

Алгебраические разложения кофакторов в BDD представлениях систем не полностью определенных булевых функций

П.Н. Бибило

Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, bibilo@newman.bas-net.by

Аннотация— Основным критерием оптимизации при синтезе комбинационных схем из библиотечных логических элементов является число литералов в алгебраических многоуровневых представлениях систем полностью определенных булевых функций. После получения BDD представлений (Binary Decision Diagrams – бинарные диаграммы решений) исходных систем не полностью определенных (частичных) булевых функций, предлагается выполнять дополнительную логическую оптимизацию на основе поиска алгебраических представлений частичных подфункций (кофакторов) одного уровня BDD в виде дизъюнкции либо конъюнкции других подфункций данного уровня BDD. Предложенный метод позволяет уменьшать число литералов путем замены формул разложений Шеннона более простыми формулами при переходе к BDD, реализующей систему полностью определенных функций, по которой осуществляется синтез комбинационной логической схемы.

Ключевые слова— система булевых функций, дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ), разложение Шеннона, Binary Decision Diagram (BDD), синтез логической схемы.

I. ВВЕДЕНИЕ

Математический аппарат BDD в настоящее время используется в различных областях науки [1, 2], в последнее время он применяется для решения SAT-проблем [3], которые возникают при решении различных задач проектирования схем функциональных блоков цифровых СБИС (сверхбольших интегральных схем) [4, 5]. Области применения BDD расширяются, этот аппарат явился вычислительной основой решения задач верификации параллельных систем с конечным числом состояний на основе метода model checking [2]. В работе [2] приводится много примеров применения BDD, там же указываются и некоторые из модификаций BDD. В системах проектирования цифровых СБИС графовый аппарат BDD применяется при верификации и тестировании СБИС [6], а также при технологически независимой оптимизации [7,8]. Для решения логических уравнений, возникающих при моделировании проектов цифровых схем [9], также могут применяться подходы на основе аппарата BDD.

BDD представляет собой ациклический граф, задающий булеву функцию либо систему полностью определенных булевых функций, каждой вершине этого графа соответствует полная либо редуцированная (сокращенная) формула разложения Шеннона. Поэтому при построении BDD стремятся сократить число вершин BDD – сложность функционального описания в виде взаимосвязанных формул разложений Шеннона [10 – 12]. Схемная реализация (логический синтез) исходных систем частичных булевых функций осуществляется чаще всего в три этапа. На первом этапе осуществляется логическая оптимизация систем частичных функций и их доопределение до систем полностью определенных функций. На втором этапе выполняется логическая технологически независимая оптимизация, на третьем этапе – технологическое отображение в требуемый базис (целевую библиотеку) логических элементов. Однако методы логической оптимизации систем частичных функций, ориентированные на требуемую библиотеку элементов, развиты недостаточно, поэтому чаще всего путем минимизации систем в классе ДНФ на первом этапе осуществляется переход от систем частичных функций к системам полностью определенных функций. В работе [13] была предложена модификация BDD для систем частичных функций. Существенным отличием предложенной модели BDD, представляющих частичные функции, от полностью определенных BDD, является то, что для частичных функций все листовые вершины «←», задающие неопределенные значения частичных функций рассматриваются как различные, в отличие от вершин-констант 0, 1. Каждая вершина «←» помещается на определенный уровень BDD и отдельно доопределяется при оптимизации до нуля либо единицы.

В данной работе предлагаются дополнительные процедуры минимизации BDD представлений систем частичных функций, основанные на методе поиска алгебраических представлений частичных кофакторов одного уровня BDD в виде дизъюнкции либо конъюнкции других кофакторов данного уровня. Предлагаемый метод позволяет уменьшать число литералов путем замены формул разложений Шеннона более простыми формулами дизъюнкции либо конъюнкции. При поиске алгебраических

дизъюнктивных либо конъюнктивных разложений кофакторов можно учитывать как прямую (безыверсную), так и инверсную форму кофакторов.

II. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Булевыми называются двоичные $(0, 1)$ функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ двоичных (булевых) переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Пусть V^x – булево пространство, построенное над переменными булева вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Элементами этого пространства являются n -компонентные наборы (векторы) нулей и единиц. Булева функция, значения $0, 1$ которой определены на всех элементах V^x , называется полностью определенной. Если же на некоторых элементах булева пространства V^x значения функции не определены, то такая функция называется не полностью определенной, или *частичной*. Частичная булева функция принимает единичное значение на элементах \mathbf{x}^* подмножества M_f^1 булева пространства V^x и нулевое значение на элементах подмножества M_f^0 . На всех остальных элементах пространства V^x , образующих подмножество M_f^- пространства V^x , значения частичной функции не определены, подмножество M_f^- будем называть также областью неопределенных значений частичной функции. Неопределенное значение функции обозначается символом « \rightarrow ». Частичные функции $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ равны, если и только если $M_{f_1}^1 = M_{f_2}^1$, $M_{f_1}^0 = M_{f_2}^0$, $M_{f_1}^- = M_{f_2}^-$. Будем называть частичные функции $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x})$ взаимно инверсными ($f_2 = \overline{f_1}$, $f_1 = \overline{f_2}$), если и только если $M_{f_1}^1 = M_{f_2}^0$, $M_{f_1}^0 = M_{f_2}^1$, $M_{f_1}^- = M_{f_2}^-$. Частичная функция f_i реализуется частичной (либо полностью определенной) функцией f_j (обозначается $f_i \prec f_j$), если и только если $M_{f_i}^1 \subseteq M_{f_j}^1$, $M_{f_i}^0 \subseteq M_{f_j}^0$. Функцию f_j называют *доопределением* функции f_i . Для пары полностью определенных булевых функций f_i, f_j отношение реализации является отношением равенства. Под векторной булевой функцией $f(\mathbf{x})$ будем понимать упорядоченную систему частичных булевых функций $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$, значениями векторных функций на элементах \mathbf{x}^* булева пространства являются m -компонентные троичные векторы $f(\mathbf{x}^*)$.

Разложением Шеннона полностью определенной либо частичной булевой функции $f = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ по переменной x_i называется представление $f = \overline{x_i}f_0 \vee x_i f_1$. Функции f_0, f_1 называются *кофакторами* (cofactors, англ.) разложения

по переменной x_i либо подфункциями. Они получаются из функции $f = f(x_1, \dots, x_n)$ подстановкой вместо переменной x_i константы 0 и 1 соответственно:

$$f_0 = f_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n),$$

$$f_1 = f_1(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Каждая из подфункций f_0 и f_1 может быть разложена по одной из переменных из множества $\{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}$. Процесс разложения подфункций заканчивается, когда все n переменных будут использованы для разложения, либо когда все подфункции вырождаются до констант $0, 1$, « \rightarrow » (неопределенное значение). На каждом шаге разложения выполняется сравнение на равенство полученных частичных подфункций и оставляется одна из нескольких попарно равных подфункций.

Под BDD представлением частичной векторной булевой функции $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ понимается ориентированный ациклический граф, задающий последовательные разложения Шеннона всех компонентных функций $f_i(\mathbf{x})$, $i=1, \dots, m$, по всем ее переменным x_1, \dots, x_n при одном и том же заданном порядке (перестановке) переменных, по которым проводятся разложения [7].

III. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Задача 1. Заданы частичные булевы функции $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$. Требуется найти, если это возможно, такие доопределения $\varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2^*(\mathbf{x})$ функций (запишем это в виде $\varphi(\mathbf{x}) \prec \varphi^*(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x}) \prec f_1^*(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x}) \prec f_2^*(\mathbf{x})$), что будет выполняться одно из алгебраических разложений

$$\varphi^*(\mathbf{x}) \prec (f_1^*(\mathbf{x}) \vee f_2^*(\mathbf{x})), \quad (1)$$

$$\varphi^*(\mathbf{x}) \prec (f_1^*(\mathbf{x}) \& f_2^*(\mathbf{x})). \quad (2)$$

Естественно, для каждого из разложений (1), (2) требуются свои доопределения функций φ, f_1, f_2 . Логические операторы \vee (дизъюнкция), $\&$ (конъюнкция) в формулах (1), (2) называют также *выходными* функциями соответствующего алгебраического разложения. В работе [7] логические операции над частичными булевыми функциями (троичными переменными) определены так, как это показано в табл. 1.

Таблица 1

Логические операции над частичными булевыми функциями

f_1	0	0	0	-	-	-	1	1	1
f_2	0	-	1	0	-	1	0	-	-
$\overline{f_1}$	1	1	1	-	-	-	0	0	0
$f_1 \vee f_2$	0	-	1	-	-	1	1	1	1
$f_1 \& f_2$	0	0	0	0	-	-	0	-	-

Утверждение 1. Задача нахождения разложения (1) не имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий

$$(M_{f_1}^0 \cap M_{f_2}^0) \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (3)$$

$$M_{f_1}^1 \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset, \quad (4)$$

$$M_{f_2}^1 \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset. \quad (5)$$

Если ни одно из условий (3) – (5) не выполняется, то функции $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ можно доопределить для выполнения разложения (1).

Утверждение 2. Задача нахождения разложения (2) не имеет решения тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий

$$M_{f_1}^0 \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (6)$$

$$M_{f_2}^0 \cap M_{\varphi}^1 \neq \emptyset, \quad (7)$$

$$(M_{f_1}^1 \cap M_{f_2}^1) \cap M_{\varphi}^0 \neq \emptyset. \quad (8)$$

Если ни одно из условий (6) – (8) не выполняется, то функции $\varphi(\mathbf{x})$, $f_1(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x})$ можно доопределить для выполнения разложения (2).

Рассмотрим задачу нахождения на одном уровне BDD максимального по мощности подмножества частичных кофакторов, которые можно представить в виде дизъюнкций либо конъюнкций других кофакторов. Рассмотрим множество $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ частичных функций (кофакторов). Найдем в множестве G максимальное по мощности подмножество G^c функций, которые могут быть выражены через дизъюнкцию либо конъюнкцию пар функций, не вошедших в множество G^c , при соответствующем доопределении частичных функций, входящих в разложения. Назовем функции из множества $G^b = G \setminus G^c$ базисными, а функции из множества G^c – представимыми. Формулы разложения Шеннона, задающие представимые функции, будут заменены впоследствии алгебраическими дизъюнкциями либо конъюнкциями.

Каждая функция из множества G^c при этом должна задаваться в алгебраическом (дизъюнктивном либо конъюнктивном) разложении своей парой базисных функций, т. е. каждая основная функция может входить в разложение только одной функции из G^c .

Задача 2. Для заданного множества $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ частичных функций требуется найти в G максимальное по мощности подмножество G^c представимых функций (главный критерий) и при этом требуется минимизировать суммарное количество наборов, на которых доопределяются базисные функции (дополнительный критерий оптимизации).

Составим двудольный неориентированный граф R , вершины первой доли помечены парами $\{g_i, g_j\}$, вершины второй доли помечены функциями множества G . Число вершин первой доли – C_k^2 , число вершин второй доли – k . Пусть каждое ребро $\langle \{g_i, g_j\}, g_s \rangle$ графа R задает тройку функций, реализующих дизъюнктивное $g_s^* \prec (g_i^* \vee g_j^*)$ либо конъюнктивное $g_s^* \prec (g_i^* \& g_j^*)$ разложение. Каждому ребру присвоим вес, равный суммарному числу замен неопределенных значений функций g_i, g_j, g_s определенными (0, 1). При проведении разложений (1), (2) могут использоваться задания функций в виде таблиц истинности, ДНФ либо подграфов BDD. Логические операции над функциями, заданными в таких формах, рассмотрены в [7]. Для построения графа R для каждой функции $g_s, s=1, \dots, k$, требуется рассмотреть $C_k^2 - (k-1)$ вариантов пар проверки возможности дизъюнктивного разложения (исключаются $k-1$ пар $(g_i, g_s), i \neq s$) и столько же $C_k^2 - (k-1)$ вариантов пар проверки возможности конъюнктивного разложения. Таким образом, для построения графа R требуется рассмотреть $Z = 2k(C_k^2 - (k-1))$ вариантов получения формул $g_s^* \prec (g_i^* \vee g_j^*), g_s^* \prec (g_i^* \& g_j^*)$ для $G = \{g_1, \dots, g_k\}$.

Решение задачи 2 можно свести к нахождению максимального паросочетания графа R , обладающего минимальным суммарным весом ребер, вошедших в паросочетание, множество G^c представимых функций будут образовывать функции, помечающие вершины из второй доли. Предлагается эвристический алгоритм решения этой задачи, основанный на последовательном нахождении ребер, входящих в искомое паросочетание. Для частичных базисных функций и тех, которые не представлены в виде дизъюнктивного либо конъюнктивного разложения, может повторно решаться задача 2. Такой процесс постепенного доопределения базисных функций и увеличения числа реализованных (дизъюнкциями или конъюнкциями) функций может выполняться

несколько раз, пока возможно получать другие дизъюнктивные либо конъюнктивные разложения.

IV. МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ КОФАКТОРОВ BDD ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СИСТЕМ ЧАСТИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Исходными данными для предлагаемого метода минимизации многоуровневого представления частичной векторной функции на основе нахождения алгебраических разложений кофакторов является граф BDD, при этом каждой функциональной вершине BDD соответствует формула разложения Шеннона. Метод может начинать работу с выбранного уровня BDD и рассматривать кофакторы, двигаясь вниз по уровням BDD, как от уровня корневых функциональных вершин, так и двигаясь вверх по BDD, начиная рассмотрение кофакторов со второго уровня BDD. Метод включает пять этапов.

Этап 1. Нахождения алгебраически представимых кофакторов. Выполняется для каждого уровня BDD, начиная с уровня кофакторов, получаемых в результате разложения Шеннона по первой переменной, и исключая последний листовой уровень, на котором расположены константы 0, 1, «-». Исключается из рассмотрения также первый уровень BDD, соответствующий разложению по последней переменной в заданной перестановке переменных, по которым ведется разложение Шеннона. На рассматриваемом уровне BDD решается задача нахождения наибольшего числа алгебраически представимых частичных кофакторов.

Шаг 1.1. Выбор формы представления кофакторов рассматриваемого уровня BDD (таблица истинности; пара ДНФ, задающая области определения кофактора; подграф BDD) и нахождение кофакторов в требуемой форме.

Шаг 1.2. Нахождение на рассматриваемом уровне BDD пар взаимно инверсных кофакторов [13] и выбор множества кофакторов для нахождения всевозможных алгебраических представлений этих кофакторов в виде конъюнкции либо дизъюнкции других частичных кофакторов данного уровня.

Шаг 1.3. Нахождение максимального по мощности множества кофакторов, которые представимы в виде конъюнкции либо дизъюнкции – сокращение числа базисных кофакторов на основе повторных решений задачи 2.

Шаг 1.4. Исключение представимых кофакторов из рассмотрения, при этом удаляются из BDD представления соответствующие уравнения, относящиеся к заданию этих кофакторов и не используемые для других кофакторов.

Шаг 1.5. Построение BDD, реализующей доопределенные базисные кофакторы (по той форме их задания, по которой они сравнивались при поиске алгебраически представимых) по старой перестановке переменных, либо по новой (лучшей) перестановке

переменных, т. е. по той, по которой получается BDD с возможно меньшим числом функциональных вершин.

Шаг 1.6. Сокращение BDD на верхних уровнях, в случае, если сократилось число кофакторов рассматриваемого уровня за счет доопределения и появления одинаковых функциональных вершин.

Этап 2. Доопределение до полностью определенного каждого из кофакторов, входящих алгебраические разложения. Методы такого доопределения, ориентированные на минимизацию числа функциональных вершин BDD, описаны в [14].

Этап 3. Если после выполнения этапа 2 в BDD остаются листовые вершины «-», то выполняется замена листовых значений «-» константами 0, 1, т. е. доопределение BDD до полностью определенной с возможным выполнением процедуры сокращения BDD.

Этап 4. Формирование результирующего функционального представления в виде формул разложений Шеннона и формул для представимых кофакторов.

Этап 5. Проверка отношения реализации «<» между исходной BDD частичной векторной функцией и многоуровневым представлением, задающим результирующее представление полностью определенной векторной функции. Для этого могут быть применены методы формальной верификации, если представить исходное и результирующее описания на языке VHDL [15].

V. ПРИМЕР

Рассмотрим BDD (рис. 1) для частичной векторной функции $f(x) = (f_1, f_2, f_3)$, заданной таблицей истинности (табл. 2), по перестановке переменных $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$. Алгоритм построения BDD для частичных векторных функций сводится к нахождению одинаковых подфункций, полученных в результате разложения Шеннона по переменной x_1 исходных компонентных функций f_1, f_2, f_3 , разложением Шеннона по переменной x_2 различных частичных подфункций h_1, \dots, h_5 , полученных на первом шаге разложения, и т. д.

Графу BDD соответствуют формулы разложений Шеннона, заданные в правом столбце табл. 2, при этом частичные функции t_1, \dots, t_9 первого уровня BDD заданы в табл. 3. Кофакторы первого уровня зависят от одной переменной x_5 и являются частичными функциями. Число частичных булевых функций, зависящих от n переменных, определяется по формуле 3^{2^n} . Для $n=1$ имеется девять частичных функций, заметим, что все они заданы на первом уровне BDD (рис. 1).

После нахождения множества базисных кофакторов для девяти частичных кофакторов g_1, \dots, g_9

многоуровневое представление частичной векторной функции имеет вид $f_1 = \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2$; $f_2 = \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3$; $f_3 = \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5$; $h_1 = \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4$; $h_2 = \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9$; $h_3 = \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2$; $h_4 = \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5$; $h_5 = \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8$; $g_6 = g_5 \& g_9$; $g_7 = g_1 \vee g_2$; $g_8 = g_3 \& g_4$. Все

девять частичных кофакторов $g_1 \dots g_9$ доопределились до полностью определенных. Это означает, что произошло доопределение частичной векторной функции до полностью определенной. Задача

алгебраического разложения полностью определенных кофакторов заслуживает отдельного рассмотрения, так как значительно отличается от алгебраического разложения частичных кофакторов. Полностью определенные кофакторы, участвующие в алгебраических разложениях, не требуют доопределения, поэтому один и тот же полностью определенный кофактор может использоваться в алгебраических представлениях нескольких кофакторов.

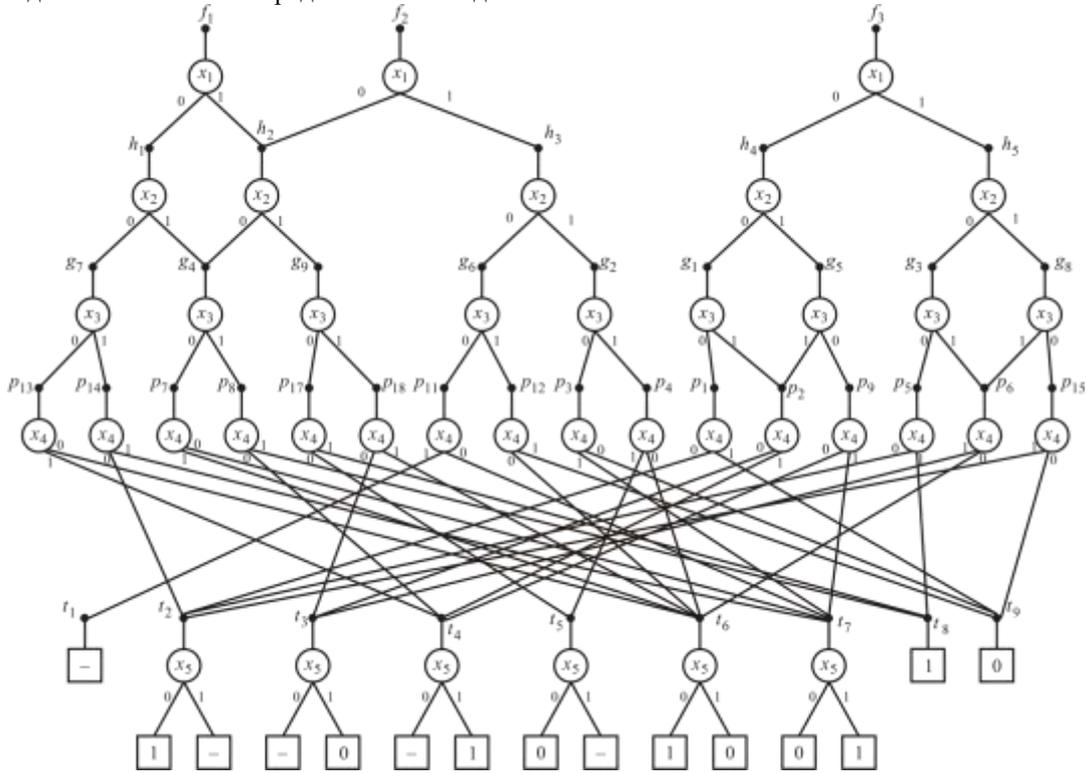


Рис. 1. Граф BDD для частичной векторной функции (табл. 1)

Построим ориентированный граф R , задающий полученные формулы (будем называть их уравнениями) алгебраических дизъюнктивных и конъюнктивных разложений полностью определенных кофакторов. Вершинам графа R соответствуют кофакторы, которые упоминаются в уравнениях, обозначим это множество кофакторов через K . Дуги, соответствующие операндам алгебраически представленного кофактора (результату логической операции) помечены одним и тем же числом – номером уравнения. Каждое уравнение задается подграфом с тремя вершинами и двумя помеченными дугами: вершина, соответствующая представимому кофактору, имеет две заходящие дуги (с одной и той же пометкой – номером уравнения). Вершины, соответствующие операндам уравнения, инцидентны исходящим дугам. Введем понятие кластера – подмножества вершин графа R . В кластер входят вершины, соответствующие уравнениям с одним и тем же кофактором в левой части. Именем одинаковых кофакторов и обозначается кластер. С использованием

графа R задача нахождения наибольшего числа уравнений, представимых в виде разложений (1), (2) сводится к следующей задаче.

Задача 3. В графе R требуется оставить в каждом кластере только одну вершину (условие А) и удалить из графа R такое подмножество пар одинаково помеченных дуг, чтобы граф R стал ациклическим (условие В) и содержал наибольшее число неизоллированных вершин, в каждую из которых заходит только одна пара одинаково помеченных дуг (условие С).

Предлагается эвристический алгоритм решения задачи 3, в результате решения которой множество K вершин графа R разбивается на три попарно непересекающиеся подмножества. Вершины, не имеющие заходящих дуг, но имеющие исходящую дугу, соответствуют не представимым кофакторам.

Таблица 2

Формы задания частичной векторной булевой функции

Таблица истинности					Многоуровневое BDD представление		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	0	1	-
0	0	0	1	0	-	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	-	-
0	0	1	0	1	-	1	0
0	0	1	1	0	0	1	-
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	-
0	1	0	0	1	1	-	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	-	-	-
0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	-
0	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	-
1	0	0	1	0	1	-	1
1	0	0	1	1	0	-	1
1	0	1	0	0	-	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0	-
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	-	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	-
1	1	1	0	0	-	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	-
1	1	1	1	1	0	-	0

$$f_1 = \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2; f_2 = \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3; f_3 = \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5;$$

$$h_1 = \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4; h_2 = \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9; h_3 = \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2;$$

$$h_4 = \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5; h_5 = \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8;$$

$$g_1 = \bar{x}_3 p_1 \vee x_3 p_2; g_2 = \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_4;$$

$$g_3 = \bar{x}_3 p_5 \vee x_3 p_6; g_4 = \bar{x}_3 p_7 \vee x_3 p_8; g_5 = \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_2;$$

$$g_6 = \bar{x}_3 p_{11} \vee x_3 p_{12}; g_7 = \bar{x}_3 p_{13} \vee x_3 p_{14};$$

$$g_8 = \bar{x}_3 p_{15} \vee x_3 p_{16}; g_9 = \bar{x}_3 p_{17} \vee x_3 p_{18};$$

$$p_1 = \bar{x}_4 t_2 \vee x_4 t_9 = \bar{x}_4 t_2; p_2 = \bar{x}_4 t_3 \vee x_4 t_4;$$

$$p_3 = \bar{x}_4 t_9 \vee x_4 t_7 = x_4 t_7; p_4 = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_5;$$

$$p_5 = \bar{x}_4 t_2 \vee x_4 t_8; p_6 = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_3;$$

$$p_7 = \bar{x}_4 t_7 \vee x_4 t_6; p_8 = \bar{x}_4 t_4 \vee x_4 t_8 = \bar{x}_4 t_4 \vee x_4;$$

$$p_9 = \bar{x}_4 t_4 \vee x_4 t_7; p_{11} = \bar{x}_4 t_7 \vee x_4 t_1;$$

$$p_{12} = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_9 = \bar{x}_4 t_6;$$

$$p_{13} = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_4; p_{14} = \bar{x}_4 t_2 \vee x_4 t_7;$$

$$p_{15} = \bar{x}_4 t_9 \vee x_4 t_2 = x_4 t_2; p_{16} = \bar{x}_4 t_6 \vee x_4 t_3;$$

$$p_{17} = \bar{x}_4 t_5 \vee x_4 t_7; p_{18} = \bar{x}_4 t_3 \vee x_4 t_6;$$

Таблица 3

Частичные кофакторы первого уровня BDD

Частичные кофакторы									
x_5	$t_1 = "-"$	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	$t_8 = 1$	$t_9 = 0$
0	-	1	-	-	0	1	0	1	0
1	-	-	0	1	-	0	1	1	0
Доопределяющие полностью определенные кофакторы									
x_5	$t_1^* = 0$	$t_2^* = 1$	$t_3^* = 0$	$t_4^* = 1$	$t_5^* = 0$	t_6	t_7	$t_8 = 1$	$t_9 = 0$
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	0

Вершины, имеющие одну пару заходящих дуг (с одной и той же пометкой) соответствуют представимым кофакторам. Вершины, которые оказались изолированными, например, при удалении дуг для удовлетворения условия В, не будут участвовать в уравнениях и зачисляются в множество не представимым кофакторов. Результирующие логические уравнения после алгебраического разложения кофакторов, зависящих от двух переменных x_4, x_5 , будут иметь вид $f_1 = \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2$;
 $f_2 = \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3; f_3 = \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5; h_1 = \bar{x}_2 g_7^* \vee x_2 g_4^*$;

$$h_2 = \bar{x}_2 g_4^* \vee x_2 g_9^*; h_3 = \bar{x}_2 g_6^* \vee x_2 g_2^*; h_4 = \bar{x}_2 g_1^* \vee x_2 g_5^*;$$

$$h_5 = \bar{x}_2 g_3^* \vee x_2 g_8^*; g_6^* = g_5^* \vee g_9^*;$$

$$g_7^* = g_1^* \vee g_2^*; g_8^* = g_3^* \& g_4^*; g_1^* = \bar{x}_3 w_1 \vee x_3 w_3;$$

$$g_2^* = \bar{x}_3 w_3 \vee x_3 w_1; g_3^* = \bar{x}_3 w_5 \vee x_3 w_1; g_4^* = \bar{x}_3 w_7 \vee x_3;$$

$$g_5^* = \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_7; g_9^* = \bar{x}_3 w_9 \vee x_3 \bar{w}_9; w_5 = (\bar{w}_7 \& w_9);$$

$$w_7 = (\bar{w}_1 \vee w_3); w_1 = \bar{x}_4 \bar{x}_5; w_3 = x_4 x_5; w_9 = x_5.$$

Уравнения содержат 19 внутренних переменных и 70 литералов, им соответствует графическое представление (рис. 2). Совместная минимизация в классе ДНФ исходных частичных функций с помощью программы из [16] приводит к системе ДНФ, содержащей 21 элементарную конъюнкцию. По минимизированной системе ДНФ с помощью программы из [17] было получено BDD представление, содержащее 19 внутренних переменных в формулах разложений Шеннона и 76 литералов в этих формулах. Такой результат свидетельствует о том, что целесообразно развивать методы многоуровневой оптимизации для частичных функций, а не только минимизировать функции в классе ДНФ и проводить для них оптимизацию в классе полностью определенных BDD.

Доопределение BDD (формул из табл. 2), начинаемое с листовых вершин графа BDD и выполняемое по правилам (табл. 3), где $t_i < t_i^*$, $i=1, \dots, 9$, с последующим сокращением BDD приводит к нахождению одинаковых функциональных вершин $p_{17} = p_3$; $p_5 = p_8 = 1$; $p_4 = p_6 = p_{12}$; $p_2 = p_{15}$ и получению следующих уравнений: $f_1 = \bar{x}_1 h_1 \vee x_1 h_2$; $f_2 = \bar{x}_1 h_2 \vee x_1 h_3$; $f_3 = \bar{x}_1 h_4 \vee x_1 h_5$; $h_1 = \bar{x}_2 g_7 \vee x_2 g_4$;

$$h_2 = \bar{x}_2 g_4 \vee x_2 g_9$$
; $h_3 = \bar{x}_2 g_6 \vee x_2 g_2$; $h_4 = \bar{x}_2 g_1 \vee x_2 g_5$;
 $h_5 = \bar{x}_2 g_3 \vee x_2 g_8$; $g_1 = \bar{x}_3 p_1 \vee x_3 p_2$; $g_2 = \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_4$;
 $g_3 = \bar{x}_3 \vee x_3 p_{18}$; $g_4 = \bar{x}_3 p_3 \vee x_3$; $g_5 = \bar{x}_3 p_9 \vee x_3 p_2$;
 $g_6 = \bar{x}_3 p_{11} \vee x_3 p_4$; $g_7 = \bar{x}_3 p_{13} \vee x_3 p_{14}$;
 $g_8 = \bar{x}_3 p_2 \vee x_3 p_4$; $g_9 = \bar{x}_3 p_3 \vee x_3 p_{18}$; $p_1 = \bar{x}_4$; $p_2 = x_4$;
 $p_3 = x_4 x_5$; $p_4 = \bar{x}_4 \bar{x}_5$; $p_7 = \bar{x}_4 x_5 \vee x_4 \bar{x}_5$; $p_9 = \bar{x}_4 \vee x_4 x_5$;
 $p_{11} = \bar{x}_4 x_5$; $p_{13} = \bar{x}_4 \bar{x}_5 \vee x_4$; $p_{14} = \bar{x}_4 \vee x_4 x_5$;

$p_{18} = x_4 \bar{x}_5$. Данные уравнения содержат 24 внутренних переменных и 89 литералов, т. е. поиск алгебраических разложений кофакторов дает лучший результат по числу литералов, чем доопределение частичной BDD до полностью определенной, выполняемое с помощью известных алгоритмов [7].

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод рационального доопределения систем частичных булевых функций до полностью определенных, позволяющий дополнительно упрощать многоуровневые BDD представления, используя алгебраические разложения частичных подфункций, находящихся на одном уровне BDD. Метод может быть использован и в процессе построения BDD при задании в виде ДНФ областей определения компонентных функций исходной частичной векторной функции. Кроме того, метод обобщается на случай других выходных функций алгебраических разложений, таких, как исключающее ИЛИ, эквиваленция, а также на случай, когда выходные функции представляют собой n -операндные алгебраические функции дизъюнкции, конъюнкции. Дополнительная технологически независимая оптимизация по числу литералов в результирующих

логических уравнениях приводит к более простым функциональным описаниям, по которым осуществляется синтез комбинационных логических схем в различных технологических базисах.

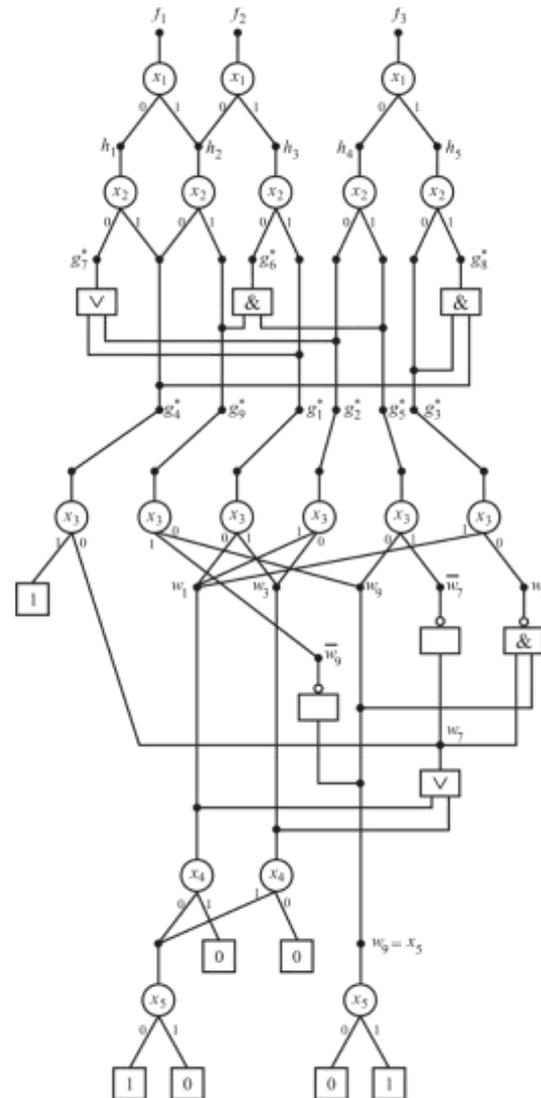


Рис. 2. Структура результирующего многоуровневого представления: выходные функции алгебраических разложений кофакторов даны на графе BDD в виде логических элементов

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 4, А. Комбинаторные алгоритмы. Часть 1: Пер. с англ.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. 960 с.
- [2] Карпов Ю.Г. MODEL CHECKING. Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2010. 560 с.
- [3] Handbook of Satisfiability /Eds. A. Biere, M. Heule, H. Van Maaren, T. Walsh: IOS Press, 2009. 980 p.
- [4] Матросова А.Ю., Провкин В.А., Останин С.А. Использование SAT решателей и ROBDD-графов для построения схем, маскирующих логические неисправности и вредоносные подсхемы // Проблемы

- разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2020. Вып. 2. С. 35–42.
- [5] Жуков Д.В., Железников Д.А., Заплетина М.А. Применение SAT подхода к трассировке блоков коммутации для реконфигурируемых систем на кристалле // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2020. Вып. 1. С. 26–32.
- [6] Чэнь М, К. Цинь К., Ку Х.-М., Мишра П. Валидация на системном уровне. Высокоуровневое моделирование и управление тестированием. М.: Техносфера, 2014. 296 с.
- [7] Бибило П. Н. Применение диаграмм двоичного выбора при синтезе логических схем. Минск : Беларус. навука, 2014. 231 с.
- [8] Бибило П.Н., Ланкевич Ю.Ю. Экспериментальное исследование эффективности программ минимизации BDD-представлений систем булевых функций при синтезе комбинационных схем из библиотечных КМОП // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2020. Вып. 1. С. 33–39.
- [9] Иванников А.Д., Стемпковский А.Л. Анализ итерационных методов решения систем логических уравнений и их использование при моделировании цифровых систем // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2020. Вып. 3. С. 2–8.
- [10] Ebendt R., Gunther W., Drechsler R. An improved branch and bound algorithm for exact BDD minimization // Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2003. Vol. 22. № 12. P. 1657–1663.
- [11] Meinel C., Theobald T. Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – Foundations and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 267 p.
- [12] Ebendt R. Fey G., Drechsler R. Advanced BDD Optimization. Springer, 2005. 222 p.
- [13] Бибило П. Н. Минимизация BDDI-представлений систем не полностью определенных булевых функций // Программная инженерия. 2020. Т. 11. № 3. С. 152–168.
- [14] Бибило П.Н. Декомпозиция и минимизация диаграмм двоичного выбора для систем не полностью определенных булевых функций // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2014. Выпуск 1. С. 3–8.
- [15] Лохов А. Функциональная верификация СБИС в свете решений Mentor Graphics // Электроника: наука, технология, бизнес. 2004. № 1. С. 58–62.
- [16] Торопов Н.Р. Минимизация систем булевых функций в классе ДНФ // Логическое проектирование. Минск: Ин-т техн. кибернетики НАН Беларуси, 1999. Вып. 4. С. 4–19.
- [17] Бибило П. Н., Ланкевич Ю. Ю. Использование полиномов Жегалкина при минимизации многоуровневых представлений систем булевых функций на основе разложения Шеннона // Программная инженерия. 2017. № 8. С. 369–384.

Algebraic Decompositions of Cofactors in BDD Representations of a Systems of Incompletely Defined Boolean Functions

P.N. Bibilo

United Institute of Informatics Problems of NAS of Belarus

bibilo@newman.bas-net.by

Abstract— In design systems for digital VLSI (Very Large Integrated Circuits), the BDD (Binary Decision Diagrams) is used for VLSI verification, as well as for technologically independent optimization, performed as the first stage in the synthesis of logic circuits in various technological bases. BDD is an acyclic graph defining a Boolean function or a system of Boolean functions. Each vertex of this graph corresponds to the complete or reduced Shannon expansion formula. Having constructed BDD representation for systems of Boolean functions, it is possible to perform additional logical optimization based on the proposed method of searching for algebraic representations of cofactors (subfunctions) of the same BDD level in the form of a disjunction, conjunction of cofactors of the same level of BDD. A directed BDD graph for a system of functions is constructed based on the Shannon expansion of all component functions of the system by the same permutation of variables. The method allows to reduce the number of literals by replacing the Shannon expansion formulas with simpler formulas that are disjunctions or conjunctions of cofactors, and to reduce the

number of literals in specifying a system of Boolean functions. The number of literals in algebraic multilevel representations of systems of fully defined Boolean functions is the main optimization criterion in the synthesis of combinational circuits from library logic gates.

Keywords— system of Boolean functions, Disjunctive Normal Form (DNF), Shannon expansion, Binary Decision Diagram (BDD), digital logic synthesis.

REFERENCES

- [1] Knut D.E. Iskusstvo programmirovaniya. Tom 4, A. Kombinatornye algoritmy. CHast' 1 (THE ART OF COMPUTER PROGRAMMING, COMBINATORIAL ALGORITHMS, PART 1): Per. s angl.: OOO «I.D. Vil'yams», 2013. 960 s.
- [2] Karpov YU.G. MODEL CHECKING. Verifikaciya parallel'nyh i raspredelennyh programmnyh sistem (MODEL CHECKING. VERIFICATION OF PARALLEL AND DISTRIBUTED SOFTWARE SYSTEMS). SPb.: BHV-Peterburg, 2010. 560 s.

- [3] Handbook of Satisfiability /Eds. A. Biere, M. Heule, H. Van Maaren, T. Walsh: IOS Press, 2009. 980 p.
- [4] Matrosova A.Yu., Provkin V.A., Ostanin S.A. Applying SAT Solvers and ROBDDs for Deriving Circuits Masking Logical Faults and TSs in Discrete Systems // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development . 2020. Issue 2. P. 35-42. doi:10.31114/2078-7707-2020-2-35-42
- [5] Zhukov D.V., Zheleznikov D.A., Zapletina M.A. Application of SAT Approach to Switch Blocks Routing for Reconfigurable System-on-a-chip // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development . 2020. Issue 1. P. 26-32. doi:10.31114/2078-7707-2020-1-26-32
- [6] CHen' M, K. Cin' K., Ku H.-M., Mishra P. Validaciya na sistemnom urovne. Vysokourovnevoe modelirovanie i upravlenie testirovanie (System-Level Validation). M.: Tekhnosfera, 2014. 296 s.
- [7] Bibilo P.N. Primenenie diagramm dvoichnogo vybora pri sinteze logicheskikh shem (Application of Binary Decision Diagrams at synthesis of logical circuits) Minsk: Belarus. navuka, 2014. 231 s.
- [8] Bibilo P.N., Lankevich Y.Y. Experimental Research of Effectiveness of Programs for Minimizing BDD Representations of Boolean Function Systems in Synthesis of Combinatorial CMOS Circuits // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development . 2020. Issue 1. P. 33-39. doi:10.31114/2078-7707-2020-1-33-39
- [9] Ivannikov A.D., Stempkovsky A.L. Analysis of Iterative Methods for Solving Logical Equation Systems and their Use in Digital System Simulation // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development . 2020. Issue 3. P. 2-8. doi:10.31114/2078-7707-2020-3-2-8
- [10] Ebdndt R., Gunther W., Drechsler R. An improved branch and bound algorithm for exact BDD minimization // Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2003. Vol. 22. № 12. P. 1657–1663.
- [11] Meinel C., Theobald T. Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – Foundations and Applications. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 267 p.
- [12] Ebdndt R., Fey G., Drechsler R. Advanced BDD Optimization. Springer, 2005. 222 p.
- [13] Bibilo P. N. Minimizaciya BDDI-predstavlenij sistem ne polnost'yu opredelennyh bulevykh funkciy (Minimization of Binary Decision Diagrams for Systems of Incompletely Defined Boolean Functions using inverse cofactors) // Programmnaya inzheneriya. 2020. T. 11. № 3. S. 152–168.
- [14] Bibilo P.N. Decomposition and Minimization of Binary Decision Diagrams for Systems of Specified Boolean Functions // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2014. Proceedings / edited by A. Stempkovsky, Moscow, IPPM RAS, 2014. Part 1. P. 3-8.
- [15] Lohov A. Funkcional'naya verifikaciya SBIS v svete reshenij Mentor Graphics (Functional verification of VLSI in the light of Mentor Graphics solutions) // Elektronika: nauka, tekhnologiya, biznes. 2004. № 1. S. 58–62.
- [16] Toropov N. R. Minimizaciya sistem bulevykh funkciy v klasse DNF (Minimization of Boolean function systems in the SOP class) // Logicheskoe proektirovanie. Minsk: In-t tekhn. kibernetiki NAN Belarusi. 1999. Vyp. 4. S. 4–19.
- [17] Bibilo P. N., Lankevich Yu. Yu. Ispol'zovanie polinomov Zhegalkina pri minimizacii mnogourovnevnykh predstavlenij sistem bulevykh funkciy na osnove razlozheniya Shennona (The use of Zhegalkin polynomials in minimizing multilevel representations of systems of Boolean functions based on the Shannon expansion). // Programmnaya inzheneriya. 2017. № 8. S. 369–384.