

# Исследование перспективных топологий сетей на кристалле: применение корневого и прямого произведений графов Пэли

Э.Р. Рзаев, А.Ю. Романов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва

errzaev@edu.hse.ru, a.romanov@hse.ru

**Аннотация** – Представлен обзор существующих топологий сетей на кристалле (СтнК). Проведено исследование графов Пэли в качестве топологической основы для проектирования СтнК. Рассмотрены различные модификации циркулянтных графов. Основной акцент исследования сделан на изучении корневого и прямого произведений графов Пэли, а также дано обоснование нерелевантности рассмотрения тензорного, лексикографического и сильного произведений графов. Выполнено сравнение наиболее важных параметров графов, которые напрямую влияют на основные параметры сетей на кристалле, в том числе на пропускную способность сети и скорость передачи данных между узлами сети.

**Ключевые слова** — сеть на кристалле, циркулянтный граф, графы Пэли, корневое произведение, прямое произведение.

## I. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы интеграция систем на кристалле (СнК) в архитектуры современных встроенных систем происходит повсеместно. Система на кристалле – это СБИС, объединяющая на одном чипе различные функциональные блоки, которые образуют законченное изделие для автономного применения в электронной аппаратуре [1].

СнК может состоять как из одного вычислительного узла, так и из большого числа IP-ядер и узлов периферии. Задачи, которые должны решаться с помощью СнК, становятся более сложными и трудоемкими, поэтому необходимо применять многопроцессорные СнК, в которых сетевые архитектуры в виде сетей на кристалле (СтнК) вытесняют решения, где вычислительные ядра соединены высокопроизводительными шинами [2]. Требуется поиск новых топологических решений, которые бы позволили организовать подсистему связи СтнК так, чтобы она удовлетворяла все возрастающим требованиям, что определяет *актуальность данной работы*.

*Целью данной работы* является исследование перспективных топологий сетей на кристалле, которое включает в себя реализацию алгоритмов построения отдельных структур графов на высокоуровневом языке Python и проведения сравнительного анализа графовых параметров с параметрами известных топологий.

## II. ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СТРУКТУР ГРАФОВ

Высокая актуальность использования СтнК при проектировании многопроцессорных СнК определяет необходимость проведения поиска и анализа топологических структур графов, параметры которых должны не уступать параметрам графов, обычно используемых при разработке СтнК.

В основном используют топологии mesh и torus, но можно встретить использование топологии ring [3]. Также применяются топологии с более сложной структурой, такие как hypercube и Butterfly-Fat-Tree [3]. Отдельно выделяют трехмерные топологии, такие как 3D-mesh, 3D-torus, а также иерархические топологии, такие как midimew-connected mesh networks [4,5], WK-recursive [6] и др.

Недавно в ряде работ [7–11] появилось предложение использовать циркулянтные топологии как топологическую основу СтнК. Применение новой топологии, имеющей лучшие параметры диаметра и среднего расстояния, по сравнению с классическими регулярными топологиями (mesh, torus, ring), дало значительный результат в контексте решения задачи поиска оптимальных топологических структур для построения СтнК [12,13]. В то же время использование циркулянтных топологий также имеет ряд сложностей, связанных с необходимостью поиска оптимальных алгоритмов маршрутизации и борьбы с явлением дедлоков и лайвлоков в сети [14]. Кроме того существует проблема поиска семейств оптимальных циркулянтных графов для количества узлов больше 100 и степени вершин больше 4 [15]. Таким образом, как показал опыт предыдущих исследований, топологический подход к улучшению конечных характеристик СтнК за счет использования более эффективных топологий, дает хорошие результаты, и его следует развивать путем поиска новых топологий, которые могут быть применены для проектирования новых СтнК.

### A. Прямое (декартово) произведение графов

Прямое (декартово) произведение двух графов  $G$  и  $H$ , обозначаемое  $G \square H$ , представляет собой граф с множеством вершин

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H), \quad (1)$$

то есть множество  $\{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$ .

Множество ребер прямого произведения графов  $G \square H$  состоит из всех пар  $[(g_1, h_1), (g_2, h_2)]$  вершин с  $[g_1, g_2] \in E(G)$  и  $h_1 = h_2$ , или  $g_1 = g_2$  и  $[h_1, h_2] \in E(H)$  [16].

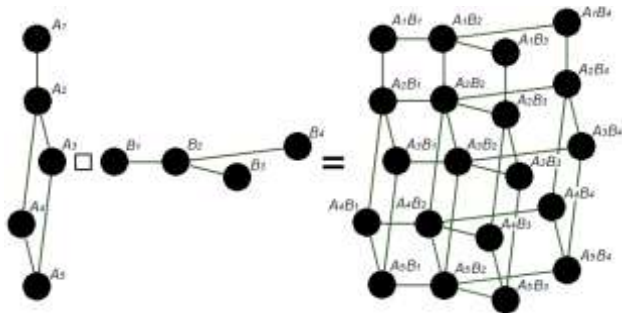


Рис. 1. Прямое (декартово) произведение графов

Таким образом может быть определено декартово произведение графов. Данный метод генерации новых графов применим в рамках нашего исследования, так как он тесно связан с идеей фрактализации структуры графов, а также с иерархическими топологиями [17], узлы которых являются графами. Из различных вариантов применения прямого произведения графов можно получать более сложные топологические структуры графов, которые могут быть полезны в исследовании.

Прямое (декартово) произведение графов лучше остальных (тензорного [15], лексикографического [17] и сильного [18]) произведений подходит для решения поставленной задачи, поскольку они по сравнению с прямым (декартовым) произведением генерируют большее количество соединений между узлами, что приводит к избыточному усложнению топологической структуры графа.

### В. Циркулянтные графы

Циркулянтным графом [19] называется граф, состоящий из множества вершин и ребер таких, что способ соединения вершин ребрами можно выразить однозначно в виде сигнатуры циркулянтного графа вида  $C(N; s_1, s_2, \dots, s_n)$ , где  $C$  – обозначения циркулянтного графа,  $N$  – количество вершин,  $s_1, s_2, \dots, s_n$  – образующие циркулянтного графа.

Образующими циркулянтного графа называются числа, определяющие шаг, с которым будут соединены соседние вершины графа. Например, по сигнатуре  $C(5; 1, 2)$  строится граф, приведенный на рис. 2.

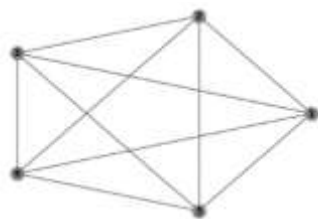


Рис. 2. Граф  $C(5; 1, 2)$

Основными параметрами, которые являются наиболее важными в рамках исследования, являются следующие:

- диаметр графа – число, обозначающее наибольшее расстояние между всеми парами вершин графа;
- средняя длина путей графа;
- плотность графа – отношение количества ребер рассматриваемого графа на  $N$  вершинах к количеству ребер полного графа на  $N$  вершинах.

Необходимость поиска наиболее подходящих структур графа обусловлена требованием обеспечения наилучшего пути между отдельными маршрутизаторами. Именно по причине необходимости учета количества маршрутизаторов, а также количества соединений между ними невозможно создать такую топологию СтнК, прототипом которой является бесконечно большой и полный граф, у которого диаметр и средняя длина путей будут минимальными. По этой же причине при поиске наиболее подходящих структур графов необходимо учитывать параметр плотности графов [20]: если диаметр графа и средняя длина путей стремятся к 1, то количество ребер будет стремиться к  $\frac{N(N-1)}{2}$ , где  $N$  – количество вершин графа, то есть к количеству ребер полного графа. Параметр плотности является важным, поскольку характеризует насколько граф близок к полному [21]. С одной стороны, чем плотнее граф, тем больше существует альтернативных путей для доставки пакетов в графе, но чем больше ребер в графе топологии СтнК, тем выше затраты площади чипа. Поэтому необходимо искать компромиссные решения, и характеристика плотности графа является удобным параметром для сравнения графов.

### С. Графы Пэли

Графы Пэли [22] – неориентированные графы, у которых количество ребер близко к количеству ребер полного графа, и построенные из членов подходящего конечного поля путем соединения пар элементов, отличающихся на значение квадратичного вычета.

Целое число  $a$  называется квадратичным вычетом по модулю  $m$ , если разрешимо сравнение [23]:

$$x^2 \equiv a \pmod{m}. \quad (2)$$

Рассмотрим случай  $q = 17$ . Поле  $F_q$  образуется числами по модулю 17. Числа, имеющие квадратные корни по модулю 17:

- $\pm 1$  (квадратные корни  $\pm 1$  для  $+1$ ,  $\pm 4$  для  $-1$ );
- $\pm 2$  (квадратные корни  $\pm 6$  для  $+2$ ,  $\pm 7$  для  $-2$ );
- $\pm 4$  (квадратные корни  $\pm 15$  для  $+4$ ,  $\pm 8$  для  $-4$ );
- $\pm 8$  (квадратные корни  $\pm 5$  для  $+8$ ,  $\pm 14$  для  $-8$ ).

Исходя из полученных чисел, граф Пэли образуется вершинами, соответствующими числам из интервала  $[0, 16]$ . При этом каждая вершина  $x$  соединена с шестью соседями:  $x \pm 1 \pmod{17}$ ,

$x \pm 2 \pmod{17}$  и  $x \pm 8 \pmod{17}$ . Графическое представление данного графа приведено на рис. 3(а).  $QR(N)$  – обозначение графа Пэли на  $N$  вершинах.

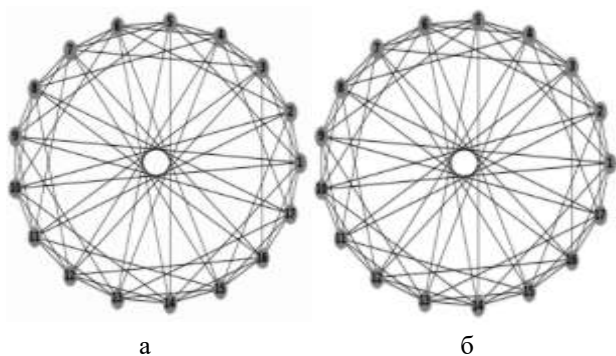


Рис. 3. Граф  $QR(17)$  (а), граф  $C(17; 1, 2, 4, 8)$  (б)

Из рис. 3(а) и рис. 3(б) следует, что  $QR(17) = C(17; 1, 2, 4, 8)$ . Генерация изображений графов осуществлена при помощи разработанных скриптов на языке python [24,25].

#### Д. Корневое произведение графов

Дальнейшее исследование, направленное на поиск методов, способных улучшить имеющиеся результаты прямого произведения графов, показало необходимость исследовать корневое произведение графов [26].

Корневым произведением двух графов  $G$  и  $H$ , обозначаемым  $G \circ H$ , называется граф, полученный путем взятия  $|V(G)|$  копий графа  $H$ , где для каждой  $v_i$  вершины графа  $G$ , производится отождествление  $v_i$  с корневой вершиной  $i$ -ой копии  $H$  [27].

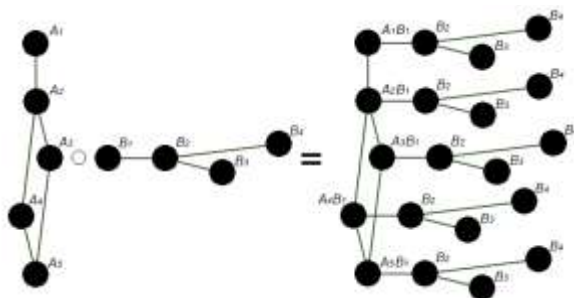


Рис. 4. Корневое произведение графов

Корневое произведение графов имеет следующие преимущества по сравнению с прямым произведением графов: отсутствие генерации дополнительных ребер между графами; более простая топологическая структура для первоначального (визуального) и последующих этапов анализа.

Благодаря отсутствию генерации дополнительных ребер идея применения предфрактальных и фрактальных графов обретает большую значимость и имеет важный прикладной характер.

Идея корневого произведения более полно подходит под понятие иерархической топологии по сравнению с тем, как это понимают в [28,29]. В них

существует ограничение на количество топологий на нулевом уровне, поскольку предлагаемый там метод основывается на установлении связи между топологиями путем сдвига двоичных цифр индекса каждого шага узла влево или вправо, что в некоторых случаях может приводить к повторению значения. Корневое произведение не имеет подобных ограничений, что является его преимуществом.

### III. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К ПОСТРОЕНИЮ ГРАФОВ

С помощью разработанного программного обеспечения (ПО) [30] произведен поиск циркулянтных графов, чьи параметры лучше по сравнению с параметрами известных топологий (mesh, torus, ring) для количества образующих  $k = 2, 3, 4$ . Разработанное ПО [30] находит параметры циркулянтных топологий (такие как диаметр, среднее расстояние, количество соединений), и на основании полученных данных выбирает оптимальные характеристики по критерию минимизации диаметра и среднего расстояния [31].

#### А. Графы Пэли

Чтобы дать оценку применимости графов Пэли в рамках данного исследования, произведена генерация графов Пэли при  $N \in [3, 97]$ , где  $N$  – простое число, а также построены графики сравнения с графами, полученными с помощью разработанного ПО [30].

Объектами сравнения являются основные параметры графа:

- диаметр;
- средняя длина путей;
- плотность;
- количество ребер;
- степень вершин.

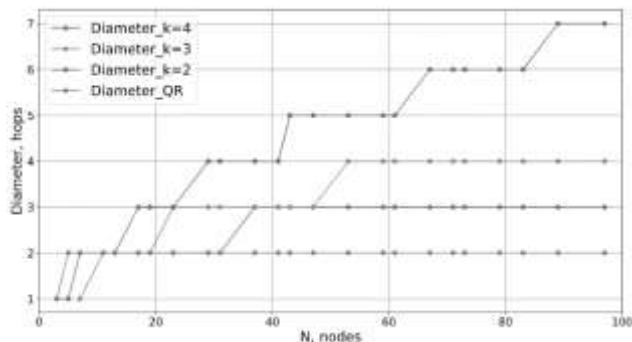


Рис. 5. График зависимости диаметра от количества вершин

Исходя из анализа графика зависимости диаметра от количества вершин, представленном на рис. 5, можно сделать вывод, что графы Пэли (обозначение в легенде графика – «Diameter\_QR») имеют лучшие показатели диаметра графа по сравнению с циркулянтами.

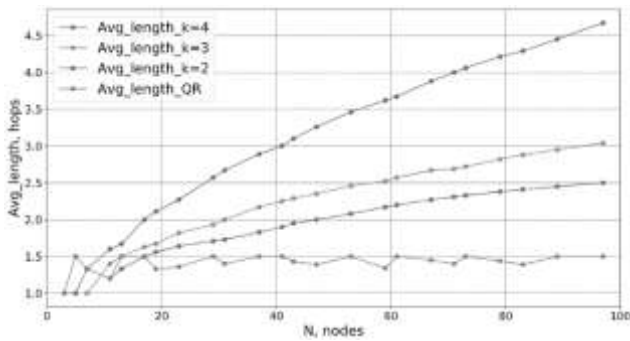


Рис. 6. График зависимости средней длины путей от количества вершин

Исходя из графика, на рис. 6 следует, что показатели средней длины путей лучше у графов Пэли (обозначение в легенде графика – «Avg\_length\_QR»).

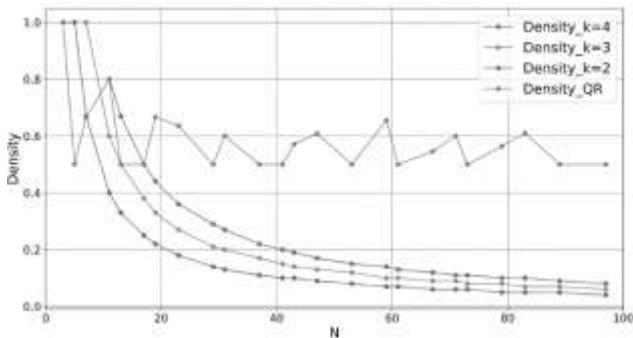


Рис. 7. График зависимости плотности графа от количества вершин

Анализ графика зависимости плотности графа от количества вершин, представленном на рис. 7, показывает, что плотность графов Пэли сходится к 0,5, т.е. отношения количества ребер графа Пэли на  $N$  вершинах к количеству ребер полного графа на  $N$  вершинах стремится к 0,5. Данный показатель значительно хуже, чем у циркулянтных графов, приведенных на этом же графике.

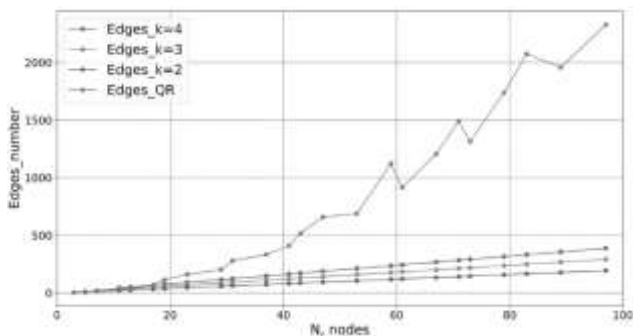


Рис. 8. График зависимости количества ребер от количества вершин

Скорость роста количества ребер у графов Пэли выше, чем у циркулянтных графов, приведенных на графике, изображенном на рис. 8. Величина плотности графа непосредственно зависит от количества ребер графа, следовательно, при увеличении количества ребер, увеличивается показатель плотности графа.

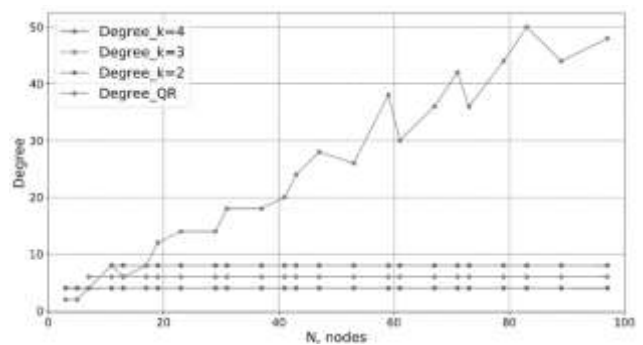


Рис. 9. График зависимости степени вершин графа от количества вершин

Исходя из определения сигнатуры циркулянтных графов, участвующих в сравнении, показатель количества образующих является постоянным, т.е. сигнатура вида  $S(N; s_1, s_2, \dots, s_k)$  имеет ровно  $k$  образующих, поэтому показатель степени вершины равен  $2k$ . Количество образующих графов Пэли не является постоянным из-за того, что при увеличении размера поля  $F_q$  возрастает количество квадратичных вычетов по модулю  $m$ . Это подтверждается графиками на рис. 9.

В результате проведенного анализа полученных графиков на рисунках 10–14, **Ошибка! Источник ссылки не найден.** выделим преимущества и недостатки применения графов Пэли для синтеза топологий для СтнК.

Преимущества:

- Для построения графа Пэли необходимо одно число  $N$  – количество вершин графа. Образующие графа Пэли однозначно определены для каждого количества вершин.
- Графы Пэли имеют лучше показатели диаметра и средней длины путей.

Недостатки:

- Скорость роста количества ребер значительно больше, чем у рассмотренных графов, полученных с помощью разработанного ПО [30], что способствует возникновению возможных трудностей при синтезе топологии для СтнК и усложнению маршрутизаторов.

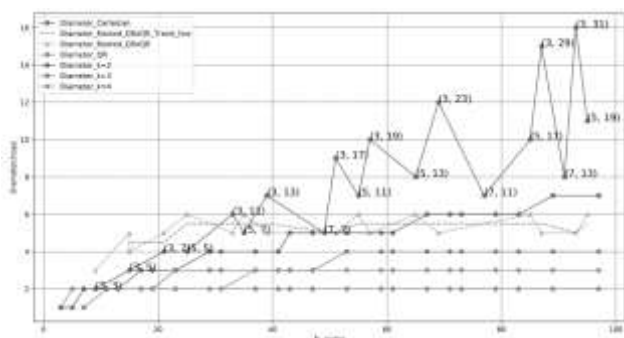
Таким образом, требуется дальнейшее исследование графов Пэли на предмет применимости в СтнК.

### В. Корневое произведение графов

В случае корневого графов  $G \times H$  рассматриваются результаты произведения графов Пэли между собой. Ограничение при перемножении графов определяется предельным количеством вершин результирующего графа, в нашем случае данный показатель не превышает 101 вершины.

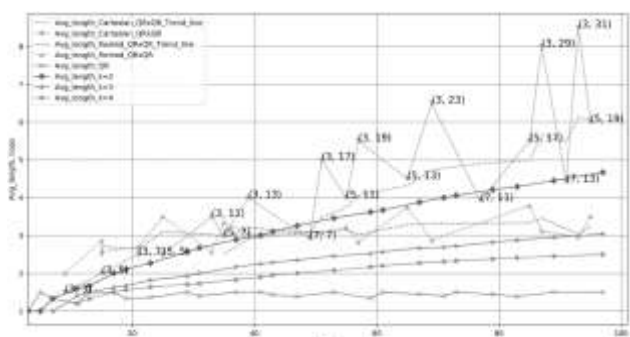
Особое внимание следует уделить сравнению параметров с прямым произведением графов, чтобы понять, какое из рассматриваемых произведений

лучше подходит для генерации графов, являющихся основной топологической структуры проектируемой СтНК.



**Рис. 10. График зависимости диаметра графа от количества вершин**

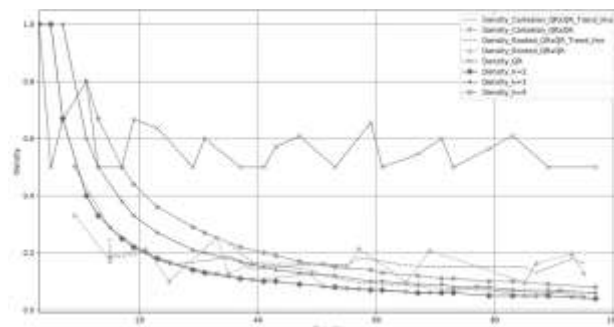
График, изображенный на рис. 10, демонстрирует сравнение показателя диаметра результирующего графа корневого произведения графов Пэли между собой (обозначено в легенде графика как «Diameter\_Rooted\_QR×QR») с прямым произведением графов Пэли между собой (обозначено в легенде графика как «Diameter\_Cartesian») с графами Пэли и графами, полученными в результате работы разработанного ПО [30]. В результате анализа полученных результатов можно сделать вывод, что у графов, получаемых в результате корневого произведения по сравнению с прямым произведением, значение диаметра принимает меньшие значения и имеет меньшую скорость роста. Следует заметить, что показатели корневого произведения имеют сопоставимые показатели с графами, полученными в результате работы разработанного ПО [30], особенно циркулянтными графами размерности  $k = 2$ . Опираясь на построенную линию тренда для корневого произведения графов (обозначена в легенде графика как «Diameter\_Rooted\_QR × QR\_Trend\_line»), при увеличении количества вершин графов, участвующих в корневом произведении, наблюдается линейный рост показателя диаметра графов.



**Рис. 11. График зависимости средней длины путей графа от количества вершин**

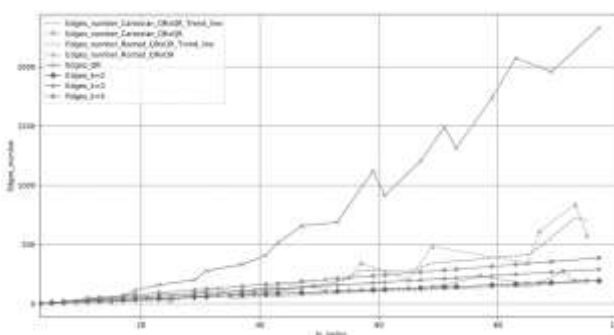
График зависимости средней длины путей графа от количества вершин, приведенном на рис. 11, похож на график, изображенный на рис. 10, что позволяет для этого случая сделать схожие выводы: линии тренда

имеют линейный асимптотический характер, скорость роста графиков прямых произведений несущественно больше, чем на других графиках семейств циркулянтных графов, представленных на рис. 10. Стоит отметить, что скорость роста рассматриваемого показателя меньше, чем у графов, полученных в результате работы разработанного ПО [30], размерности  $k = 2$  и сравнима с показателями данных графов размерности  $k = 3$ .



**Рис. 12. График зависимости плотности графа от количества вершин**

График зависимости плотности графа от количества вершин, изображенного на рис. 12, в случае корневого произведения графов Пэли на графы Пэли при увеличении числа вершин конечного графа сходится к 0,2. Данный показатель хуже, чем у прямого произведения графов. Несмотря на меньшую скорость уменьшения, поведение данного показателя является стабильным.



**Рис. 13. График зависимости количества ребер графа от количества вершин**

На графике зависимости количества ребер графа от количества вершин, представленного на рис. 13, линии тренда корневого произведения графов Пэли на графы Пэли имеют незначительно большую скорость роста по сравнению с показателями линии тренда прямых произведений графов Пэли на графы Пэли. Также корневое произведение графов Пэли между собой имеет скорость роста сопоставимую со скоростями роста циркулянтных графов, при этом значительно превосходя скорость роста графов Пэли.

В результате проведенного анализа полученных графиков на рис. 10–13 отметим преимущества и недостатки применения корневого произведения графов для синтеза топологий для СтНК.

Преимущества:

- Показатели диаметра и средней длины путей графов превосходят аналогичные показатели для случая прямого произведения графов и демонстрируют свою состоятельность при сравнении с выведенными циркулянтными графами различных размерностей  $k = \{2, 3\}$ .

Недостатки:

- Несколько более высокая скорость роста количества ребер и плотности у графов.

Таким образом, можно сделать вывод о применимости корневого произведения графов при проектировании СтнК. В совокупности сопоставления преимуществ и недостатков корневого произведения можно утверждать, что данный метод лучше подходит для построения топологической основы СтнК, чем метод прямого произведения графов. Также, как и в случае вывода о применимости прямого произведения графов, стоит учитывать, что при построении СтнК необходимо проведение исследования достижимой пропускной способности и занимаемых ресурсов на чипе, поскольку только геометрические характеристики, как диаметр и среднее расстояние между узлами дают не всю информацию о полезности той или иной топологии для СтнК.

#### IV. ВЫВОДЫ

В результате проведенного исследования рассмотрены новые подходы к построению топологий для синтеза СтнК, а также предложены новые идеи и методы конфигурации структур топологий. Основной акцент исследования сделан на анализе ранее неиспользовавшихся для проектирования СтнК графах Пэли. С помощью разработанных скриптов на языке Python сгенерированы данные для визуализации и подсчета параметров графов средствами Python. Дано объяснение нерелевантности использования тензорного, лексикографического и сильного произведений графов. В результате проведенного анализа полученных данных сделан вывод о потенциальной возможности применения графов Пэли и метода корневого произведения графов как топологической основы при проектировании новых топологий СтнК. Описаны преимущества и недостатки каждого из предложенных методов, а также ограничения, которые для них существуют.

#### ПОДДЕРЖКА

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Шагурин И. Системы на кристалле. Особенности реализации и перспективы применения // Электронные компоненты. 2009. № 1. С. 37–39.
- [2] Ryu K.K., Shin E., Mooney V.J. A comparison of five different multiprocessor SoC bus architectures // In Proceedings Euromicro Symposium on Digital Systems Design. 2001. P. 202–209. doi: 10.1109/DSD.2001.952283.
- [3] Jerger N.E., Krishna T., Peh L.-S. On-Chip Networks, Second Edition. 210 p.
- [4] Rahman M.M.H., Al Faisal F., Nor R.M., Sembok T.M.T., Behera D.K., Inoguchi Y. Cost Effectiveness Analysis of a Vertical Midimew-Connected Mesh Network (VMMN) // In Advances in Intelligent Systems and Computing. 2017. P. 45–53. doi: 10.1007/978-981-10-3874-7\_5.
- [5] Rahman M.M.H., Ali M.N.M., Ibrahim A. A., Behera D.K., Miura Y., Inoguchi Y. A New Static Cost-Effective Parameter for Interconnection Networks of Massively Parallel Computer Systems // In Advances in Intelligent Systems and Computing. Springer Verlag. 2019. V. 758. P. 147–155. doi: 10.1007/978-981-13-0514-6\_15.
- [6] Su M.-Y., Chen G.-H., Duh D.-R. A shortest path routing algorithm for incomplete WK-recursive networks // IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 1997. V. 8. № 4. P. 367–379. doi: 10.1109/71.588608.
- [7] Monakhova E.A., Romanov A.Yu., Lezhnev E.V. Shortest Path Search Algorithm in Optimal Two-Dimensional Circulant Networks: Implementation for Networks-on-Chip // IEEE Access. 2020. V. 8. P. 215010–215019. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3040323.
- [8] Romanov A.Yu., Starykh V.A. Routing in triple loop circulants: A case of networks-on-chip // Heliyon. V. 6. № 7. P. e04427. Jul. 2020. doi: 10.1016/j.heliyon.2020.e04427.
- [9] Monakhova E.A., et al. Analytical Routing Algorithm for Networks-on-Chip with the Three-dimensional Circulant Topology // Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). IEEE. 2020. Art. no. 9067418. P. 1–6. doi: 10.1109/MWENT47943.2020.9067418.
- [10] Romanov A.Yu., Sidorenko M.V., Monakhova E.A. Routing in Networks-on-Chip with a Three-Dimensional Circulant Topology // Inf. Tehnol. 2020. V. 26. № 1. P. 22–29. doi: 10.17587/it.26.22-29.
- [11] Прилепко П.М., Романов А.Ю., Лежнев Е.В. Модификация высокоуровневой модели NoCModel 2.0 для моделирования сетей на кристалле с циркулянтными топологиями // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2020. Вып. 4. С. 23–30. doi: 10.31114/2078-7707-2020-4-23-30.
- [12] Monakhova E.A., Monakhov O.G. Searching for record circulant graphs using a parallel genetic algorithm // Discrete Analysis and Operations Research. 2015. V. 22. № 6. P. 29–42. doi: 10.17377/daio.2015.22.509.
- [13] Bevan D., Erskine G., Lewis R. Large circulant graphs of fixed diameter and arbitrary degree // Ars Math. Contemp. Mar. 2017. V. 13. № 2. P. 275–291. doi: 10.26493/1855-3974.969.659.
- [14] Alaei M., Yazdanpanah F. A high-performance FPGA-based multicrossbar prioritized network-on-chip // Concurr. Comput. 2020. P. 2–3. doi: 10.1002/cpe.6055.
- [15] Monakhov O., Monakhova E. Regular Network Class Features Enhancement Using an Evolutionary Synthesis Algorithm // Sci. Educ. Bauman MSTU. 2014. V. 14. № 10. P. 273–283. doi: 10.7463/1014.0728878.
- [16] Imrich W., Rall D. F. Topics in graph theory: Graphs and their cartesian product. 219 p.
- [17] Lai P.-L., et al. A class of hierarchical graphs as topologies for interconnection networks // Theor. Comput. Sci. 2010. 2010. V. 411. № 31–33. P. 2912–2924. doi: 10.1016/j.tcs.2010.04.022.
- [18] Cáceres J., et al. On the geodetic and the hull numbers in strong product graph // Computers & Mathematics with

- Applications. 2010. V. 60. № 11. P. 3020–3031. doi: 10.1016/j.camwa.2010.10.001.
- [19] Munir M., et al. Some Invariants of Circulant Graphs. *Symmetry (Basel)*. MDPI AG. 2016. V. 8. № 11. P. 134–142. doi: 10.3390/sym8110134.
- [20] Zhukovskii M.E., Raigorodskii A.M. Random graphs: models and asymptotic characteristics // *Uspekhi Mat. Nauk*. 2015. V. 70. № 1(421). P. 35–88. doi: 10.4213/rm9626.
- [21] Пилипчук Л.А. Задача оптимального расположения сенсоров в узлах некоторых специальных графов // *Международный конгресс по информатике: Информационные системы и технологии*. Минск: БГУ, 2016. С. 1056–1060.
- [22] Kim T.K., Praeger C.E. On generalised Paley graphs and their automorphism groups // *Michigan Math. J*. 2009. V. 58. № 1. P. 293–308. doi: 10.1109/TPDS.2011.109.
- [23] Vinogradov I.M. *Encyclopedia of Mathematics*. 552 p.
- [24] Rzaev E.R. Circulant-graphs/paley\_drawing. URL: <https://github.com/EternalExodus/Circulant-graphs> (дата обращения: 20.05.2021).
- [25] Rzaev E.R. Circulant-graphs/graph\_drawing. URL: <https://github.com/EternalExodus/Circulant-graphs> (дата обращения: 20.05.2021).
- [26] Kuziak D., Lemanska M., Yero I.G. Domination related parameters in rooted product graphs // *Bull. Malaysian Math. Sci. Soc*. 2012. V. 39. № 1. P. 199–217. doi: 10.1007/s40840-015-0182-5.
- [27] Martínez A. C., et al. Total Roman Domination Number of Rooted Product Graphs// *Mathematics*. 2020. V. 8. № 10. P. 1850–1863. doi: 10.3390/math8101850.
- [28] Inoguchi Y., et al. The connectivity and the static-cost-effective analysis of a shifted completely connected network // *Int. J. Comput. Intell. Stud*. 2019. V. 8. № 1/2. P. 158–175. doi: 10.1504/IJCISTUDIES.2019.10019186.
- [29] Ali M.N.M., et al. SCCN: A Time-Effective Hierarchical Interconnection Network for Network-On-Chip // *Mob. Networks Appl. Mobile Networks and Applications*. 2019. V. 24. № 4. P. 1255–1264. doi: 10.1007/s11036-019-01262-2.
- [30] Romanov A.Yu., Glukhikh A.Yu. circulantGraphs. URL: <https://github.com/RomeoMe5/circulantGraphs> (дата обращения: 20.05.2021).
- [31] Romanov A.Yu., Romanova I.I., Glukhikh A.Yu. Development of a Universal Adaptive Fast Algorithm for the Synthesis of Circulant Topologies for Networks-on-Chip Implementations // *2018 IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO)*. IEEE. 2018. P. 110–115. doi: 10.1109/ELNANO.2018.8477462.

## Research of Promising Network-on-Chip Topologies: Application of Root and Direct Products of Paley Graphs

E.R. Rzaev, A.Yu. Romanov

HSE University, Moscow

errzaev@edu.hse.ru, a.romanov@hse.ru

**Abstract — This paper provides an overview of existing network-on-a-chip (NoC) topologies. The study of Paley graphs as a topological graph basis for the design of NoC is carried out. Various modifications of circulant graphs are considered. The main focus of the research is directed to the study of the direct and root products of Paley graphs, the substantiation of the irrelevance of considering tensor, lexicographic and strong products of graphs is given. The comparison of the most important parameters of the graphs, which directly affect the main parameters of networks-on-chip, including the network bandwidth and the speed of data transfer between network nodes, is performed.**

**Keywords — network-on-chip, circulant graph, Paley graphs, root product, direct product.**

### REFERENCES

- [1] Shagurin I. Sistemy na kristalle. Osobennosti realizacii i perspektivy primeneniya (Systems on a chip. Features of implementation and prospects of application) // *Elektronnye komponenty*. № 1. 2009. P. 37–39.
- [2] Ryu K.K., Shin E., Mooney V.J. A comparison of five different multiprocessor SoC bus architectures // *In Proceedings Euromicro Symposium on Digital Systems Design*. 2001. P. 202–209. doi: 10.1109/DSD.2001.952283.
- [3] Jerger N.E., Krishna T., Peh L.-S. *On-Chip Networks*, Second Edition. 210 p.
- [4] Rahman M.M.H., Al Faisal F., Nor R.M., Sembok T.M.T., Behera D.K., Inoguchi Y. Cost Effectiveness Analysis of a Vertical Midimew-Connected Mesh Network (VMMN) // *In Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2017. P. 45–53. doi: 10.1007/978-981-10-3874-7\_5.
- [5] Rahman M.M.H., Ali M.N.M., Ibrahim A. A., Behera D.K., Miura Y., Inoguchi Y. A New Static Cost-Effective Parameter for Interconnection Networks of Massively Parallel Computer Systems // *In Advances in Intelligent Systems and Computing*. Springer Verlag. 2019. V. 758. P. 147–155. doi: 10.1007/978-981-13-0514-6\_15.
- [6] Su M.-Y., Chen G.-H., Duh D.-R. A shortest path routing algorithm for incomplete WK-recursive networks // *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* V. 8. № 4. 1997. P. 367–379. doi: 10.1109/71.588608.
- [7] Monakhova E.A., Romanov A.Yu., Lezhnev E.V. Shortest Path Search Algorithm in Optimal Two-Dimensional Circulant Networks: Implementation for Networks-on-Chip // *IEEE Access*. 2020. V. 8. P. 215010–215019. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3040323.
- [8] Romanov A.Yu., Starykh V.A. Routing in triple loop circulants: A case of networks-on-chip // *Heliyon*. 2020. V. 6. № 7. P. e04427. doi: 10.1016/j.heliyon.2020.e04427.

- [9] Monakhova E.A., et al. Analytical Routing Algorithm for Networks-on-Chip with the Three-dimensional Circulant Topology // Moscow Workshop on Electronic and Networking Technologies (MWENT). IEEE. 2020. Art. no. 9067418. P. 1–6. doi: 10.1109/MWENT47943.2020.9067418.
- [10] Romanov A.Yu., Sidorenko M.V., Monakhova E.A. Routing in Networks-on-Chip with a Three-Dimensional Circulant Topology // Inf. Tehnol. 2020. V. 26. № 1. P. 22–29. doi: 10.17587/it.26.22-29.
- [11] Prilepko P.M., Romanov A.Yu., Lezhnev E.V. Modification of a High-Level NoCModel 2.0 for Modeling Networks-on-Chip with Circulant Topologies // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development. 2020. Issue 4. P. 23–30. doi: 10.31114/2078-7707-2020-4-23-30 (in Russian)
- [12] Monakhova E.A., Monakhov O.G. Searching for record circulant graphs using a parallel genetic algorithm // Discrete Analysis and Operations Research. 2015. V. 22. № 6. P. 29–42. doi: 10.17377/daio.2015.22.509.
- [13] Bevan D., Erskine G., Lewis R. Large circulant graphs of fixed diameter and arbitrary degree // Ars Math. Contemp. Mar. 2017. V. 13. № 2. P. 275–291. doi: 10.26493/1855-3974.969.659.
- [14] Alaei M., Yazdanpanah F. A high-performance FPGA-based multicrossbar prioritized network-on-chip // Concurr. Comput. 2020. P. 2–3. doi: 10.1002/cpe.6055.
- [15] Monahov O., Monakhova E. Regular Network Class Features Enhancement Using an Evolutionary Synthesis Algorithm // Sci. Educ. Bauman MSTU. Oct. 2014. V. 14. № 10. P. 273–283. doi: 10.7463/1014.0728878.
- [16] Imrich W., Rall D. F. Topics in graph theory: Graphs and their cartesian product. 219 p.
- [17] Lai P.-L., et al. A class of hierarchical graphs as topologies for interconnection networks // Theor. Comput. Sci. 2010. V. 411. № 31–33. P. 2912–2924. doi: 10.1016/j.tcs.2010.04.022.
- [18] Cáceres J., et al. On the geodetic and the hull numbers in strong product graph // Computers & Mathematics with Applications. 2010. V. 60. № 11. P. 3020–3031. doi: 10.1016/j.camwa.2010.10.001.
- [19] Munir M., et al. Some Invariants of Circulant Graphs. Symmetry (Basel). MDPI AG. 2016. V. 8. № 11. P. 134–142. doi: 10.3390/sym8110134.
- [21] Pilipchuk L.A. Zadacha optimal'nogo raspolozheniya sensorov v uzlah nekotoryh special'nyh grafov (Optimal location of sensors at the nodes of some special graphs) // Mezhdunarodnyj kongress po informatike: Informacionnye sistemy i tekhnologii. Minsk: BGU. 2016. P. 1056–1060.
- [22] Kim T.K., Praeger C.E. On generalised Paley graphs and their automorphism groups // Michigan Math. J. 2009. V. 58. № 1. P. 293–308. doi: 10.1109/TPDS.2011.109.
- [23] Vinogradov I.M. Encyclopedia of Mathematics. 552 p.
- [24] Rzaev E.R. Circulant-graphs/paley\_drawing. URL: <https://github.com/EternalExodus/Circulant-graphs> (access date: 20.05.2021).
- [25] Rzaev E.R. Circulant-graphs/graph\_drawing. URL: <https://github.com/EternalExodus/Circulant-graphs> (access date: 20.05.2021).
- [26] Kuziak D., Lemanska M., Yero I.G. Domination related parameters in rooted product graphs // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 2012. V. 39. № 1. P. 199–217. doi: 10.1007/s40840-015-0182-5.
- [27] Martínez A. C., et al. Total Roman Domination Number of Rooted Product Graphs// Mathematics. 2020. V. 8. № 10. P. 1850–1863. doi: 10.3390/math8101850.
- [28] Inoguchi Y., et al. The connectivity and the static-cost-effective analysis of a shifted completely connected network // Int. J. Comput. Intell. Stud. 2019. V. 8. № 1/2. P. 158-175. doi: 10.1504/IJCISTUDIES.2019.10019186.
- [29] Ali M.N.M., et al. SCCN: A Time-Effective Hierarchical Interconnection Network for Network-On-Chip // Mob. Networks Appl. Mobile Networks and Applications. 2019. V. 24. № 4. P. 1255–1264. doi: 10.1007/s11036-019-01262-2.
- [30] Romanov A.Yu., Glukhikh A.Yu. circulantGraphs/PCG Console.exe. URL: <https://github.com/RomeoMe5/circulantGraphs> (access date: 20.05.2021).
- [31] Romanov A.Yu., Romanova I.I., Glukhikh A.Yu. Development of a Universal Adaptive Fast Algorithm for the Synthesis of Circulant Topologies for Networks-on-Chip Implementations // 2018 IEEE 38th International Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). IEEE. 2018. P. 110–115. doi: 10.1109/ELNANO.2018.8477462.