

Метод слияния моделей для анализа режимов синхронизации связанных осцилляторов

М.М. Гурарий, С.Г. Русаков

Институт проблем проектирования в микроэлектронике РАН, г. Москва, irpm@irpm.ru

Аннотация — Новый подход применяется к анализу синхронизированных осцилляторов, представленных моделью Курамото. Подход основан на методе слияния моделей осцилляторов. Новый метод обеспечивает вычислительную эффективность за счет разработанного преобразования пары синхронизированных генераторов в один генератор Курамото. Получены аналитические выражения, определяющие характеристики объединенных моделей осцилляторов, преобразование функций связи и последовательность операций объединения. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова — связанные генераторы, модель Курамото, фазовые макромодели, синхронизация, функции связи схемотехническое моделирование,

I. ВВЕДЕНИЕ

Применение синхронизированных осцилляторных ансамблей для разработки осцилляторных нейронных сетей [1-3] и осцилляторных вычислительных систем [4-7] является перспективным направлением проектирования систем обработки информации.

Переменные состояния в моделях колебательных ансамблей представлены фазами осцилляторов относительно фазы некоторого опорного колебания. Эффективное описание колебательных ансамблей обеспечивается широко используемой моделью Курамото (КМ) [8]. Модель Курамото задается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Кривые переходных процессов фаз ансамбля могут быть получены путем решения этой системы ОДУ. Но поведение синхронизированного ансамбля определяется установившимися фазами КМ, и в этом случае анализ переходных процессов не требуется.

Фазы установившихся состояний могут быть определены путем решения алгебраической системы КМ. Однако особенности КМ приводят к численным трудностям, возникающим из-за немонотонных зависимостей правых частей алгебраических уравнений от фаз генераторов. Это приводит к множественным решениям алгебраических систем КМ, которые обычно получают гомотопическими методами [9]. Были разработаны специальные гомотопические подходы, основанные на решении стационарных задач [10-13].

Цель статьи - избежать сложных подходов, основанных на гомотопии, при анализе

установившихся режимов с помощью модели Курамото и разработать более экономичный алгоритм для решения этой проблемы.

Модификация модели Курамото, обеспечивающая применение к задачам схемотехнического моделирования, приведена в работе [14].

Ниже предлагается подход, основанный на последовательной замене модели пары синхронизированных осцилляторов в ансамбле моделью одного осциллятора. Далее эта операция называется слиянием осцилляторов. В статье представлены алгоритмы оценки параметров объединенного генератора, алгоритмы для последовательного объединения, а также алгоритмы получения фаз исходных генераторов.

В разделе II представлены основные модельные соотношения для описания связанных генераторов Курамото. Предлагаемый подход, основанный на рассмотрении пары синхронизированных генераторов в ансамбле как отдельного одиночного генератора, приведен в разделе III. Алгоритм объединения моделей осцилляторов обсуждается в краткой форме в разделе IV. Некоторые результаты применения рассмотренной процедуры приведены в разделе V.

II. ОСНОВНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ МОДЕЛИ КУРАМОТО

A. Общая форма КМ General Form of KM

Модель Курамото (КМ) описывает систему из N связанных осцилляторов, определяемых их собственными частотами ω_m и изменяющимися во времени мгновенными фазами $\theta_m(t)$. КМ представлена в наиболее общем виде в виде системы ОДУ [8]:

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m + \sum_{n=1}^N u_{mn}(\theta_n - \theta_m), m = 1 \dots N. \quad (1)$$

Здесь $u_{mn}(\theta_{mn})$ - 2π -периодические функции связи, $\theta_{mn} = \theta_n - \theta_m$. Наиболее распространенная форма КМ использует синусоидальные функции связи с коэффициентами связи A_{mn} и фазовыми сдвигами α_{mn} .

$$u_{mn}(\theta_{mn}) = A_{mn} \sin(\theta_{mn} + \alpha_{mn}). \quad (2)$$

Функции связи общей формы модели Курамто (1) могут быть аппроксимированы с требуемой точностью усеченными рядами Фурье с заданным числом членов:

$$u_{mn}(\theta_{mn}) = \sum_{k=1}^{K_m} A_{mn}^{(k)} \sin(k\theta_{mn} + \alpha_{mn}^{(k)}). \quad (3)$$

Постоянный член в (3) опущен, поскольку его ненулевое значение эквивалентно изменению фундаментала ω_m в (1). Аналогично, диагональные связи $u_{mm}(0)$ также опущены.

Осцилляторы синхронизированы [8] при достаточно сильных связях. Все осцилляторы в полностью синхронизированном ансамбле имеют общую частоту $\omega = d\theta_m/dt$ для всех m и мгновенные фазы

$\theta_m(t) = \omega t + \varphi_m$ с относительными фазами φ_m . После подстановки $\theta_m(t)$ в (1) имеем

$$\omega = \omega_m + \sum_{n=1}^N u_{mn}(\varphi_n - \varphi_m), \quad m = 1 \dots N. \quad (4)$$

Набор синхронизированных осцилляторов генерирует свободные колебания с произвольным сдвигом фазы, поэтому фаза одного генератора может быть задана произвольно, например, $\varphi_N = 0$. Тогда (4) представляет собой N алгебраических уравнений с N переменными: $\omega, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}$.

V. Решение модельных уравнений для пары осцилляторов

В простейшем случае двух генераторов (p, q) с однонаправленной связью частота синхронизации совпадает с основной частотой возбуждающего (q -го) осциллятора ($\omega = \omega_q$). Относительная фаза ($\varphi_{pq} = \varphi_q - \varphi_p$) возбужденного (p -го) генератора удовлетворяет уравнению, полученному из (4)

$$\omega_{pq} - u_{pq}(\varphi_{pq}) = 0, \quad (5)$$

Здесь $\omega_{pq} = \omega_q - \omega_p$. Решение уравнения (5) существует, если отклонение частоты находится в пределах диапазона значений функции u_{pq} (диапазона захвата)

$$\min_{0 \leq \varphi < 2\pi} u_{pq}(\varphi) \leq \omega_{pq} \leq \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} u_{pq}(\varphi). \quad (6)$$

Неравенства (6) определяют условие синхронизации для заданной функции связи $u_{pq}(\varphi)$. Минимальное отклонение частотного отличия ω_{pq} от ближайшей границы диапазона захвата определяет глубину синхронизации [15]:

$$d_{pq} = \min \left(\omega_{pq} - \min_{\varphi} u_{pq}(\varphi), \max_{\varphi} u_{pq}(\varphi) - \omega_{pq} \right). \quad (7)$$

Условие (6) может быть представлено в виде $d_{pq} \geq 0$.

Соотношения (5), (6), (7) проиллюстрированы на рис. 1. Как можно видеть из рис. 1, существует по меньшей мере два решения уравнения (5) для отклонения частоты в пределах диапазона синхронизации. Полная система ОДУ (1), примененная к паре однонаправленно связанных осцилляторов, позволяет получить условие устойчивости для решения φ_{pq} из (6) в следующем виде [16-18]:

$$u'_{pq}(\varphi_{pq}) < 0, \text{ where } u'_{pq}(\varphi_{pq}) = \left. \frac{\partial u_{pq}(\varphi)}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_{pq}} \quad (8)$$

Уравнение (5) может быть численно решено, применяя технику развертки φ_{pq} на достаточно плотном наборе точек в интервале $[0, 2\pi]$, с определением приближенного решения, удовлетворяющего условию устойчивости (8).

Для взаимно связанных двух генераторов (p, q) система (4) имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_p + u_{pq}(\varphi_{pq}), \\ \omega &= \omega_q + u_{qp}(\varphi_{qp}). \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим разность фаз осцилляторов в изолированной паре как $\bar{\varphi} = \varphi_{pq} = -\varphi_{qp}$. После вычитания второго уравнения в (9) из первого получаем

$$\omega_{pq} - v_{pq}(\bar{\varphi}) = 0, \quad (10)$$

где $v_{pq}(\bar{\varphi}) = u_{pq}(\bar{\varphi}) - u_{qp}(-\bar{\varphi})$.

Уравнение (10) имеет вид уравнения (5). Следовательно, условия синхронизации (6) и условие стабильности (8) также пригодны для (9) после замены u_{pq} на v_{pq} . Решение уравнений (9) также может быть определено по аналогии с рис. 1. После нахождения фазы φ_{pq} частота синхронизации ω может быть получена с помощью любого из уравнений (8).

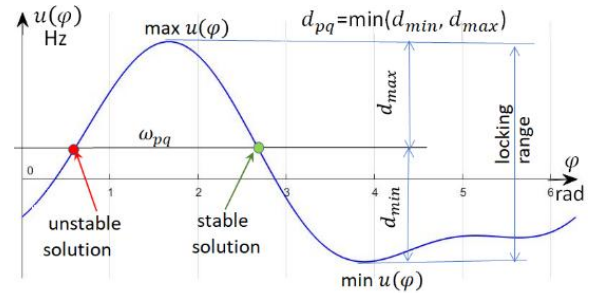


Рис. 1. Решения фазового уравнения для генератора с внешним возбуждением

III. ОБЪЕДИНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ СИНХРОНИЗИРОВАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ С ВНЕШНИМИ СВЯЗЯМИ

Далее рассматривается задача замены пары синхронизированных Курамто осцилляторов с внешними связями на один осциллятор с эквивалентными связями. Процесс формирования

параметров полученного осциллятора можно назвать парным слиянием.

Мы предполагаем, что такая пара может быть приблизительно представлена в виде генератора с фундаментальной частотой, равной частоте синхронизированной пары (8) после решения системы (1)

$$\omega_M = \omega_p + v_{pq}(\bar{\varphi}) \quad (11)$$

Здесь M - индекс объединенного осциллятора. Мы определяем его фазу как фазу p -го осциллятора ($\varphi_M = \varphi_p$). Фаза q -го осциллятора сдвинута на $(\bar{\varphi})$:

$$\varphi_p = \varphi_M, \quad \varphi_q = \varphi_M - \bar{\varphi}. \quad (12)$$

Рассмотрим случай, когда каждый осциллятор пары дополнительно подключен к любому r -му осциллятору

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_p + u_{pq}(\varphi_{pq}) + u_{pr}(\varphi_{pr}), \\ \omega &= \omega_q + u_{qr}(-\varphi_{pq}) + u_{qr}(\varphi_{qr}). \end{aligned} \quad (13)$$

После вычитания второго уравнения из первого в (13) с учётом выражения для фаз $\varphi_{qr} = \varphi_{pr} - \varphi_{pq}$ получены следующие выражения

$$v_{pq} + v_{pq}(\varphi_{pq}) = u_{qr}(\varphi_{pr} - \varphi_{pq}) - u_{pr}(\varphi_{pr}), \quad (14)$$

$$\omega = \omega_p + u_{pq}(\varphi_{pq}) + u_{pr}(\varphi_{pr}) = 0, \quad (15)$$

Предполагая, что связи u_{pr}, u_{qr} малы, решение φ_{pq} из (14), (15) представляется как малое отклонение $\delta\varphi$ от решения $\bar{\varphi}$ несвязанной пары (9) $\varphi_{pq} = \bar{\varphi} + \delta\varphi$. Поэтому можно линеаризовать функции $v_{pq}(\varphi_{pq}), u_{pq}(\varphi_{pq}), u_{qr}(\varphi_{pr} - \varphi_{pq})$, используя разложение Тейлора первого порядка:

$$v_{pq}(\varphi_{pq}) = v_{pq}(\bar{\varphi} + \delta\varphi) = v_{pq}(\bar{\varphi}) + v'_{pq}(\bar{\varphi})\delta\varphi. \quad (16)$$

$$u_{qr}(\varphi_{pr} - \varphi_{pq}) = u_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi}) - u'_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi})\delta\varphi \approx u_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi}). \quad (17)$$

$$u_{pq}(\varphi_{pq}) = u_{pq}(\bar{\varphi} + \delta\varphi) = u_{pq}(\bar{\varphi}) + u'_{pq}(\bar{\varphi})\delta\varphi \quad (18)$$

After substituting (16), (17) into (14), and considering (10) the equation $v'_{pq}(\bar{\varphi})\delta\varphi = u_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi}) - u_{pr}(\varphi_{pr})$ can be obtained which can be solved with respect to $\delta\varphi$ as:

Здесь производные определяются аналогично (8). Можно пренебречь членом $u'_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi})\delta\varphi$ в (17), поскольку он имеет второй порядок малости.

После подстановки (16), (17) в (14) и рассмотрения (10) может быть получено уравнение

$v'_{pq}(\bar{\varphi})\delta\varphi = u_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi}) - u_{pr}(\varphi_{pr})$, которое может быть решено относительно $\delta\varphi$ как:

$$\delta\varphi = \frac{u_{qr}(\varphi_{pr} - \bar{\varphi}) - u_{pr}(\varphi_{pr})}{v'_{pq}(\bar{\varphi})}. \quad (19)$$

Замена (18) на (15) с учетом (11) приводит к выражению:

$$\omega = \omega_M + u'_{pq}(\bar{\varphi})\delta\varphi + u_{pr}(\varphi_{pr}). \quad (20)$$

Далее мы подставляем $\delta\varphi$ (19) в (20) и заменяем φ_{pr} на φ_{Mr} из (12). Это приводит к следующему:

$$\omega = \omega_M + a \cdot u_{qr}(\varphi_{Mr} - \bar{\varphi}) + b \cdot u_{pr}(\varphi_{Mr}), \quad (21)$$

где

$$a = u'_{pq}(\bar{\varphi})/v'_{pq}(\bar{\varphi}), b = 1 - a. \quad (22)$$

Уравнение (21) представляет в модели Курамото объединенную пару осцилляторов p, q . Стандартная форма M -го уравнения (4) для осциллятора, связанного с единственным r -м осциллятором, имеет следующий вид:

$$\omega = \omega_M + u_{Mr}(\varphi_{Mr}), \quad (23)$$

Сравнение (21) с (23) показывает, что функция связи от r -го генератора к объединенной паре определяется через начальные функции связи следующим образом

$$u_{Mr}(\varphi_{Mr}) = \alpha \cdot u_{qr}(\varphi_{Mr} - \bar{\varphi}) + \beta \cdot u_{pr}(\varphi_{Mr}) \quad (24)$$

Функция связи от объединенной пары к r -му генератору (u_{rM}) определяется связями от p -го и q -го соединений (u_{rp}, u_{rq}). Учитывая (12), получаем:

$$u_{rM}(\varphi_{rM}) = u_{rq}(\varphi_{rM} + \bar{\varphi}) + u_{rp}(\varphi_{rM}) \quad (25)$$

Выражения (24), (25) полностью определяют связи после слияния. Если исходные функции связи определяются рядами Фурье (4), то результирующие функции также могут быть представлены в аналогичной форме. Требуется выполнить (24), (25) для каждого генератора вне пары, чтобы оценить все связи.

IV. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ОПЕРАЦИЙ СЛИЯНИЯ МОДЕЛЕЙ

Алгоритм решения уравнений модели Курамото для синхронизированных осцилляторов базируется на последовательном объединении моделей осцилляторов. Последовательность операций слияния и выбор осцилляторов для слияния на каждом шаге являются основными задачами при разработке обсуждаемого алгоритма.

Процесс слияния неточен только из-за ограничения ряда Тейлора членами первого порядка в (17), (18).

Предлагается выбирать объединяемые осцилляторы по минимальному значению расчетной ошибки линеаризации, которая увеличивается с ростом $|\delta\varphi|$ (19). Оценка $|\delta\varphi|$ может быть найдена оцениванием величин числителя и знаменателя в (19).

Числитель в (19) может быть измерен мощностью связей. Мы определяем мощность одной mn -связи (P_{mn}) и входную мощность генератора (P_m), применяя формулу

$$P_{mn} = \int_0^{2\pi} u_{mn}^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{K_m} (A_{mn}^{(k)})^2, P_m = \sum_{k=1}^N P_{mn}$$

Входная мощность mn пары ($P^{(mn)}$) и среднеквадратичная мощность пары ($R^{(mn)}$) имеют следующий вид:

$$P^{(mn)} = P_m + P_n - P_{mn} - P_{nm}, R^{(mn)} = \sqrt{P^{(mn)}}.$$

Таким образом, числитель в (19) оценивается среднеквадратичным значением (rms) $R^{(mn)}$.

Для оценки знаменателя (19) мы используем глубину синхронизации (7) с заменой u_{pq} на v_{mn} для взаимно связанных генераторов (10)

$$d_{mn} = \min \left(\omega_{mn} - \min_{\varphi} v_{mn}(\varphi), \max_{\varphi} v_{mn}(\varphi) - \omega_{mn} \right).$$

Значение d_{mn} характеризует производную $v'_{mn}(\bar{\varphi})$ из-за приблизительно прямой зависимости производной v'_{pq} от глубины синхронизации. Следовательно, пара, обеспечивающая минимальную ошибку, может быть найдена путем минимизации критерия $S^{(mn)} = d_{mn}/R^{(mn)}$ для всех синхронизированных пар (m, n):

$$(p, q) = \operatorname{argmin}_{m, n} \left(\frac{d_{mn}}{R^{(mn)}} \mid d_{mn} > 0 \right). \quad (26)$$

Если для $d_{mn} > 0$ пара (p, q) не существует, то работа алгоритма завершена. В противном случае слияние p -го и q -го осцилляторов выполняется путем применения (10), (11), (22), (24), (25). Если результатом работы алгоритма является единый генератор с индексом L , то частота ω_L равна частоте полностью синхронизированного ансамбля генераторов.

Для определения фазовых состояний исходных осцилляторов обратный процесс выполняется после слияния моделей осцилляторов.

V. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Предлагаемый метод проиллюстрирован ниже его применением к моделированию связанных нелинейных осцилляторов для вычислительной сети [4-6]. Мы рассматриваем кодирование

информационных битов (0/1) фазами сигналов (0/ π) осцилляторов.

Разработанный подход применяется к двум осцилляторным конфигурациям булевой логики, представленным на рис. 2 а, б.

Идеальная цепочка инверторов (рис. 2а) возбуждается опорным генератором с частотой $f_1=100$ Гц. Его фаза φ_1 рассматривается как $\varphi_1=0$. Если собственные частоты всех генераторов равны f_1 ($f_1=f_2=f_3=f_4=100$ Гц), то фазы генераторов представлены чередующимися значениями $0, \pi$, соответствующими логическим значениям '0', '1'. Коэффициенты связи на рис. 2 одинаковы: $A_{21}=A_{32}=A_{43}=10$ Гц.

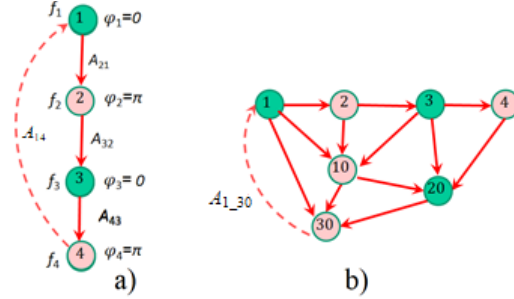


Рис. 2. Сети булевой логики на основе осцилляторов: а) цепочка инверторов, б) три вентиля мажоритарной логики с инвертированием выходного сигнала

Была проведена серия численных экспериментов для анализа влияния характеристик осцилляторов на отклонения фаз. Каждый эксперимент определялся отклонением собственных частот осцилляторов от собственной частоты эталонного генератора. Для заданного отклонения частоты Δf второго генератора ($f_2=f_1+\Delta f$) отклонения для других генераторов определяются $f_3=f_1-\Delta f, f_4=f_1+2\Delta f$.

Первая строка таблицы 1 ($\Delta f = 0$) содержит результаты для идеальной цепи. В следующих трех строках представлены результаты для ($\Delta f = 1, 2, 4$ Гц, соответственно). Отметим, что при $\Delta f > 5$ синхронизация не достигается. Значения фаз осцилляторов, полученные методом слияния представлены в столбцах 3, 5, 7 обозначенных символом М.

Ошибки оцениваются как отличие от численного стационарного решения полной системы ОДУ Курамото (1). Они приведены в столбцах 4, 6, 8 и помечены буквой К. Можно видеть, что отклонения от идеальных фаз увеличиваются с ростом частотных отклонений. Ошибки метода слияния демонстрируют аналогичную зависимость. Последние две строки таблицы 1 содержат результаты, полученные при наличии паразитной обратной связи 4-го генератора с опорным генератором (пунктирная линия на рис. 2а). Видно, что даже при малых коэффициентах связи ($A_{14} = 10^{-3}, 10^{-2}$ Гц) ошибки увеличиваются, но сохраняют относительно небольшие значения.

Паразитные связи анализируются на примере трех вентилях мажоритарной логики 10, 20, 30, с внешними

сигналами от цепи инверторов 1,2,3,4 (рис. 2b). Естественные частоты осцилляторов 1-4 равны эталонной частоте $f_4 = f_3 = f_2 = f_1 = 100\text{Hz}$. Собственные частоты вентилей мажоритарной логики определяются параметром Δf : $f_{10} = f_1 + \Delta f$, $f_{20} = f_1 - \Delta f$, $f_{30} = f_1 - 0.5 \cdot \Delta f$.

Результаты численных экспериментов, выполненных для коэффициента связи с обратной связью $A_{1,30} = 0.01$, представлены в таблице 2. Таблица 2 содержит фазы вентилей 10, 20, 30, оцененные методом слияния (столбцы 2, 4, 6) и их ошибки по отношению к полной системе ОДУ Курамото (столбцы 3, 5, 7).

Таблица 2 также включает сравнение отклонения частоты синхронизации от опорной частоты ($\Delta f_s = f_{syn} - f_1$, МГц), оцененного методом слияния и обычным решением Курамото ОДУ (столбцы 8, 9).

Результаты в таблице 2 показывают увеличение отклонений от идеальных фаз с ростом расхождений частот и аналогичным увеличением ошибок слияния.

Таблица 1

Анализ цепочки инверторов с разными параметрами

Δf Hz	A_{14} M	$\varphi_2/2\pi$ K	$E_2/2\pi$ K	$\varphi_3/2\pi$ M	$E_3/2\pi$ K	$\varphi_4/2\pi$ M	$E_4/2\pi$ K
1	2	3	4	5	6	7	8
0	-	0.5	0	0	0	0.5	0
1	-	0.484	$7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	0.468	$3 \cdot 10^{-5}$
2	-	0.468	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	0.434	$5 \cdot 10^{-5}$
4	-	0.434	$33 \cdot 10^{-6}$	$34 \cdot 10^{-6}$	$34 \cdot 10^{-6}$	0.352	$15 \cdot 10^{-5}$
4	10^{-3}	0.434	$14 \cdot 10^{-4}$	$34 \cdot 10^{-6}$	$27 \cdot 10^{-4}$	0.354	$28 \cdot 10^{-4}$
4	10^{-2}	0.434	$11 \cdot 10^{-3}$	$34 \cdot 10^{-6}$	0.022	0.370	$20 \cdot 10^{-3}$

Таблица 2

Анализ вентилей мажоритарной логики с разными параметрами

Δf M	φ_{10} M	$E_{10}/2\pi$ K	φ_{20} M	$E_{20}/2\pi$ K	φ_{30} M	$E_{30}/2\pi$ K	Δf_s M	Δf_s K
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.484	$73 \cdot 10^{-7}$	$73 \cdot 10^{-7}$	$24 \cdot 10^{-4}$	0.493	$11 \cdot 10^{-4}$	45	38
2		$11 \cdot 10^{-4}$		$40 \cdot 10^{-4}$		$17 \cdot 10^{-4}$	83	62
4		$34 \cdot 10^{-4}$		$58 \cdot 10^{-4}$		$21 \cdot 10^{-4}$	142	90
6		$29 \cdot 10^{-4}$		$68 \cdot 10^{-4}$		$21 \cdot 10^{-4}$	187	106
8		$37 \cdot 10^{-4}$		$75 \cdot 10^{-4}$		$21 \cdot 10^{-4}$	221	116

VI. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод последовательного слияния моделей осцилляторов для определения стационарного решения уравнений Курамото для связанных осцилляторов. Предлагаемая методика является эффективной альтернативой методам анализа ансамблей синхронизированных осцилляторов на базе процедур гомотопии.

ПОДДЕРЖКА

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 19-29-03012 мк).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] C. Bick, M. Goodfellow, C.R. Laing, et al. Understanding the dynamics of biological and neural oscillator networks through exact mean-field reductions: a review // J. Math. Neurosc. 10, 9, 2020. <https://doi.org/10.1186/s13408-020-00086-9>
- [2] P. Ashwin, S. Coombes, R.J. Nicks, Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience, // Journal of Mathematical Neuroscience 6(2), 2016, pp.1-92.
- [3] M. Bonnin, F. Corinto and M. Gilli, Periodic Oscillations in Weakly Connected Cellular Nonlinear Networks, // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 55, no. 6, 2008, pp. 1671-1684. doi: 10.1109/TCSI.2008.916460.
- [4] Y. Fang, V. V. Yashin, D. M. Chiarulli and S. P. Levitan, A Simplified Phase Model for Oscillator Based Computing, //2015 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI, Montpellier, 2015, pp. 231-236, doi: 10.1109/ISVLSI.2015.44.
- [5] M. Bonnin, F. Bonani and F. L. Traversa, Logic Gates Implementation with Coupled Oscillators," // 2018 IEEE Workshop on Complexity in Engineering (COMPENG), Florence, 2018, pp. 1-4, doi: 10.1109/CompEng.2018.8536222.
- [6] T. Wang and J. Roychowdhury, Design tools for oscillator-based computing systems, // 52nd ACM/EDAC/IEEE Design Automation Conference (DAC), San Francisco, CA, 2015, pp. 1-6, doi: 10.1145/2744769.2744818.
- [7] G. Csaba, A. Raychowdhury, S. Datta and W. Porod, Computing with Coupled Oscillators: Theory, Devices, and Applications, // 2018 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Florence, 2018, pp. 1-5, doi: 10.1109/ISCAS.2018.8351664.
- [8] J. A. Acebrón, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena, // Reviews of Modern Physics 77(1), 2005, pp.137 – 185 doi: 77.10.1103/RevModPhys.77.137.
- [9] J.M. Ortega; W.C. Rheinboldt. Iterative solution of equations in several variables. Academic Press, New York, 1970.
- [10] E. Y. Huang, S. Jafarpour and F. Bullo, Synchronization of Coupled Oscillators: The Taylor Expansion of the Inverse Kuramoto Map, // 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Miami Beach, FL, 2018, pp. 5340-5345, doi: 10.1109/CDC.2018.8619559.
- [11] S. Jafarpour, E. Y. Huang, and F. Bullo Synchronization of Kuramoto Oscillators: Inverse Taylor Expansions, // SIAM Journal on Control and Optimization Volume 57, Issue 5, 2019, pp. 3101-3602, doi: 10.1137/18M1216262
- [12] S. Jafarpour and F. Bullo, Synchronization of Kuramoto Oscillators via Cutset Projections, // In IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 64, no. 7, pp. 2830-2844, July 2019, doi: 10.1109/TAC.2018.2876786.
- [13] A. Savostyanov, A. Shapoval, M. Shnirman, The inverse problem for the Kuramoto model of two nonlinear coupled oscillators driven by applications to solar activity, // Physica D: Nonlinear Phenomena, Vol. 401, 132160, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132160>.
- [14] Гурарий М.М., Русаков С.Г. Параметризованная модель Курамото для связанных осцилляторов с дробными соотношениями частот // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем (МЭС). 2020. Выпуск 1. С. 40-45. doi:10.31114/2078-7707-2020-1-40-45

- [15] X. M. Zhang, J. B. Zhang, A. Q. Liu, F. Chollet and J. Z. Hao, Study of injection-locking phenomenon using MEMS tunable laser, // 18th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, 2005. MEMS 2005. Miami Beach, FL, USA, 2005, pp. 80-83, doi: 10.1109/MEMSYS.2005.1453872.
- [16] Gourary M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L., Zharov M.M., Mulvaney B.J., Gullapalli K.K. Smoothed Form of Nonlinear Phase Macromodel for Oscillators // Proc. IEEE/ACM Int. Conf. Comp. Aided Design. 2008. P. 807-814.
- M.M. Gourary, S.G. Rusakov, et al. "Smoothed Form of Nonlinear Phase Macromodel for Oscillators," In: IEEE/ACM Int. Conf. on Comp.-Aided Design, 2008, pp. 807 - 814. doi: 10.1109/ICCAD.2008.4681669.
- [17] Гурарий М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л. Разработка методов анализа режима взаимной синхронизации автогенераторов в интегральных схемах // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем - 2010. Сборник трудов / под общ. ред. академика А.Л.Стемпковского. М.:ИППМ РАН, 2010. С. 138-143.
- [18] Гурарий М.М., Русаков С.Г., Ульянов С.Л. Фазовая нелинейная макромодель для анализа автогенераторных схем // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем - 2014. Сборник трудов / под общ. ред. академика РАН А.Л. Стемпковского. М.: ИППМ РАН, 2014. Часть 1. С. 77-82.

Method of Merging Models to Analyze the Synchronization Modes of Coupled Oscillators

M.M. Gourary, S.G. Rusakov

Institute for design problems in microelectronics of RAS, Moscow, ippm@ippm.ru

Abstract — The problems of analyzing the synchronization modes of coupled oscillators using Kuramoto models are considered. The method of sequential merging of oscillator models has been developed to find steady state solution of Kuramoto equations for coupled oscillators. The new approach is based on the transformation of a model of pair of synchronized oscillators into single Kuramoto oscillator. Analytical expressions defining the sequence of merging operations and the transform of coupling functions are obtained. The algorithm for merging procedure is constructed. The results of numerical experiments are presented. The proposed technique is an effective alternative to homotopy-based methods for analyzing ensembles of synchronized oscillators.

Keywords — coupled oscillators, Kuramoto model, phase macromodels, synchronization, coupling functions, circuit simulation.

REFERENCES

- [1] C. Bick, M. Goodfellow, C.R. Laing, et al. "Understanding the dynamics of biological and neural oscillator networks through exact mean-field reductions: a review," J. Math. Neurosc. 10, 9, 2020. <https://doi.org/10.1186/s13408-020-00086-9>
- [2] P. Ashwin, S. Coombes, R.J. Nicks, "Mathematical Frameworks for Oscillatory Network Dynamics in Neuroscience," Journal of Mathematical Neuroscience 6(2), 2016, pp.1-92.
- [3] M. Bonnin, F. Corinto and M. Gilli, "Periodic Oscillations in Weakly Connected Cellular Nonlinear Networks," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 55, no. 6, 2008, pp. 1671-1684. doi: 10.1109/TCSI.2008.916460.
- [4] Y. Fang, V. V. Yashin, D. M. Chiarulli and S. P. Levitan, "A Simplified Phase Model for Oscillator Based Computing," 2015 IEEE Computer Society Annual Symposium on VLSI, Montpellier, pp. 231-236, 2015, doi: 10.1109/ISVLSI.2015.44.
- [5] M. Bonnin, F. Bonani and F. L. Traversa, "Logic Gates Implementation with Coupled Oscillators," 2018 IEEE Workshop on Complexity in Engineering (COMPENG), Florence, 2018, pp. 1-4, doi: 10.1109/CompEng.2018.8536222.
- [6] T. Wang and J. Roychowdhury, "Design tools for oscillator-based computing systems," 2015 52nd ACM/EDAC/IEEE Design Automation Conference (DAC), San Francisco, CA, 2015, pp. 1-6, doi: 10.1145/2744769.2744818.
- [7] G. Csaba, A. Raychowdhury, S. Datta and W. Porod, "Computing with Coupled Oscillators: Theory, Devices, and Applications," 2018 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Florence, 2018, pp. 1-5, doi: 10.1109/ISCAS.2018.8351664.
- [8] J. A. Acebrón, et al. "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena," Reviews of Modern Physics 77(1), 2005, pp.137 – 185 doi: 10.1103/RevModPhys.77.137.
- [9] J.M. Ortega; W.C. Pheinboldt. Iterative solution of equations in several variables. Academic Press, New York, 1970
- [10] E. Y. Huang, S. Jafarpour and F. Bullo, "Synchronization of Coupled Oscillators: The Taylor Expansion of the Inverse Kuramoto Map," 2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Miami Beach, FL, 2018, pp. 5340-5345, doi: 10.1109/CDC.2018.8619559.
- [11] S. Jafarpour, E. Y. Huang, and F. Bullo "Synchronization of Kuramoto Oscillators: Inverse Taylor Expansions," SIAM Journal on Control and Optimization Volume 57, Issue 5 pp. 3101-3602, 2019, doi: 10.1137/18M1216262
- [12] S. Jafarpour and F. Bullo, "Synchronization of Kuramoto Oscillators via Cutset Projections," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 64, no. 7, pp. 2830-2844, July 2019, doi: 10.1109/TAC.2018.2876786.
- [13] A. Savostyanov, A. Shapoval, M. Shnirman, "The inverse problem for the Kuramoto model of two nonlinear coupled oscillators driven by applications to solar activity," Physica

- D: Nonlinear Phenomena, Vol. 401, 132160, 2020, <https://doi.org/10.1016/j.physd.2019.132160>.
- [14] Gourary M.M., Rusakov S.G., Parametrized Kuramoto Model for Coupled Oscillators with Fractional Frequencies Ratios // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2020. Issue 1. P. 40-45. doi:10.31114/2078-7707-2020-1-40-45
- [15] X. M. Zhang, J. B. Zhang, A. Q. Liu, F. Chollet and J. Z. Hao, Study of injection-locking phenomenon using MEMS tunable laser, // 18th IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems, 2005. MEMS 2005. Miami Beach, FL, USA, 2005, pp. 80-83, doi: 10.1109/MEMSYS.2005.1453872.
- [16] Gourary M.M., Zharov M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L. "Smoothed Form of Nonlinear Phase Macromodel for Oscillators," In: IEEE/ACM Int. Conf. on Comp.-Aided Design, 2008, pp. 807 - 814. doi: 10.1109/ICCAD.2008.4681669.
- [17] Gourary M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L. The Development of the Method for Analyzing Mutual Synchronization Mode of Oscillators in Integrated Circuit // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2010. P. 138-143.
- [18] Gourary M.M., Rusakov S.G., Ulyanov S.L. Nonlinear Phase Macromodel for the Analysis of Oscillator Circuits // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2014. Issue 1. P. 77-82.