обеспечивает реализацию полюсов с необходимой степенью. Минимально возможное количество узлов генерируемой структуры (размерность матрицы $\mathbf{T}_0$) равно

$$\min(N_0) = n_p + 1 . \tag{18}$$

Однако, если значения N_0 невелики, то для коэффициента a_i значение s_{a_i}, которое является элементом вектора структуры коэффициента $\mathbf{Sc}_d$, слишком мало, что ограничивает возможность уменьшения разрядности коэффициентов c_{ij}.

A. *Генерация структур для полюсов второй степени ($n_p = 2$)*

Используя возможности символических вычислений систем компьютерной алгебры Maple и Matlab, для $n_p = 2$ мы вывели все возможные выражения для коэффициентов a_1 и a_2 как функций от коэффициентов c_{ij} и соответствующих векторов структуры коэффициентов $\mathbf{Sc}_d$ для $3 \le N_0 \le 8$.

Было обнаружено, что число различных структур для фиксированного N_0 равно

$$N_{str2} = (N_0 - 2)^2 \tag{19}$$

При генерации структур, реализующих полюсы второй степени, можно наблюдать следующие закономерности.

$$s_{a_2} = N_0 - 2 , \tag{20}$$

$$\max\left(s_{a_1}\right) = N_0 - 1 . \tag{21}$$

Для структур $\mathbf{Str}_{N_0} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \ldots & R_{N_0-1} \end{bmatrix}$ структура коэффициентов имеет вид $\mathbf{Sc}_d = \begin{bmatrix} s_{a1} & s_{a2} \end{bmatrix}$, где

$$s_{a1} = \begin{cases} d, & \text{если} \quad d \ge N_1 - 1, \\ N_1 - 1, & \text{если} \quad d < N_1 - 1, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$d = R_{i\mathrm{mx}} - i\mathrm{mx} , \tag{23}$$

$$R_{i\mathrm{mx}} = \max\left(N_i\right) . \tag{24}$$

B. *Генерация структур для полюсов третьей степени ($n_p = 3$)*

Анализ конкретных матриц $\mathbf{T}_0$ позволяет найти закономерности, связывающие их тонкую структуру $\mathbf{Str}_{N_0}$ со структурой коэффициентов $\mathbf{Sc}_d = \begin{bmatrix} s_{a_1} & s_{a_2} & s_{a_3} \end{bmatrix}$:

$$s_{a_1} = \max_{N_i \ne 0}\left(N_i - i\right) - 1 , \tag{25}$$

$$s_{a_2} = N_0 - 2 - g , \tag{26}$$

где

$$g = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad N_1 + N_3 \ge N_0, \\ 1, & \text{если} \quad N_1 + N_3 < N_0. \end{cases} \tag{27}$$

$g = 0$ соответствует наличию общих элементов у матриц $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_3$.

C. *Генерация структур для полюсов четвертой степени ($n_p = 4$)*

К сожалению, получить аналитические выражения, связывающие описание структуры $\mathbf{Str}_{N_0} = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & \ldots & R_{N_0-1} \end{bmatrix}$ матрицы $\mathbf{T}_0$ и структуру коэффициентов $\mathbf{Sc}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} s_{a_1} & s_{a_2} & s_{a_3} & s_{a_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}$, не удалось. Частные случаи этих выражений опубликованы в [19]. Ниже, в табл. 1, представлены конкретные значения структуры коэффициентов для всех структур матрицы $\mathbf{T}_0$ при $5 \le N_0 \le 7$.

Таблица 1

Структура коэффициентов для полюсов четвертой степени

N_0	r_1	r_2	r_3	r_4	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
5	1	2	2	1	2	3	4	5		
6	2	3	3	2	2	3	4	6	0	
6	2	3	3	2	2	3	4	0	6	
6	2	3	3	2	2	3	5	0	6	
6	2	3	3	2	2	3	5	6	0	
6	2	3	3	2	2	4	0	5	6	
6	2	3	3	2	3	0	4	5	6	
6	2	3	3	2	3	4	0	5	6	
6	2	3	3	2	3	4	5	0	6	
6	2	4	3	2	3	4	5	6	0	
6	3	3	3	2	2	5	4	0	6	
6	3	3	3	2	2	5	4	6	0	
6	3	3	3	2	3	5	4	0	6	
6	3	4	3	2	2	3	6	5	0	
6	3	4	3	2	2	4	6	5	0	
6	3	4	3	2	4	3	0	5	6	
6	3	4	3	2	4	3	6	5	0	
6	3	4	3	2	4	3	5	0	6	
6	3	4	3	2	4	3	5	6	0	
6	3	4	3	2	3	5	4	6	0	
6	3	4	3	2	3	4	6	5	0	
6	4	4	3	2	2	6	4	5	0	
6	4	4	3	2	5	3	4	0	6	
6	4	4	3	2	5	3	4	6	0	
6	4	4	3	2	3	6	4	5	0	
6	5	4	3	2	6	3	4	5	0	
7	2	3	3	3	2	4	0	6	0	7
7	2	3	4	3	2	3	5	0	7	0
7	2	3	4	3	3	0	5	0	6	7
7	2	4	4	3	2	4	0	5	7	0
7	2	4	4	3	2	4	5	0	7	0
7	2	4	4	3	2	4	0	6	7	0
7	2	4	4	3	3	0	5	6	0	7
7	2	4	4	3	3	0	5	6	7	0
7	3	4	4	3	2	3	4	7	0	0
7	3	4	4	3	2	3	5	7	0	0
7	3	4	4	3	2	3	6	0	0	7
7	3	4	4	3	2	3	6	0	7	0
7	3	4	4	3	2	3	6	7	0	0
7	3	4	4	3	2	4	5	7	0	0
7	3	4	4	3	2	4	0	7	6	0
7	3	4	4	3	2	4	6	0	7	0
7	3	4	4	3	2	4	6	7	0	0
7	3	4	4	3	2	5	0	0	6	7
7	3	4	4	3	2	5	0	7	6	0
7	3	4	4	3	2	5	0	6	0	7
7	3	4	4	3	2	5	0	6	0	0
7	3	4	4	3	2	5	6	0	0	7
7	3	4	4	3	2	5	6	0	7	0
7	3	4	4	3	2	5	6	7	0	0
7	3	4	4	3	3	5	0	0	6	7
7	3	4	4	3	3	5	0	6	0	7
7	3	4	4	3	3	5	0	6	7	0
7	3	4	4	3	3	5	6	0	0	7
7	3	4	4	3	3	5	6	0	7	0
7	3	4	4	3	4	0	5	6	0	7
7	3	4	4	3	4	5	0	0	6	7
7	3	4	4	3	4	5	0	6	0	7
7	3	4	4	3	4	5	6	0	0	7
7	3	5	4	3	3	0	5	7	6	0
7	3	5	4	3	3	5	0	7	6	0
7	3	5	4	3	3	5	6	7	0	0
7	3	5	4	3	4	0	5	6	7	0
7	3	5	4	3	4	5	0	7	6	0
7	3	5	4	3	4	5	0	6	7	0
7	3	5	4	3	4	5	6	0	7	0
7	3	5	4	3	4	5	6	7	0	0
7	4	4	4	3	2	6	4	0	0	7
7	4	4	4	3	2	6	4	0	7	0
7	4	4	4	3	2	6	4	7	0	0
7	4	4	4	3	2	6	0	5	0	7
7	4	4	4	3	2	6	0	5	7	0
7	4	4	4	3	2	6	5	0	0	7
7	4	4	4	3	2	6	5	0	7	0
7	4	4	4	3	2	6	5	7	0	0
7	4	4	4	3	3	6	0	5	0	7
7	4	4	4	3	3	6	5	0	0	7
7	4	4	4	3	3	6	5	0	7	0
7	4	4	4	3	4	6	5	0	0	7
7	4	5	4	3	2	3	7	5	7	0
7	4	5	4	3	2	3	7	0	6	0
7	4	5	4	3	2	3	7	6	0	0
7	4	5	4	3	2	4	7	5	0	0
7	4	5	4	3	2	4	7	0	6	0
7	4	5	4	3	2	4	7	6	0	0
7	4	5	4	3	2	6	7	5	0	0
7	4	5	4	3	2	5	7	0	6	0
7	4	5	4	3	2	5	7	6	0	0
7	4	5	4	3	3	0	7	5	6	0
7	4	5	4	3	3	6	7	5	0	0
7	4	5	4	3	3	6	5	7	0	0
7	4	5	4	3	3	5	7	0	6	0
7	4	5	4	3	3	5	7	6	0	0
7	4	5	4	3	5	0	4	0	6	7
7	4	5	4	3	5	0	4	7	6	0
7	4	5	4	3	5	0	4	6	0	7
7	4	5	4	3	5	0	4	6	7	0
7	4	5	4	3	5	6	4	0	0	7
7	4	5	4	3	5	6	4	0	7	0
7	4	5	4	3	5	6	4	7	0	0
7	4	5	4	3	4	6	5	0	7	0
7	4	5	4	3	4	6	5	7	0	0
7	4	5	4	3	4	5	7	0	6	0
7	4	5	4	3	4	5	7	6	0	0
7	5	5	4	3	2	7	4	0	6	0
7	5	5	4	3	2	5	4	6	0	0
7	5	5	4	3	2	7	0	5	6	0
7	5	5	4	3	2	7	6	5	0	0
7	5	5	4	3	2	7	5	0	6	0
7	5	5	4	3	2	7	5	6	0	0
7	5	5	4	3	3	7	0	5	6	0
7	5	5	4	3	3	7	6	5	0	0
7	5	5	4	3	3	7	5	0	6	0
7	5	5	4	3	3	7	5	6	0	0
7	5	5	4	3	5	7	4	0	6	0
7	5	5	4	3	5	7	4	6	0	0
7	5	5	4	3	4	7	5	6	0	0
7	6	5	4	3	7	3	0	5	6	0
7	6	5	4	3	7	3	6	5	0	0
7	6	5	4	3	7	3	5	0	6	0
7	6	5	4	3	7	3	5	6	0	0
7	6	5	4	3	7	0	4	5	6	0
7	6	5	4	3	7	6	4	5	0	0
7	6	5	4	3	7	5	4	0	6	0
7	6	5	4	3	7	5	4	6	0	0
7	6	5	4	3	7	4	0	5	6	0
7	6	5	4	3	7	4	6	5	0	0
7	6	5	4	3	7	4	5	0	6	0

N_0	r_1	r_2	r_3	r_4	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
7	6	5	4	3	7	4	5	6	0	0

V. Заключение

Эта статья была подготовлен в рамках проекта, посвященного разработке нового подхода к синтезу цифровых рекурсивных фильтров с конечной длиной слова. Этот подход предполагает учет конечной длины слова уже на этапе вычисления нулей и полюсов еще до этапа структурного синтеза. В этом случае учитывается, что нули и полюсы практически реализованных фильтров являются элементами множества алгебраических чисел соответствующей степени. Затем создаются структуры фильтра с квантованными коэффициентами, вычисленные значения нулей и полюсов которых не должны искажаться. Это достигается за счет использования ранее полученных знаний о тонкой структуре матрицы коэффициентов передачи между узлами структурной схемы. Описан способ создания структур, который учитывает структурную точность фильтра, независимо от его конкретных характеристик. Структурная точность определяется степенью алгебраических чисел, которые являются полюсами фильтра, и структурой коэффициентов знаменателя передаточной функции. Получены эвристические выражения, которые упрощают процесс генерации структур для некоторых значений размерности структуры (количество узлов). Отсутствие таких выражений в общих чертах не является препятствием для решения проблемы структурного синтеза. Всю необходимую информацию можно получить, используя возможности символьных вычислений систем компьютерной алгебры Maple и Matlab. Планы для дальнейших исследований включают получение новых выражений, которые позволят нам генерировать структуры с заданной структурной точностью без использования Maple или Matlab. Планируется расширить методы структурного синтеза с учетом структурной точности нулей передаточной функции.

Поддержка

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00986.

Литература

[1] Wanhammar L., Saramäki T. Digital filters using MATLAB. Springer Nature Switzerland AG. 2020. 798 p.

[2] Butterweck H.J., Ritzerfeld J.H.F., Werter M.J. Finite wordlength effects in digital filters: a review // EUT report, E, Fac. of Electrical Engineering. V. 88-E -205. Eindhoven: Eindhoven University of Technology. 1988.

[3] Does Altera support IIR compiler? URL: https://www.intel.com/content/www/us/en/programmable/support/support-resources/knowledge-base/solutions/rd04072011_238.html (дата обращения 04.07.2020).

[4] Лесников В.А., Наумович Т.В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров: Вятский государственный университет, 2006. 196 с.

[5] Лесников В.А., Наумович Т.В. Структурный синтез цифровых фильтров. Киров: О-краткое, 2008. 160 с.

[6] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем - 2010. М.: ИППМ РАН, 2010. С. 466-471. URL: http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf (дата обращения 28.06.2020).

[7] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Синтез рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова: проблемы и их решения // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. М.: ИППМ РАН, 2018. Выпуск 4. С. 89-97.

[8] Лесников В.А., Наумович Т.В., Решетников С.М., Частиков А.В. Алгебраико-числовая природа нулей и полюсов рекурсивных цифровых фильтров // Глобальный научный потенциал. 2011. № 9. С. 52 –55.

[9] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The sampling of the z-plane due to the quantization of the digital filter coefficients // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 - Including ECYPS 2018. Proceedings 7. Budva, Montenegro. IEEE. 2018. 4 p.

[10] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Metelyov A. The discrete structure of the zeros and poles location in the z-plane of the arbitrary order IIR digital filters with a finite word length // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2019). Batumi, Georgia. IEEE. 6 p.

[11] Лесников В.А., Наумович Т.В., Решетников С.М., Частиков А.В. Взаимосвязь теоретико-числовой природы полюсов и структуры топологической матрицы рекурсивного цифрового фильтра // Перспективы науки. 2011. № 11 (26). С. 112 - 115.

[12] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Generation and decomposition of digital filter topology // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2017). Novi Sad, Serbia, 29 Sept.-2 Oct. 2017. IEEE. 4 p.

[13] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Разбиение множества структурных схем цифровых фильтров на классы эквивалентности по теоретико-числовым свойствам // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2018. Т. 1. № 1. С. 98 - 100.

[14] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Number-theoretical analysis of the structures of classical IIR digital filters // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2018). Budva, Montenegro. 10-14 June 2018. 4 p.

[15] Crochier R. E., Oppenheim A. V. Analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. Vol. 63. № 4. Pp. 581 – 595.

[16] Hilbert D. The theory of algebraic number fields. Berlin – Heidelberg – New York: Springer – Verlag. 1998.

[17] Ireland K., Rosen M. A classical introduction to modern number theory, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1990.

[18] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Связь между алгебраико-числовой природой нулей и структурой рекурсивных цифровых фильтров // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2020.

[19] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Implementation of the poles of IIR digital filters with a declared structural precision // 30th International Conference Radioelektronika (RADIOELEKTRONIKA 2020). Bratislava, Slovakia. IEEE. 2020. 6 p.

The Structural Precision of Digital Filters and the Structure of the Coefficients of the Transfer Function Denominator

V.A. Lesnikov[1], T.V. Naumovich[2], A.V. Chastikov[3]

[1]Vladislav.Lesnikov.ru@IEEE.org, [2]NTV_new@mail.ru, [3]AlChast@mail.ru

Abstract — **This paper was prepared as part of a project dedicated to the development of a new approach to the synthesis of IIR digital filters with a finite word length. This approach involves taking into account the finite word length already at the stage of calculating zeros and poles even before the stage of structural synthesis. In this case, it is taken into account that the zeros and poles of practically implemented filters are elements of the set of algebraic numbers of the corresponding degree. Next, filter structures with quantized coefficients are generated, during which the calculated values of zeros and poles should not be distorted. This is achieved through the use of previously obtained knowledge about the fine structure of the matrix of transmission coefficients between the nodes of the structural diagram. A method for generating structures is described that takes into account the structural precision of the filter, independent of its specific characteristics. Structural precision is determined by the degree of algebraic numbers, which are the poles of the filter and the structure of the coefficients of the transfer function denominator. Expressions are heuristically obtained that simplify the process of generating structures for some values of the structure dimension (number of nodes). The absence of such expressions in general terms is not an obstacle to solving the problem of structural synthesis. All the necessary information can be obtained using the capabilities of symbolic computing of computer algebra systems Maple and Matlab. Plans for further research involve obtaining new expressions that allow us to generate structures with a given structural precision without the need for Maple or Matlab. It is planned to expand the methods of structural synthesis taking into account the structural precision of the zeros of the transfer function.**

Keywords — **IIR digital filters, finite word length, algebraic numbers, structural precision, topological matrix**

References

[1] Wanhammar L., Saramäki T. Digital filters using MATLAB. Springer Nature Switzerland AG. 2020. 798 p.

[2] Butterweck H.J., Ritzerfeld J.H.F., Werter M.J. Finite wordlength effects in digital filters: a review // EUT report, E, Fac. of Electrical Engineering. V. 88-E -205. Eindhoven: Eindhoven University of Technology. 1988.

[3] Does Altera support IIR compiler? URL: https://www.intel.com/content/www/us/en/programmable/support/support-resources/knowledge-base/solutions/rd04072011_238.

[4] Lesnikov V.A., Naumovich T.V. Strukturnyj sintez cifrovyh fil'trov. Kirov: Vyatskij gosudarstvennyj universitet. - 2006. – 196 p. (In Russian)

[5] Lesnikov V.A., Naumovich T.V. Strukturnyj sintez cifrovyh fil'trov. Kirov: O-kratkoe. - 2008. – 160 p. (In Russian)

[6] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Novyj podhod k proektirovaniyu rekursivnyh cifrovyh fil'trov // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoelektronnyh sistem - 2010. M.: IPPM RAN. 2010. P. 466-471. URL: http://www.mes-conference.ru/data/year2010/papers/m10-6-57111.pdf (access data: 28.06.2020). (In Russian)

[7] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., CHastikov A.V. Sintez rekursivnyh cifrovyh fil'trov s konechnoj dlinoj slova: problemy i ih resheniya // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoelektronnyh sistem. M.: IPPM RAN. 2018. Vypusk 4. P. 89-97. (In Russian)

[8] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Reshetnikov S.M., Chastikov A.V. Algebraiko-chislovaya priroda nulej i polyusov rekursivnyh cifrovyh fil'trov // Global'nyj nauchnyj potencial. – 2011. - No 9. – P. 52–55. (In Russian)

[9] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The sampling of the z-plane due to the quantization of the digital filter coefficients // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2018 - Including ECYPS 2018. Proceedings 7. Budva, Montenegro. IEEE. 2018. 4 p.

[10] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Metelyov A. The discrete structure of the zeros and poles location in the z-plane of the arbitrary order IIR digital filters with a finite word length // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2019). Batumi, Georgia. IEEE. 6 p.

[11] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Reshetnikov S.M., Chastikov A.V. Vzaimosvyaz' teoretiko-chislovoj prirody polyusov i struktury topologicheskoj matricy rekursivnogo cifrovogo fil'tra // Perspektivy nauki. 2011. № 11 (26). P. 112 - 115. (In Russian)

[12] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Generation and decomposition of digital filter topology // IEEE East-West Design and Test Symposium (EWDTS 2017). Novi Sad, Serbia, 29 Sept.-2 Oct. 2017. IEEE. 4 p.

[13] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Razbienie mnozhestva strukturnyh skhem cifrovyh fil'trov na klassy ekvivalentnosti po teoretiko-chislovym svojstvam // DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov. 2018. Vol. 1. № 1. P. 98 - 100. (In Russian)

[14] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Number-theoretical analysis of the structures of classical IIR digital filters // 7th Mediterranean Conference on Embedded Computing (MECO 2018). Budva, Montenegro. 10-14 June 2018. 4 p.

[15] Crochier R. E., Oppenheim A. V. Analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. Vol. 63. № 4. Pp. 581 – 595.

[16] Hilbert D. The theory of algebraic number fields. Berlin – Heidelberg – New York: Springer – Verlag, 1998.

[18] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Svyaz' mezhdu algebraiko-chislovoj prirodoj nulej i strukturoj rekursivnyh cifrovyh fil'trov // DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov. 2020. (in Russian)

[19] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Implementation of the poles of IIR digital filters with a declared structural precision // 30th International Conference Radioelektronika (RADIOELEKTRONIKA 2020). Bratislava, Slovakia. IEEE. 2020. 6 p.