УДК 517.518.85:517.443 DOI: 10.31114/2078-7707-2021-1-87-94

Сравнительный анализ теорем отсчетов во временной и частотной областях

Г.С. Ханян

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, г. Москва,
khanyan@rtc.ciam.ru

***Аннотация* — Проводится компаративное исследование границ применимости двух теорем отсчетов в их формулировках для сигналов и спектров, отсутствующее в литературе по этой теме. Показано, что частотные диапазоны справедливости финитных версий обеих теорем совпадают, а инфинитные версии получаются в результате предельного перехода к бесконечности размера соответствующей финитной области.**

***Ключевые слова* — аналоговые и дискретные преобразования Фурье, финитные и инфинитные сигналы и спектры, индексы частотной полосы и окна времени.**

I. Введение

Теорема отсчетов занимает значимое концептуальное положение в одном из основополагающих разделов цифровой обработки сигналов – фурье-анализе – инструменте теоретического исследования переменных процессов методом преобразования Фурье и создания практических приложений для обработки большого объема экспериментальных данных по измерению их частотно-временных характеристик.

Имеются две формулировки теоремы отсчетов: более известная по работам классиков [1]-[3], и представленная работами многих (сотен) авторов в обширном списке литературы, приведенном в солидной монографии [4] – для временной области, и менее известная (изложенная в классической формулировке в отдельных параграфах книг [5]-[6]) – для частотной области. Такое положение вещей нельзя считать справедливым, поскольку обе теоремы с точки зрения взаимосвязи сигнала и спектра в паре преобразований Фурье дуальны друг другу. Кроме того, задача восстановления спектра не менее важна, если речь идет о сглаживании такого эффекта его дискретизации как просачивание (занижение амплитуды и искажение фазы), чем задача восстановления сигнала путем интерполяции его отсчетов.

Сравнительный анализ обеих теорем отсчетов проводится с целью установления их равноправия в обеих их версиях (инфинитной и финитной), представленных в [7]-[11] и других работах автора по этой теме – с использованием и дальнейшим развитием некоторых, фундаментальных в общей теории фурье-анализа результатов, полученных в работе [12], что должно придать теории интерполяции функций на базе равномерной дискретизации и свертки с ядром тригонометрического типа логически более завершенную форму.

II. Теорема отсчетов во временной области

Сигнал $s(t)$ восстанавливается по отсчетам $s(t_n)$; $t_n = t_0 + n/F$, полученным с частотой дискретизации F при произвольном базовом моменте времени t_0. В зависимости от того, имеет сигнал неограниченную длительность и бесконечное число отсчетов с номерами $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ или ограниченную длительность T и $N = FT$ отсчетов с номерами $n = 0, 1, \dots, N-1$, теорема имеет две версии – инфинитную и финитную.

A. Теорема отсчетов для инфинитного сигнала

Сигнал $s(t)$ восстанавливается преобразованием

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t_n) \frac{\sin\pi(G+1)F(t-t_n) - \sin\pi GF(t-t_n)}{\sin\pi F(t-t_n)} \quad (1)$$

бесконечного числа отсчетов $s(t_n)$, ядро которого наряду с F и t_0 содержит параметр G – индекс частотной полосы, объемлющей диапазон частот

$$GF/2 \le F_{low} < f < F_{up} \le (G+1)F/2 \quad (2)$$

с нижней F_{low} и верхней F_{up} частотами среза – границами представления сигнала, в силу линейности преобразования (1), как суперпозиции гармонических колебаний с амплитудами $a(f)$ и фаз $\varphi(f)$:

$$s(t) = \int_{F_{low}}^{F_{up}} a(f)\cos(2\pi ft + \varphi(f))\,df\,. \quad (3)$$

При доказательстве теоремы в работе [9] было установлено, что ширина полосы $F_{up} - F_{low}$, где теорема справедлива, максимальна, т.е. равна частоте Найквиста $\Delta F = F/2$ лишь при целых значениях индекса G. При $G = 0$ в неравенство (2) включается частота $f = 0$ постоянной составляющей сигнала: $0 \le f < F/2$. При остальных действительных значениях G диапазон справедливости теоремы у́же G-полосы: $F_{low} > GF/2$, $F_{up} < (G+1)F/2$. В общем случае формулы для частот среза выглядят так:

$$\begin{cases} F_{low} = ([|G+1/2|] - |\{G\} - 1/2| + 1/2)F/2 \\ F_{up} = ([|G+1/2|] + |\{G\} - 1/2| + 1/2)F/2 \end{cases}, \quad (4)$$

где квадратные скобки означают целую часть заключенного в них выражения, фигурные – дробную.

Для неотрицательных значений $G \ge 0$, в зависимости от расположения дробной части индекса $\gamma = \{G\}$ слева или справа от критического значения $\gamma = 1/2$ и независимо от целой части $g = [G]$, неравенство (2) и формулы (4) для приведенной частоты f/F выглядят проще:

$$\left[\begin{array}{l} G/2 < f/F < (G+1)/2-\gamma, \ \ 0 \le \gamma < 1/2 \\ G/2+1-\gamma < f/F < (G+1)/2, \ \ 1/2 \le \gamma < 1 \end{array}\right. , \quad (5)$$

откуда видно, что левая граница G-полосы достигается при $\gamma < 1/2$, правая – при $\gamma > 1/2$. При $\gamma = 1/2$ оба неравенства совокупности (5) перестают выполняться, и теорема оказывается неверной.

B. Теорема отсчетов для финитного сигнала

Сигнал $s(t)$ восстанавливается преобразованием

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(t_n) \frac{\sin \pi (G+1) F(t-t_n) - \sin \pi G F(t-t_n)}{N \sin \pi F(t-t_n)/N}, \quad (6)$$

ядро которого наряду с F, G и t_0 содержит параметр N в качестве длины цифровой реализации $s(t_n)$ сигнала $s(t)$.

При доказательстве теоремы в работе [7] было установлено, что неравенства (2) и (5) остаются в силе, однако теорема верна не для всех удовлетворяющих им вещественных G и f, а лишь для квантованных с шагом $1/N$ значений индекса

$$G = g + \gamma; \ \ g = 0,1,...; \ \ \gamma = 0, 1/N, ..., (N-1)/N \quad (7)$$

и для целых или полуцелых безразмерных частот

$$f_m T = m + \mu; \ \ m \equiv [f_m T] = 0,1,...; \ \ \mu \equiv \{f_m T\} = 0, 1/2, \quad (8)$$

определяемых условиями вычислимости суммы (6):

$$\mu = \{(GN + N + 1)/2\}, \ \ \{GN\} = 0, \ \ G\{N/2\} = 0, \quad (9)$$

в результате чего теорема оказывается справедливой для аналогового полигармонического сигнала

$$s(t) = \sum_{m=P}^{Q} a_m \cos(2\pi f_m t + \varphi_m), \quad (10)$$

представляющего собой суперпозицию гармонических колебаний с параметрами $f_m \ge 0$, $a_m \ge 0$, $-\pi < \varphi_m \le \pi$ и целочисленными границами суммирования

$$\left\{\begin{array}{l} P = [(GN - N + 1)/2] + N[\gamma + 1/2](1-\gamma) + [N/2] \\ Q = [(GN + N - 1)/2] + N[\gamma - 1/2]\gamma \end{array}\right. . \quad (11)$$

Число гармоник в сигнале (10) составляет

$$M = Q - P + 1 = N|\gamma - 1/2| + \{N/2\}. \quad (12)$$

Оно максимально ($M = N - [N/2]$) при целом индексе $G = g$ и минимально ($M = 0$) при полуцелом $G = g + 1/2$.

В терминах частот среза указанные в (10) границы суммирования (11) отличаются от пределов интегрирования в (3), определяемым по формулам (4), не более чем на половину спектрального разрешения $\Delta f = 1/T$:

$$\left\{\begin{array}{l} (P+\mu)/T = F_{low} + (1 - N \bmod 2)\Delta f/2 \\ (Q+\mu)/T = F_{up} - \Delta f/2 \end{array}\right. , \quad (13)$$

и стремятся к ним при стремлении длительности сигнала T и числа отсчетов N к бесконечности при сохранении частоты дискретизации $F = N/T$ постоянной.

Кроме того, можно показать, что при ограничениях (7) и (9) на G и μ, замена t_n на t_{n+IN}, где $I = 0, \pm 1, \ldots$ – произвольное целое число, преобразование (6) остается инвариантным (не меняет свой вид). Тогда, используя $I = -1$, мы можем заменить в нем суммирование по $n = 0, \ldots, N-1$ на $n = -N/2, \ldots, N/2-1$ при четном N или на $n = -(N-1)/2, \ldots, (N-1)/2$ при нечетном N, что позволит при устремлении N к бесконечности свести это преобразование к (1), и, с учетом сказанного относительно (13), трактовать инфинитную версию теоремы отсчетов во временной области как предельную версию финитной.

III. Теорема отсчетов в частотной области

Данная теорема дуальна предыдущей в смысле замены задачи восстановления сигнала по своим отсчетам на такую же задачу восстановления спектра. Она также имеет две версии: инфинитную – для спектра бесконечной протяженности, и финитную – для спектра с конечной шириной полосы F.

A. Теорема отсчетов для инфинитного спектра

Восстановлению подлежит спектральная функция

$$S(f) = \int_{(H-1/2)T}^{(H+1/2)T} s(t) e^{-i2\pi f t} dt, \quad -\infty < f < +\infty \quad (14)$$

сигнала $s(t)$ длительности T, наблюдаемого в окне времени с индексом H – параметром, задающим абсолютное местоположение сигнала на оси времени t, и, тем самым, определяющим пределы интегрирования в (14).

Исходными данными служат отсчеты спектральной функции $S(f_k)$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, полученные с интервалом $\Delta f = 1/T$ при произвольной базовой частоте f_0:

$$S(f_k) = \int_{(H-1/2)T}^{(H+1/2)T} s(t) e^{-i2\pi f_k t} dt, \quad f_k = f_0 + k\Delta f \cdot \quad (15)$$

При доказательстве теоремы в работе [10] установлено, что спектр восстанавливается преобразованием

$$S(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S(f_k) \frac{\sin \pi (f - f_k)T}{\pi (f - f_k)T} e^{-i2\pi H (f - f_k)T} \quad (16)$$

при любых значениях параметров f_0 и H.

Таким образом, инфинитное (определенное на всей частотной оси) интегральное преобразование Фурье (ИПФ) финитной функции времени можно без всяких ограничений восстановить по смещенному ряду Фурье (ИДПРФ) этой функции [12]. Поясним, что ряд Фурье мы называем смещенным из-за параметра f_0, полагаемого многими авторами равным нулю по умолчанию. Отметим, что за параметр смещения удобно принять не f_0, а безразмерную величину $\mu = \{f_0 T\}$, как это сделано в работе [10]. Замечая, что бесконечные пределы суммирования в (16) от смещения номера k на $[f_0 T]$ не изменятся, можно положить $f_0 = \mu \Delta f$, так что $0 \le f_0 < \Delta f$.

B. Теорема отсчетов для финитного спектра

Восстановлению подлежит спектральная функция

$$S(f)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(t_n)e^{-i2\pi f t_n};\quad f_0\le f<f_0+F, \qquad (17)$$

определяемая как дискретно-временное преобразование Фурье (ДВПФ) конечного числа $N=FT$ отсчетов $s(t_n)$; $t_n=t_0+n\Delta t$ сигнала $s(t)$ длительности T, полученных с интервалом дискретизации $\Delta t=1/F$ начиная с базового момента времени t_0.

Исходными данными служат N отсчетов $S(f_k)$; $f_k=f_0+k\Delta f$; $k=0,1,\ldots,N-1$ спектра $S(f)$, полученных с частотным разрешением $\Delta f=1/T$ при произвольной базовой частоте f_0.

Доказательство теоремы проводилось в работе [11] для дискретной спектральной функции

$$S(f_k)=\frac{a}{2}\sum_{j=\pm1}e^{i(2\pi(jf'-f_k)t_M+j\varphi_m)}\,\frac{\sin\pi(jf'-f_k)T}{N\sin\pi(jf'-f_k)T/N} \qquad (18)$$

цифровой реализации базового сигнала – процесса гармонических колебаний

$$s(t_n)=a\cos(2\pi f' t_n+\varphi);\quad a>0,\quad f'\ge0,\quad -\pi<\varphi\le\pi \qquad (19)$$

с частотой f', амплитудой a и фазой φ, наблюдаемого в окне времени с индексом H и серединным отсчетом $t_M=(t_0+t_{N-1})/2=HT-\Delta t/2$.

Необходимым условием справедливости теоремы оказалась целочисленность произведения $2f_0T$. Кроме того, было установлено, что аналоговый спектр $S(f)$ восстанавливается преобразованием

$$S(f)=\sum_{k=0}^{N-1}S(f_k)\frac{\sin\pi(f-f_k)T}{N\sin\pi(f-f_k)T/N}e^{-i2\pi(f-f_k)t_M}, \qquad (20)$$

где $S(f_k)$ – дискретный спектр дискретного сигнала

$$s(t_n)=\sum_{m=P}^{Q}a_m\cos(2\pi f_m t_n+\varphi_m), \qquad (21)$$

частоты гармоник которого $f_m=f_0+m/T$ не произвольны, как заявлено в (19), а отсчитываются от той же базовой частоты f_0, что и узлы f_k интерполяционной формулы (20). Разумеется, что некоторые из амплитуд a_m можно, для разнообразия, положить равными нулю.

Финитной спектральная функция $S(f)$ названа условно – из-за конечного числа N преобразуемых ее отсчетов $S(f_k)$ в конечной (финитной) полосе частот $f_0\le f_k<f_0+F$. По сути, однако, функция $S(f)$ определена на всей частотной оси, но объем содержащейся в ней информации (о поведении ее графика) конечен, поскольку функция эта обладает свойством повторяемости

$$S(f+IF)=e^{-i2\pi IFt_0}S(f);\quad I=0,\pm1,\pm2,\ldots, \qquad (22)$$

названным в работе [11] квазипериодичностью (обобщением обычной периодичности на случай $\{Ft_0\}\neq0$).

Примечательно, что целочисленные границы P и Q суммирования гармоник в (21) могут, в принципе, быть любыми неотрицательными числами, удовлетворяющими весьма расплывчатому неравенству $Q\ge P\ge0$. Однако из-за свойства квазипериодичности (22) при $Q-P>N$ произойдет наложение гармоник, номера m и $m+IN$ которых неразличимы по модулю N, что обесценит практическую значимость спектральной функции как средства разложения сигнала на сумму различающихся гармонических колебаний. Поэтому, исходя из того, что обе финитные версии обеих теорем отсчетов имеют, как отмечено в работе [11], общую этимологию – пару взаимно-обратимых конечных преобразований Фурье (КПФ) [12]

$$S(f_m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s(t_n)e^{-i2\pi f_m t_n},\quad s(t_n)=\sum_{m=0}^{N-1}S(f_m)e^{i2\pi f_m t_n}, \qquad (23)$$

возникает вопрос о том, должны ли параметры P и Q определяться по тем же формулам (11) с G из (7) и с f_m из (8), (9), что и в дуальной теореме, описанной в n° II-*B*.

Следует, однако, признать, что задача эта решена в работе [11] не полностью, поскольку к тому времени не был еще разработан метод исследования, изложенный в n° V, и справедливость теоремы была констатирована только для целочисленных индексов G, обеспечивающих лишь достаточность условия целочисленности GN.

IV. Ряды Фурье с целыми и полуцелыми безразмерными частотами гармоник

Вернемся к n° III-*A* – теореме отсчетов в частотной области для инфинитного спектра.

Тот факт, что спектр восстанавливается преобразованием (16) без каких-либо ограничений на индекс окна времени H, существенно отличает эту теорему от описанной в n° II-*A* дуальной к ней теоремы, справедливой при весьма жестких ограничениях (2), (4), (5) на индекс G – аналог параметра H в частотной области.

В то же время кажется естественным, что на справедливость обеих теорем не влияют оба дуальных друг другу параметра f_0 и t_0. Однако именно с первым из них – определяющим смещение $\mu=\{f_0T\}$ ряда Фурье (15), связана одна из малоизученных, но существенных методологических проблем фурье-анализа.

Дело в том, что обратное преобразование Фурье, взятое как от ИПФ (14), так и от ИДПРФ (15), дает для функции $s(t)$, удовлетворяющей условиям Дирихле (кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной на любом конечном отрезке времени), один и тот же результат

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}S(f)e^{i2\pi ft}df=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}S(f_m)e^{i2\pi f_m t}\Delta f=\\&=s'(t)=\begin{cases}\dfrac{s(t+0)+s(t-0)}{2}, & |t-HT|\le T/2\\ 0, \quad |t-HT|>T/2\end{cases}\end{aligned}, \qquad (24)$$

представляющий собой среднеарифметическое лево- и правостороннего пределов этой функции в рассматриваемом окне времени и тождественный ноль вне этого окна (так что $s'(t)=s(t)$ «почти всюду» – за исключением ограниченного числа точек разрыва первого рода).

Проблема, о которой идет речь, рассмотрена и решена частично (для $f_0=0$) в работе [12]. Заключается она в том, что вещественная функция $s'(t)$, будучи всегда представимой в аналоговой вещественной форме

$$\begin{cases} s'(t) = \int_0^\infty A(f)\cos(2\pi f t + \Phi(f))df \\ A(f) = 2\,|\,S(f)\,|, \quad \Phi(f) = \arg S(f) \end{cases} \tag{25}$$

через аналоговые вещественные спектры амплитуд $A(f)$ и фаз $\Phi(f)$, может быть представлена в дискретной вещественной форме только для двух значений смещения μ ряда Фурье:

$$\begin{cases} s'(t) = \begin{bmatrix} S(0)\Delta f + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(2\pi f_m t + \Phi_m), & \mu = 0 \\ \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(2\pi f_m t + \Phi_m), & \mu = 1/2 \end{bmatrix} \\ f_m = (m+\mu)\Delta f,\ A_m = 2\,|\,S(f_m)\,|\,\Delta f,\ \Phi_m = \arg S(f_m) \end{cases} . \tag{26}$$

Возможность такого представления зависит от наличия или отсутствия в отрицательной частотной области точки $-f_m=f_{m'}$ с некоторым номером m' при той же базовой частоте f_0, что для рассматриваемой точки f_m неотрицательной частотной области. Если такая точка существует, то существуют оба комплексно-сопряженных отсчета спектра $S(\pm f_m)$, порождающие m-ю вещественную гармонику в одном из двух возможных типов разложения сигнала (26). Для выяснения условий такой парности отсчетов спектра нужно решить систему двух уравнений $-f_m=f_0+m'\Delta f, f_m=f_0+\Delta f$ с $f_0=\mu\Delta f$, где μ – смещение ряда Фурье. Сложение этих уравнений с последующим делением слагаемых на Δf дает соотношение $0=2\mu+m+m'$, откуда, ввиду целочисленности m и m', получаем $\mu=0$ или $\mu=1/2$.

V. Согласование границ применимости финитных версий обеих теорем отсчетов

Займемся нахождением конкретных значений пределов суммирования P и Q в разложении дискретного полигармонического сигнала (21) и согласованием их с правыми частями формул (11) дуальной теоремы.

A. *Спектральная функция гармонического сигнала*

Применим формулу (18) для вычисления спектра отдельно взятой, m-й гармоники сигнала (21):

$$s_m(t_n) = a_m \cos(2\pi f_m t_n + \varphi_m); \quad n = 0,1,...,N-1. \tag{27}$$

Исходя из целочисленности произведения

$$2 f_0 T = GN + L = gN + l + L, \quad l = \gamma N, \quad L = 0,1, \tag{28}$$

где L вводится как минимальная (единичная или нулевая) поправка для компенсации (если потребуется) четности или нечетности целочисленного, как в (7), произведения GN (см. вывод формул (39)-(40)), подставим в (18) следующие выражения для фиксированной частоты сигнала и текущей (переменной) частоты спектра:

$$\begin{array}{l} f' = f_m = f_0 + m\Delta f, \quad f_k = f_0 + k\Delta f \\ f_0 = (GN+L)/(2T) = (gN+l+L)\Delta f/2 \cdot \\ k,l,m = 0,1,\ldots,N-1; \quad g = 0,1,2,\ldots \end{array} \tag{29}$$

В результате тригонометрических преобразований (детали которых опустим) правая часть (18) приобретает вид двучленного выражения

$$\begin{array}{l} S(f_k) = \dfrac{a_m}{2} e^{i\varphi_m} \dfrac{\sin\pi(m-k)}{N\sin\pi(m-k)/N} \times \\ \times e^{i2\pi(m-k)t_M/T} + \dfrac{a_m}{2} e^{-i(2\pi g F t_0 + \varphi_m)} \times \\ \times \dfrac{\sin\pi(k+l+m+L)}{N\sin\pi(k+l+m+L)/N} \times e^{-i2\pi(k+l+m+L)t_M/T} \end{array} , \tag{30}$$

в обоих термах которого фигурирует функция

$$\mathrm{sinc}_N\, n = \frac{\sin\pi n}{N\sin\pi n/N}; \quad n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots, \tag{31}$$

зависящая от дискретной переменной n. Функция эта, как установлено в [11], следующим образом связана с символом Кронекера – дискретной дельта-функцией $\delta_{m,k}$, равной единице при $m=k$ и нулю – при $m \neq k$:

$$\mathrm{sinc}_N(n + JN) = (-1)^{JN-J}\delta_{n,0}, \quad |\,n\,| < N, \quad J = 0,\pm 1,\ldots \tag{32}$$

Нетрудно показать, что числители и знаменатели обеих функций $\mathrm{sinc}_N\, n$ в правой части (30) равны нулю одновременно при указанных в (29) значениях k, l, m лишь в 3-х или 4-х случаях: $k=m$ и $k+l+m+L=JN$, где $J=L$, 1 или 2. Это позволяет, используя свойство (32), записать формулу (30) в символике дельта-функций:

$$S(f_k) = a_m \frac{e^{i\varphi_m}\delta_{m,k} + e^{-i(\varphi_m + 2\pi(g+J)F t_0)}\delta_{k+l+m,JN-L}}{2}. \tag{33}$$

Поскольку в полученном для спектральной функции выражении (33) имеются две дельта-функции, то для возможности использования $S(f_k)$ в качестве средства измерения амплитуды $a_m = A(f_m)$ и фазы $\varphi_m = \Phi(f_m)$ процесса гармонических колебаний (27) (см. также определения A и Φ по формулам(25)-(26)), первая из этих дельта-функций должна принимать единичное, вторая – нулевое значение. Иначе произойдет либо наложение двух комплектов амплитуд и фаз (при единичном значении обеих функций), либо результат измерения окажется нулем (при их нулевом значении), либо измерение будет произведено в полосе частот с индексом $G+1$ вместо G (когда вторая функция примет единичное значение, первая – нулевое). Исключение составляет единственный особый случай $G=g=\gamma=L=J=m=0$, когда частота сигнала (27) равна нулю: $f_m=f_0=(GN+L)\Delta f/2=0$, благодаря чему сигнал представляет собой константу – не зависящую от времени t_n функцию $s_0(t_n)=a_0\cos\varphi_0$.

В самом деле, в основном случае $k=m\neq JN-L-l-m$

имеем как раз абсолютно точный результат измерения амплитуды и фазы рассматриваемой m-й гармоники:

$$\begin{cases} A(f_m) = 2\,|\,S(f_m)\,| = 2\,|\,(a_m e^{i\varphi_m}/2)\,\delta_{m,m}\,| = a_m \\ \Phi(f_m) = \arg S(f_m) = \arg((a_m e^{i\varphi_m}/2)\,\delta_{m,m}) = \varphi_m \end{cases}. \quad (34)$$

В особом же случае формулы (33) аналитическое выражение для сигнала-константы получаем из КПФ (23):

$$\begin{cases} S(f_k) = a_0 \dfrac{e^{i\varphi_0}\,\delta_{0,k} + e^{-i(\varphi_0 + 2\pi(0+0)Ft_0)}\,\delta_{k+0+0,0\cdot N-0}}{2} = \\ = a_0(e^{i\varphi_0} + e^{-i\varphi_0})\,\delta_{k,0}/2 = a_0\delta_{k,0}\cos\varphi_0 \\ s_0(t_n) = \sum\limits_{k=0}^{N-1} S(f_k)\,e^{i2\pi f_k t_n} = \sum\limits_{k=0}^{N-1} a_0\delta_{k,0}\cos\varphi_0\,e^{i2\pi f_k t_n} = \\ = a_0\cos\varphi_0\,e^{i2\pi f_0 t_n} = a_0\cos\varphi_0\,e^{i2\pi\cdot 0\cdot t_n} = a_0\cos\varphi_0 \end{cases}. \quad (35)$$

Отметим, что отсутствие погрешности при определении амплитуды и фазы в (34) обусловлено тем, что измерение этих параметров проводится на частоте сигнала $f=f_m$. Если же $f\neq f_m$, то даже при $|f-f_m|\leq\Delta f$ результаты указанных измерений будут искажены эффектом просачивания [4]: $a(f)=2|S(f)|\neq a_m$, $\varphi(f)=\arg S(f)\neq\varphi_m$.

B. Комплексно-сопряженная симметрия спектра

Выразим, используя (34), гармонический сигнал (27) через значение спектральной функции $S(f_m)$ на собственной частоте f_m этого сигнала:

$$\begin{aligned} &s_m(t_n) = a_m\cos(2\pi f_m t_n + \varphi_m) = \\ &= A(f_m)(e^{i(2\pi f_m t_n + \Phi(f_m))} + e^{-i(2\pi f_m t_n + \Phi(f_m))})/2 = \\ &= |\,S(f_m)\,|\,e^{i\arg S(f_m) + i2\pi f_m t_n} + |\,S^*(f_m)\,|\,e^{i\arg S^*(f_m) - i2\pi f_m t_n} = \\ &= S(f_m)e^{i2\pi f_m t_n} + S^*(f_m)e^{-i2\pi f_m t_n}. \end{aligned} \quad (36)$$

Вспоминая итоги анализа смещенного ряда Фурье в n° IV, мы должны доказать существование компоненты $S^*(f_m)$. Нетрудно увидеть из (33), что находится она на существующей частоте f_k, где $k=JN-L-l-m$, и выражается с точностью до множителя через значение $S(f_k)$:

$$S^*(f_m) = S(f_k)\,e^{i2\pi(g+J)Ft_0} = a_m e^{-i\varphi_m}/2. \quad (37)$$

Более того, она удовлетворяет общепринятой концепции спектральной функции – комплексно-сопряженной симметрии $S^*(f) = S(-f)$. Покажем, что свойство это для обоих значений L основано на квазипериодичности (22), приняв в этой формуле $I=-g-J$:

$$\begin{aligned} &S^*(f_m) = S(f_k)e^{i2\pi(g+J)Ft_0} = S(f_k)e^{-i2\pi(-g-J)Ft_0} = \\ &= S(f_k - (g+J)F) = S(f_0 + k\Delta f - (g+J)F) = \\ &= S((GN+L)\Delta f/2 + k\Delta f - (g+J)F) = \\ &= S((gN + l + L + 2k - 2gN - 2JN)\Delta f/2) = \\ &= S((-gN + l + L + 2(JN - L - l - m) - 2JN)\Delta f/2) = \\ &= S((-gN - l - L - 2m)\Delta f/2) = \\ &= S((-GN - L)\Delta f/2 - m\Delta f) = S(-f_0 - m\Delta f) = S(-f_m). \end{aligned} \quad (38)$$

C. Анализ четного и нечетного случаев параметра N

Только что подтвержденное в (38) общеизвестное свойство симметрии $S^*(f_m)=S(-f_m)$ находит неожиданное эффектное применение для объяснения принципиальной разницы случаев четного и нечетного N в определении границ применимости финитных версий обеих теорем отсчетов.

Начнем с того простого факта, что последовательность N неотрицательных отсчетов частоты $f_m\geq 0$; $m=0,1,\ldots,N-1$ зеркально отражается на частотной оси $-\infty<f<+\infty$ в последовательность N неположительных отсчетов $-f_m\leq 0$. Поскольку число независимых (оригинальных) значений спектральной функции $S(f_m)$, определяемой как прямое КПФ (23), есть N, а не $2N$ или $2N-1$ (когда $f_0=0$), то мы должны ограничиться рассмотрением примерно равного числа $M\approx N/2$ отсчетов $\pm f_m$ справа и слева от $f=0$. В принципе, для формирования спектров амплитуд и фаз цифровой реализации сигнала $s(t_n)$ (и среднего значения $S(0)$, если $f_0=0$) достаточно использовать только первые M неотрицательных отсчетов частоты $f_0.f_1,\ldots,f_{M-1}$ спектральной функции $S(f_m)$, воспринимая при этом каждый «фантомный» неположительный отсчет $-f_m$ как образ неотрицательного отсчета f_{M+m} в КПФ (23), так что $S(f_m)$ будет определена в неотрицательной частотной области на N последовательно расположенных отсчетах $f_0.f_1,\ldots,f_{N-1}$.

Предположим сначала, что $f_0\neq 0$, а $N=2M$ – четно. Тогда в двух частотных областях – слева и справа от нуля – расположатся одинаковое количество M отсчетов $\pm f_0$, $\pm f_1$, …, $\pm f_{M-1}$. Каждая из этих областей имеет свой индекс G – левосторонний G_- и правосторонний G_+, а также свою ширину полосы – частоту Найквиста ΔF: правостороннюю $\Delta F_+=M\Delta f$ и левостороннюю $\Delta F_-=(N-M)\,\Delta f$ (одинаковые в данном случае четного N: $\Delta F_\pm=\Delta F=F/2$).

Исходя из определения индекса $G=F_{low}/\Delta F$ как отношения нижней границы полосы частот $F_{low}<f<F_{up}$ к ширине полосы $\Delta F=F_{up}-F_{low}$ аналоговых спектров амплитуд $A(f)$ и фаз $\Phi(f)$, модифицируем это определение для дискретных спектров $A(f_m)$ и $\Phi(f_m)$ внесением в формулу для G поправки L, взятой из условия (28): $G=F_{low}/\Delta F-L/N$. Для положительной частотной области имеем $F_{low}=f_0$, $\Delta F=\Delta F_+=F/2$, что дает $G_+=2f_0/F-L_+/N$. Мы пометили поправку L, так же как индекс G, подстрочным знаком '+', поскольку пока не знаем как выглядит этот параметр в формуле для отрицательной частотной области: $G_-=F_{low}/\Delta F-L_-/N$. Раскрываем эту формулу, приняв в ней $F_{low}=-f_{M-1}$:

$$\begin{aligned} &G_- = -f_{M-1}/\Delta F_- - L_-/N = -2f_{M-1}/F - L_-/N = \\ &= -2(f_0 + (M-1)\Delta f)/F - L_-/N = \\ &= -2(f_0 + (N/2-1)\Delta f)/F - L_-/N = \\ &= -2f_0/F + L_+/N - L_+/N - 2(N/2-1)/N - L_-/N = \\ &= -G_+ - 1 + (2 - L_+ - L_-)/N. \end{aligned} \quad (39)$$

Ясно теперь, что именно при одинаковой, единичной для обеих частотных областей поправке $L_\pm=1$, из (39) следует фундаментальное для обеих версий теоремы отсчетов во временной области соотношение $G_-=-G_+-1$, или же, $G_+=-G_--1$. В самом деле, правые части обеих формул преобразования отсчетов (1) и (6) инвариантны относительно замены G на $-G-1$, что позволяет не отличать левосторонний индекс полосы $G_-=G$ от правостороннего $G_+=G$, и, как это обосновано в работах [8]-[9], считать положительные и отрицательные частоты равноправными, распространив тем самым формулировку теоремы на все вещественные значения G и f, а не только на неотрицательные.

Перейдем к анализу нечетного случая N с целью установления условий для получения указанного свойства индекса G. Заметим, что любое нечетное число $N\geq 1$ можно разбить на примерно одинаковые половины, положив $M=(N+1)/2$, $N-M=(N-1)/2$. Примем за количество неотрицательных частот именно M – бóльшее из чисел $(N\pm 1)/2$. Тогда $\Delta F_+=(N+1)\Delta f/2$, $\Delta F_-=(N-1)\Delta f/2$, и мы имеем следующие формулы для $G_\pm$:

$$G_+=\frac{f_0}{\Delta F_+}-\frac{L_+}{N}=\frac{2f_0}{(N+1)\Delta f}-\frac{L_+}{N},$$

$$G_-=\frac{-f_{(N-1)/2}}{\Delta F_-}-\frac{L_-}{N}=-\frac{f_0+((N-1)/2)\Delta f}{((N-1)/2)\Delta f}-\frac{L_-}{N}= \qquad (40)$$

$$=\left(-\frac{2f_0}{(N+1)\Delta f}+\frac{L_+}{N}-\frac{L_+}{N}\right)\frac{N+1}{N-1}-1-\frac{L_-}{N}=$$

$$=-G_+\frac{N+1}{N-1}-1-\frac{L_+(N+1)+L_-(N-1)}{N(N-1)}.$$

Требуемое соотношение $G_-=-G_+-1$ мы получим из (40) либо, устремив N к бесконечности, и тогда $G_\pm$ и f_0 – произвольные действительные числа, что уже установлено в инфинитных версиях обеих теорем отсчетов, либо положив $G_+=0$, $G_-=-1$, $L_\pm=0$, что соответствует классической формулировке обеих версий теоремы отсчетов во временной области.

Начальный безразмерный отсчет f_0T дискретной спектральной функции $S(f_k)$ сигнала (21) удобно разложить на целую и дробную части, введя обозначение $\mu=\{f_0T\}$, так что $f_k=[f_0T]+\mu+k$; $k=0,1,\ldots,N-1$. Случаи четного и нечетного N можно представить для поправки единой формулой $L=1-N \bmod 2=1-N+2[N/2]$, что для параметра $\mu=\{(GN+L)/2\}=\{(GN+1-N+2[N/2])/2\}$ дает выражение, равное $\mu=\{(GN+1)/2\}$ при четных N и $\mu=\{(GN-N+1)/2\}$ – при нечетных. В последней формуле можно, при любой четности N, заменить $-N$ на $+N$, а в случае четного N заменить этот терм на 0, также как и в случае нечетного N можно, ввиду $G=0$, заменить на 0 терм GN. Всё это позволяет объединить оба случая по N в единую формулу для μ, представленную первым из условий (9). Второе и третье условия (9) говорят, соответственно, о целочисленности произведения GN и о запрете ненулевого индекса G (кроме $G=-0-1=-1$) для нечетного N. Таким образом, ограничения (7) и (9) одинаковы для финитных версий обеих теорем.

D. *Определение номеров первой и последней гармонических составляющих сигнала*

Перейдем, наконец, к определению границ суммирования P и Q в разложении сигнала (21). Основным требованием, как отмечалось выше, является единичное значение только у одной из дельта-функций в формуле (33). Исходя из разбиения области определения спектральной функции $S(f_k)$ на два примерно равных интервала длиной M и $N-M$, где из проведенного выше анализа следует $M=(N+1-L)/2$, замечаем, что если одна из этих дельта-функций равна единице в первом интервале, то она равна нулю во втором интервале и наоборот, поскольку два последовательных интервала $0\leq k\leq M-1$ и $M\leq k\leq N-1$ не пересекаются. Особый случай пересечения интервалов в точке $f_0=0$ можно учесть путем коррекции правой границы последнего неравенства: $M\leq k\leq N-L$. Полагая теперь в первом неравенстве $k=m$, во втором – $k=JN-L-l-m$, получаем для определения диапазона возможных значений m систему из двух двойных неравенств:

$$\begin{cases}0\leq m\leq M-1\\ M\leq JN-L-l-m\leq N-L\end{cases}. \qquad (41)$$

Подставив в (41) установленные выше выражения для M и L, заменив знак второго неравенства на противоположный, перенеся часть слагаемых на противоположные стороны, получаем систему неравенств, в которых объектом сравнения является m в чистом виде:

$$\begin{cases}0\leq m\leq N-[N/2]-1\\ JN-N-l\leq m\leq JN-[N/2]-1-l\end{cases}. \qquad 42)$$

Система эта при $J=0$ несовместна, поскольку в верхнем неравенстве значения m неотрицательны, в нижнем – отрицательны. Теперь мы имеем дело с совокупностью двух систем, различающихся по оставшимся случаям $J=1$ и $J=2$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}J=1,\ \ 0\leq m\leq N-[N/2]-1\\ -l\leq m\leq N-[N/2]-1-l\end{cases}\\ \begin{cases}J=2,\ \ 0\leq m\leq N-[N/2]-1\\ N-l\leq m\leq N+N-[N/2]-1-l\end{cases}\end{array}\right.. \qquad (43)$$

Каждую из обеих систем, ввиду $0\leq l\leq N$, легко сводим к одному двойному неравенству:

$$\left[\begin{array}{l}J=1,\ \ 0\leq m\leq N-[N/2]-1-l\\ J=2,\ \ N-l\leq m\leq N-[N/2]-1\end{array}\right.. \qquad (44)$$

Рассмотрение случаев по N начнем с более простого, нечетного случая: $[N/2]=(N-1)/2$, когда $l=0$ – единственно возможное значение этого параметра. Очевидно, что при этом второе неравенство (44) несовместно, и решение всей совокупности получается при $J=1$:

$$0\leq m\leq (N-1)/2. \qquad (45)$$

В случае четного N имеем $[N/2]=N/2$, и, если исключить объект сравнения m из обоих неравенств (44), выяснится, что случаи $J=1$ и $J=2$ соответствуют двум непересекающимся подмножествам множества чисел l, так что (44) выглядит следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l}0\leq l<N/2,\ \ 0\leq m\leq N/2-l-1\\ N/2<l<N,\ \ N-l\leq m\leq N/2-1\end{array}\right.. \qquad (46)$$

Крайние значения m в неравенствах (46) представляют собой не что иное, как искомые начальный $P-[f_0T]$ и конечный $Q-[f_0T]$ номера гармоник сигнала (21), так что $P \le m + [f_0T] \le Q$. Вспоминая теперь, что $l=\gamma N$ и $[f_0T]=[(GN+L)/2]$, где L равно единице для четных N и нулю для нечетных, получаем из (45)-(46) совокупность равенств для описания всех случаев P и Q:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}N \bmod 2=0\\ \left[\begin{array}{l}\gamma<1/2,\ \ P=[(GN+1)/2],\ \ Q=[(GN+N-1)/2]-\gamma N\\ \gamma>1/2,\ \ P=[(GN+1)/2]+N-\gamma N,\ \ Q=[(GN+N-1)/2]\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}N \bmod 2=1\\ \gamma=0,\ \ P=0,\ \ Q=(N-1)/2\end{array}\right.\end{array}\right. . \quad (47)$$

Рассмотрев те же случаи по N и γ в формулах (11), получаем точно такие же значения P и Q, что в (47). Поскольку параметр μ из (9), как мы установили, также одинаков для финитных версий обеих теорем, то одинаковыми будут и границы частотных диапазонов F_{low} и F_{up}, указанные в системе равенств (13).

E. Эффекты наложения и исчезновения сигнала

Наложение в частотной области и исчезновение сигнала – основные явления нарушения теоремы отсчетов во временной области. Первое явление заключается в том, что результатом преобразования отсчетов монохроматического гармонического сигнала по формулам (1) и (6) является бигармонический сигнал, второе означает, что результатом преобразования является тождественный ноль. Оба явления не имеют места при целом индексе $G=g$ для обеих теорем сразу, поскольку число гармоник для их финитных версий максимально (см. формулу (12)); для инфинитных же версий это доказано в работах [9]-[10]. Поставим цель определить, имеют ли эти явления место в теореме отсчетов для частотной области при $\gamma\neq 0$, и если да, то сравнить условия их реализации с таковыми для дуальной теоремы.

Наложение гармоник возникает в первой половине частотной области при равенстве там единице обеих дельта-функций в формуле (33). Но тогда во второй половине будет исчезновение сигнала, поскольку обе дельта-функции там будут нулями. Исходя из системы неравенств (41), мы должны для описания наложения частот поставить во втором неравенстве такие же границы, как в первом, а для описания исчезновения сигнала поступить наоборот. В результате получаем из (41) две системы неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}0\le m\le M-1\\ 0\le k\le M-L\end{array}\right., \quad \left\{\begin{array}{l}M\le m\le N-1\\ M\le k\le N-L\end{array}\right., \quad (48)$$

где $k=JN-L-l-m$, а $M=N/2$ и $L=1$ в силу четности N. Решая их тем же способом, что (41), получаем соответствующие этим явлениям две совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\gamma\le 1/2,\ \ (G+1+1/N)/2-\gamma\le f_m/F\le(G+1-1/N)/2\\ \gamma\ge 1/2,\ \ (G+1/N)/2\le f_m/F\le(G-1/N)/2+1-\gamma\end{array}\right., \quad (49)$$

$$\left[\begin{array}{l}\gamma\le 1/2,\ \ (G+1/N)/2+1-\gamma\le f_m/F\le(G-1/N)/2+1\\ \gamma\ge 1/2,\ \ (G+1+1/N)/2\le f_m/F\le(G+1-1/N)/2+1-\gamma\end{array}\right. . \quad (50)$$

Формулы, описывающие в работах [8]-[9] оба явления в дуальной теореме отсчетов для всех вещественных, разрешенных условиями (9) значений G и f_m, можно представить в виде неравенства

$$\|f_m/F-I-j/2|-|g+1|/2|\le(1/2-|\gamma-1/2|-1/N)/2, \quad (51)$$

где $j=0$ соответствует наложению на I-ю ветвь сигнала его $I+|g+1|$-й ветви, $j=1$ – исчезновению I-й ветви.

Полагаем здесь $f\ge 0$, $g\ge 0$ при $I=0$ (частота сигнала $f=f_m$ находится в G-полосе). Раскрытие модульных скобок (с учетом значений j и расположения γ слева или справа от критического значения 1/2) приводит неравенство (51) в точности к совокупностям (49)-(50).

VI. Переход к инфинитной версии теоремы отсчетов в частотной области

При одновременном стремлении N и F к бесконечности, а G к нулю (с сохранением T конечным), соотношение $2f_0T=GN+L$, определяющее необходимое условие справедливости проанализированной в n° V финитной версии теоремы отсчетов для частотной области [11], приобретает вид $f_0=(0\times\infty+L)/(2T)=0\times\infty$ с неопределенным (произвольным) значением f_0, и мы приходим к инфинитной версии [10] этой теоремы.

VII. Заключение

1) Сравнительный анализ обеих теорем отсчетов показал, что границы применимости их финитных версий, основанных на преобразованиях N отсчетов сигнала (6) и спектра (20), полностью совпадают и определяются формулами (7)-(9), (11)-(13). По сути, речь идет о единой теореме отсчетов, в которой ставится задача восстановления аналоговой трансформанты Фурье по ее дискретной цифровой реализации – сигнала или спектра из пары КПФ (23). Вторая трансформанта рассматривается как условие, выдвигаемое при формулировке теоремы. Инфинитная версия получается в результате предельного перехода к бесконечности размера соответствующей финитной области – длительности сигнала T в формулировке теоремы для временной области, и ширины спектральной функции F – для частотной. Соответственно, при этом устремляется к нулю индекс окна H, и индекс полосы G, а дуальная финитная область из дискретной превращается в аналоговую (КПФ заменяется на ДВПФ или ИДПРФ и восстанавливается до ИПФ).

2) Показано, что существуют только два типа бесконечных рядов Фурье – с нулевым и половинным смещением, допускающие разложение сигнала на вещественные гармоники по формулам (26). По сути, таковы и частоты f_m гармоник сигнала в обеих финитных версиях теоремы – со смещениями $\mu=0$ и $\mu=1/2$, определяемыми формулой (9). Этот факт интересен не только с точки зрения математики, но, возможно, наделен глубоким физическим смыслом, скажем, в теории элементарных частиц. Если, как принято в квантовой механике, трактовать частоту как энергию, то вполне естественным кажется существование только двух типов элементарных частиц – с целым и полуцелым спином, состояния которых подчиняются принципу суперпозиции.

3) Результаты работы расширяют представление о фурье-анализе как о крупном разделе цифровой обработки сигналов – одной из теоретических и практических основ современных информационных технологий.

Литература

[1] Whittaker, E. T., “On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory,” in Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 35, 1915, pp. 181-194.

[2] Котельников В.А. О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. – М.: “Всесоюзн. энергетич. комитет”, 1933.

[3] Shannon, C. E., “Communication in the presence of noise,” in Proc. IRE, vol. 37, 1949, pp. 10-21.

[4] Robert J. Marks II. Handbook of Fourier Analysis & Its Applications, Oxford University Press, 2009, 800 p.

[5] Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. – М.: “Советское радио”, 1972, 352 с.

[6] Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. М.: “Советское радио”, 1977, 608 с.

[7] Ханян Г.С. Теорема отсчетов для сигнала конечной длительности с необязательно нулевым индексом частотной полосы // Известия ЮФУ. Технические науки. – 2013. – № 2 (139). – С. 20-25.

[8] Khanyan G.S. Features of Limited Duration Harmonic Signal Transform by Sampling Theorem // Problems of Advanced Micro- and Nanoelectronic Systems Development, 2017, Part I, Moscow, IPPM RAS, pp. 54-60.

[9] Ханян Г.С. Теорема отсчетов во временной области для инфинитного сигнала: аналитическое выражение и геометрическая иллюстрация // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2020. Сборник трудов / под общ. ред. акад. РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2020. Вып. IV. С. 151-158. URL: https://doi.org/10.31114/2078-7707-2020-4-151-158.

[10] Ханян Г.С. Теорема отсчетов в частотной области для инфинитного спектра // «Цифровая обработка сигналов и ее применение». 20-я международная конференция. 28-30 марта 2018 г., Москва, ИПУ РАН. Доклады. В 2-х кн. – Тр. РНТОРЭС им. А.С. Попова. – М., 2018. – Вып. XX-1. – С. 244-250.

[11] Ханян Г.С. Теорема отсчетов в частотной области для финитного спектра // «Цифровая обработка сигналов и ее применение». 21-я международная конференция. 27-29 марта 2019 г., Москва, ИПУ РАН. Доклады. В 2-х кн. – Тр. РНТОРЭС им. А.С. Попова. – М., 2019. – Вып. XXI-1. – С. 178-186.

[12] Ханян Г.С. О требованиях к спектру для обеспечения вещественности сигнала в паре преобразований Фурье / DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. Т. 7. № 1. С. 199-205.

Comparative Analysis of the Time and Frequency Domain Sampling Theorems

G.S. Khanyan

Central Institute of Aviation Motors, Moscow, khanyan@rtc.ciam.ru

***Abstract* — A relational research of the limits of applicability of the two sampling theorems in their formulations for signals and spectra, which is absent in the literature on this topic, is carried out. It is shown that the frequency ranges of validity of the finite versions of both theorems coincide, and the infinite versions are obtained as a result of the limit transition to the infinity of the corresponding finite domain size.**

***Keywords* — analog and discrete Fourier transforms, finite and infinite signals and spectra, frequency band and time window indices.**

References

[1] Whittaker E.T., “On the functions which are represented by the expansion of interpolating theory,” in Proc. Roy. Soc. Edinburgh, vol. 35, 1915, pp. 181-194.

[2] Kotelnikov V.A., “On the transmission capacity of ‘ether’ and wire in electro-communications,” First all-union conf. on questions of commun., January 14, 1933 (in Russian).

[3] Shannon, C. E., “Communication in the presence of noise,” in Proc. IRE, vol. 37, 1949, pp. 10-21.

[4] Robert J. Marks II. Handbook of Fourier Analysis & Its Applications, Oxford University Press, 2009, 800 p.

[5] Trachtman A.M., Introduction to the generalized spectral theory of signals. Moscow, "Sovetskoye Radio" publishing house, 1972, 352 p. (in Russian).

[6] Gonorovsky I.S., Radio engineering circuits and signals. Textbook for high schools. Moscow, "Sovetskoye Radio" publishing house, 1977, 608 p. (in Russian).

[7] Khanyan G.S., “Sampling theorem for finite duration signal with a non-obligatory zero index of the frequency band,” in Izvestiya Yuzhn. Feder. Universiteta. Tekhnicheskie nauki, 2013, no. 2 (139), pp. 20 25 (in Russian).

[8] Khanyan G.S. “Features of Limited Duration Harmonic Signal Transform by Sampling Theorem,” in Problems of Advanced Micro- and Nanoelectronic Systems Development, 2017, Part I, Moscow, IPPM RAS, pp. 54-60 (translated from Russian).

[9] Khanyan G.S., “Sampling Theorem in Time Domain for Infinite Duration Signal: Analytical Expression and Geometric Illustration,” in Problemy razrabotki perspektivnykh mikro- i nanoelektronnykh sistem – 2020. Sbornik trudov / pod obshch. red. akademika RAN A.L. Stempkovskogo. M.: IPPM RAN, 2020, vol. IV, pp. 151-158 (in Russian). URL: https://doi.org/10.31114/2078-7707-2020-4-151-158.

[10] Khanyan G.S., “Sampling Theorem in Frequency Domain for the Infinite Spectrum,” in Proc. 20th Conf. on Digital Signal Processing and its Applications, Moscow, Russia, 28-30 March 2018, vol. 1, pp. 244-250 (in Russian).

[11] Khanyan G.S., “Sampling Theorem in Frequency Domain for the Finite Spectrum,” in Proc. 21th Conf. on Digital Signal Processing and its Applications, Moscow, Russia, 27-29 March 2019, vol. 1, pp. 178-186 (in Russian).

[12] Khanyan G.S. On Requirements for Spectrum to Provide Real Signal in a Pair of Fourier Transform. DSPA: Voprosy primeneniya tsifrovoj obrabotki signalov, 2017, vol. 7, no. 1, pp. 199-205 (in Russian).