

Топологические рисунки графа

С.В. Курапов¹, М.В. Давидовский²

¹Запорожский национальный университет, г. Запорожье, Украина, kurapov5050@gmail.com

²Запорожский институт последипломного педагогического образования,
г. Запорожье, Украина, m.davidovsky@gmail.com

Аннотация — В данной работе рассматривается трудно-решаемая комбинаторная задача построения топологического рисунка графа. В соответствии с предложенным в данной статье подходом решение этой задачи разбивается на несколько этапов, вводятся основные определения и ограничения предлагаемых математических моделей. Основой построения моделей служат методы дискретной оптимизации и теория вращения вершин графа. Для построения математической модели решается задача выделения плоской части графа, которая рассматривается как комбинаторная задача нахождения подмножества изометрических циклов графа. Представленный метод выделения плоской части графа основан на выделении базиса изометрических циклов графа модифицированным алгоритмом Гаусса с последующим выделением плоской части методом градиентного спуска. Рассматриваются методы построения топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений.

Ключевые слова — граф, топологический рисунок графа, диаграмма вращения вершин, изометрические циклы.

I. ВВЕДЕНИЕ

Теория графов предоставляет модели и методы для анализа структур произвольной природы, где граф может рассматриваться как форма моделирования [1–2]. В процессе решения прикладных задач такие структуры нужно визуализировать, преобразовывать, хранить и отображать. Наилучшей формой визуализации графов является его рисунок. Методы построения рисунка графа широко применяются в таких областях как биологические науки, искусственный интеллект, анализ финансовой информации, проектирование плоских конструктивов (где соединения между элементами расположены в нескольких параллельных плоскостях — интегральных микросхем, печатных плат и т. п.) [3–4]. Однако современные методы теории графов описывают объекты с точностью до изоморфизма, не производя различия между их изображениями. Мало того, желательно, чтобы рисунок графа можно было хранить и обрабатывать с помощью топологических методов, без геометрических построений в процессе преобразований [5]. Так, в области САПР плоских конструктивов под топологией понимают пространственно-геометрическое расположение совокупности элементов плоского конструктива и связей между ними. Например, основой для разработки топологии полупроводниковой интегральной микросхемы являются схема электрическая принципиальная, требования к электро-

магнитной совместимости и тепловым режимам элементов. Целью работы проектировщика при разработке топологии является минимизация площади кристалла интегральной микросхемы, минимизация общей длины разводки и количества пересечений в ней. В данной работе рассматриваются математические модели и методы, позволяющие эффективно решать задачу построения топологического рисунка графа с минимальным числом пересечений.

Определение 1. Топологический рисунок графа G — это вращение его вершин $\sigma(G)$ [6].

Построение топологического рисунка графа является трудно решаемой комбинаторной задачей [7–9]. Ее решение возможно методами диакоптики [10], т.е. разбиением на несколько этапов (частей), связанных между собой единым представлением математических моделей и методов. Целью данной работы является описание качественной картины процесса построения топологического рисунка графа. Для этого, очевидно, нужно уйти от излишней математической общности и строгости описания процесса. Поэтому в данной работе рассматривается большое количество частных примеров, иллюстрирующих процесс построения топологического рисунка и раскрывающих его сущность. Естественно, представляется невозможным подробное рассмотрение всего множества алгоритмов и математических моделей в одной отдельно взятой работе. Поэтому в данной работе рассматриваются основные этапы построения топологического рисунка графа, их представления и взаимосвязи, вводятся основные определения для понимания сути процесса и ограничения, налагаемые на представления структур. Перечислим основные этапы построения топологического рисунка графа в последовательности их выполнения: (1) выделение несепарабельной части графа; (2) выделение множества изометрических циклов графа; (3) выделение множества базисов изометрических циклов модифицированным методом Гаусса; (4) выделение подмножества циклов из базиса изометрических циклов методом наискорейшего спуска, имеющего нулевое значение функционала Маклейна; (5) дополнение рисунка плоской части простыми циклами с использованием методов векторной алгебры пересечений; (6) построение рисунка графа с минимальным числом пересечений; (7) определение толщины графа; (8) построение топологического рисунка графа.

II. ВЫДЕЛЕНИЕ НЕСЕПАРАБЕЛЬНОЙ ЧАСТИ ГРАФА

Определение 2. *Несепабельным* графом называется связный неориентированный граф без петель и кратных ребер, без мостов и точек сочленения, без вершин с валентностью меньшей или равной двум.

На диаграмме 1 представлен несепабельный граф G_1 с числом вершин $n = 12$ и числом ребер $m = 23$.

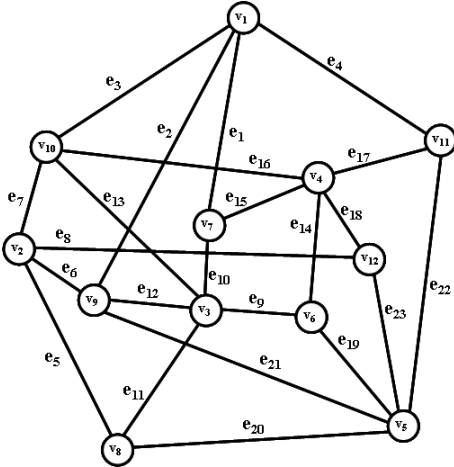


Рис. 1. Диаграмма несепабельного графа G_1

Если граф сепарабельный, то сводим его к набору несепабельных частей, удаляя петли и кратные ребра и разделяя точки сочленения. Также удаляем ребра мостов с целью разбиения графа на несепабельные части и удаляем все ребра имеющие вершины с валентностью 1. Цепочки ребер, имеющих вершины с валентностью 2, заменяем одним ребром. После получения топологического рисунка несепабельных частей восстанавливаем первоначальный вид графа.

III. ВЫДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ГРАФА

Определение 3. *Изометрический подграф* – подграф G^* графа G , у которого все расстояния внутри G^* те же самые, что и в G [11].

Определение 4. *Изометрическим циклом* в графе G называется простой цикл, для которого кратчайший путь между любыми двумя его вершинами состоит из ребер этого цикла. *Изометрический цикл* – частный случай *изометрического подграфа* [11, 12].

Другими словами, изометрическим циклом в графе называется подграф G^* в виде простого цикла, если между двумя любыми несмежными вершинами данного подграфа в соответствующем графе G не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу. Множество изометрических циклов обозначим как $C_\tau(G)$. Для несепабельного графа G_1 представленного на рис. 1 множество изометрических циклов $C_\tau(G_1)$ имеет следующий вид:

$$c_1 = \{e_1, e_2, e_{10}, e_{12}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_9, v_3\};$$

$$c_2 = \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{10}, v_3\};$$

$$c_3 = \{e_1, e_3, e_{15}, e_{16}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{10}, v_4\};$$

$$c_4 = \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{11}, v_4\};$$

$$c_5 = \{e_2, e_3, e_6, e_7\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{10}, v_2\};$$

$$c_6 = \{e_2, e_3, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{10}, v_3\};$$

$$c_7 = \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{11}, v_5\};$$

$$c_8 = \{e_3, e_4, e_{16}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_{10}, v_{11}, v_4\};$$

$$c_9 = \{e_5, e_6, e_{11}, e_{12}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_9, v_3\};$$

$$c_{10} = \{e_5, e_6, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_9, v_5\};$$

$$c_{11} = \{e_5, e_7, e_{11}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_{10}, v_3\};$$

$$c_{12} = \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_{12}, v_5\};$$

$$c_{13} = \{e_6, e_7, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_9, v_{10}, v_3\};$$

$$c_{14} = \{e_6, e_8, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_9, v_{12}, v_5\};$$

$$c_{15} = \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_{10}, v_{12}, v_4\};$$

$$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_7, v_4\};$$

$$c_{17} = \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_8, v_5\};$$

$$c_{18} = \{e_9, e_{12}, e_{19}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_9, v_5\};$$

$$c_{19} = \{e_9, e_{13}, e_{14}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_{10}, v_4\};$$

$$c_{20} = \{e_{10}, e_{13}, e_{15}, e_{16}\} \rightarrow \{v_3, v_7, v_{10}, v_4\};$$

$$c_{21} = \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_8, v_9, v_5\};$$

$$c_{22} = \{e_{14}, e_{17}, e_{19}, e_{22}\} \rightarrow \{v_4, v_6, v_{11}, v_5\};$$

$$c_{23} = \{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_6, v_{12}, v_5\};$$

$$c_{24} = \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_{11}, v_{12}, v_5\}.$$

IV. ВЫДЕЛЕНИЕ МНОЖЕСТВА БАЗИСОВ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ГАУССА

Выделение базисов подпространства циклов C методом Гаусса из множества $C_\tau(G)$ тесно связано с расположением элементов в последовательности изометрических циклов.

Определение 5. Последовательность изометрических циклов в графе называется *перестановкой циклов* и обозначается как ψ_i , где i – номер перестановки.

Всего таких перестановок будет $\text{card } C_\tau(G)!$. Каждую перестановку запишем в виде кортежа $\psi_i = \langle c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$, где p – количество изометрических циклов. Для каждой перестановки ψ_i модифицированным методом Гаусса выделим базис подпространства циклов C пространства суграфов графа L_G . Предположим, что для графа G , представленного на диаграмме 1, выделено множество базисов с мощностью равной q : $B(G_1) = \{b_1(G_1), b_2(G_1), \dots, b_q(G_1)\}$. Цикломатическое число графа, представленного на диаграмме 1 – $v(G_1) = m - n + 1 = 12$. Множество изометрических циклов, составляющих базис $b_1(G_1)$ подпространства циклов C , состоит из следующих элементов:

$$c_7 = \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{11}, v_5\};$$

$$c_{21} = \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_8, v_9, v_5\};$$

$$c_{24} = \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_{11}, v_{12}, v_5\};$$

$$c_4 = \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{11}, v_4\};$$

$$c_9 = \{e_5, e_6, e_{11}, e_{12}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_9, v_3\};$$

$$c_2 = \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{10}, v_3\};$$

$$c_{16} = \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_7, v_4\};$$

$$c_{23} = \{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_6, v_{12}, v_5\};$$

$$\begin{aligned}
c_{17} &= \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_8, v_5\}; \\
c_8 &= \{e_3, e_4, e_{16}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_{10}, v_{11}, v_4\}; \\
c_{14} &= \{e_6, e_8, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_9, v_{12}, v_5\}; \\
c_{13} &= \{e_6, e_7, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_9, v_{10}, v_3\}.
\end{aligned}$$

Аналогично, для $b_2(G_1)$:

$$\begin{aligned}
c_{16} &= \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_7, v_4\}; \\
c_{10} &= \{e_5, e_6, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_9, v_5\}; \\
c_{23} &= \{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_6, v_{12}, v_5\}; \\
c_{11} &= \{e_5, e_7, e_{11}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_{10}, v_3\}; \\
c_2 &= \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{10}, v_3\}; \\
c_{24} &= \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_{11}, v_{12}, v_5\}; \\
c_{21} &= \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_8, v_9, v_5\}; \\
c_{12} &= \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_{12}, v_5\}; \\
c_7 &= \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{11}, v_5\}; \\
c_{15} &= \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_{10}, v_{12}, v_4\}; \\
c_5 &= \{e_2, e_3, e_6, e_7\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{10}, v_2\}; \\
c_4 &= \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{11}, v_4\}.
\end{aligned}$$

Построение других базисов графа G_1 производится метаэвристическими методами [13].

V. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВА ЦИКЛОВ ИЗ БАЗИСА ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ МЕТОДОМ НАЙСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Из каждого базиса b_i подпространства циклов C [14] методом градиентного спуска выделяем подмножество независимых циклов, у которых значение функционала Маклейна равно нулю [15]:

$$F(C_i) = \sum_{i=1}^m a_i^2 - 3 \sum_{i=1}^m a_i + 2m = 0$$

При этом для каждого подмножества в процессе удаления циклов соблюдаем условие Эйлера [14, 16]:

$$v(C_i) - m + n - 1 = 0$$

Выделим подмножества циклов, характеризующиеся минимальным количеством удаленных ребер.

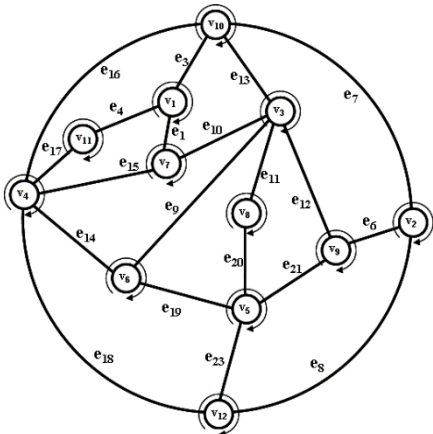


Рис. 2. Плоский суграф графа G_1 (вариант 1)

Определение 6. Подмножество изометрических циклов, характеризующееся минимальным количеством удаленных ребер, называется *максимально плоским суграфом*.

Предположим, что их количество для графа G_1 (диаграмма 1) равно 8 (рис. 2 – 9). Подмножество циклов (вариант 1), описывающих плоскую часть графа G_1 , строится на основе базиса $b_1(G_1)$ при удалении ребер e_2, e_5, e_{22} (рис. 2) и имеет вид:

$$\begin{aligned}
c_{21} &= \{e_{11}, e_{12}, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_3, v_8, v_9, v_5\}; \\
c_4 &= \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{11}, v_4\}; \\
c_2 &= \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{10}, v_3\}; \\
c_{16} &= \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_7, v_4\}; \\
c_{23} &= \{e_{14}, e_{18}, e_{19}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_6, v_{12}, v_5\}; \\
c_{17} &= \{e_9, e_{11}, e_{19}, e_{20}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_8, v_5\}; \\
c_8 &= \{e_3, e_4, e_{16}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_{10}, v_{11}, v_4\}; \\
c_{14} &= \{e_6, e_8, e_{21}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_9, v_{12}, v_5\}; \\
c_{13} &= \{e_6, e_7, e_{12}, e_{13}\} \rightarrow \{v_2, v_9, v_{10}, v_3\}.
\end{aligned}$$

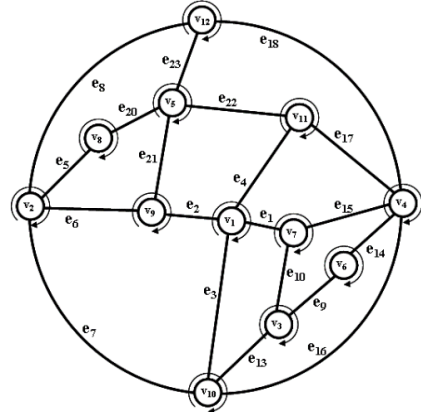


Рис. 3. Плоский суграф графа G_1 (вариант 2)

Подмножество циклов, описывающих плоскую часть графа G_1 , строится на основе базиса $b_2(G_1)$ при удалении ребер e_{11}, e_{12}, e_{19} (рис. 3) и имеет вид:

$$\begin{aligned}
c_{16} &= \{e_9, e_{10}, e_{14}, e_{15}\} \rightarrow \{v_3, v_6, v_7, v_4\}; \\
c_{10} &= \{e_5, e_6, e_{20}, e_{21}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_9, v_5\}; \\
c_2 &= \{e_1, e_3, e_{10}, e_{13}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{10}, v_3\}; \\
c_{24} &= \{e_{17}, e_{18}, e_{22}, e_{23}\} \rightarrow \{v_4, v_{11}, v_{12}, v_5\}; \\
c_{12} &= \{e_5, e_8, e_{20}, e_{23}\} \rightarrow \{v_2, v_8, v_{12}, v_5\}; \\
c_7 &= \{e_2, e_4, e_{21}, e_{22}\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{11}, v_5\}; \\
c_{15} &= \{e_7, e_8, e_{16}, e_{18}\} \rightarrow \{v_2, v_{10}, v_{12}, v_4\}; \\
c_5 &= \{e_2, e_3, e_6, e_7\} \rightarrow \{v_1, v_9, v_{10}, v_2\}; \\
c_4 &= \{e_1, e_4, e_{15}, e_{17}\} \rightarrow \{v_1, v_7, v_{11}, v_4\}; \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Таким образом строится множество топологических рисунков плоской части графа G [16–17].

VI. ДОПОЛНЕНИЕ РИСУНКА ПЛОСКОЙ ЧАСТИ ПРОСТЫМИ ЦИКЛАМИ, ИСПОЛЬЗУЯ МЕТОДЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

После этапа выделения плоской части графа близкой к максимально плоскому суграфу возможно дополнение подмножества изометрических циклов простыми циклами. Рассмотрим следующий рисунок плоского суграфа (рис. 4). В процессе удаления циклов методом градиентного спуска среди удаленных находятся ребра $(v_1, v_8), (v_3, v_{10}), (v_4, v_7), (v_4, v_9), (v_5, v_8)$ с концевыми вершинами, принадлежащими ободу суграфа. Рассмотрим обод как координатно-базисную систему [18].

Определение 7. Координатно-базисная система – это замкнутая ориентированная система векторов, составленная из ребер графа.

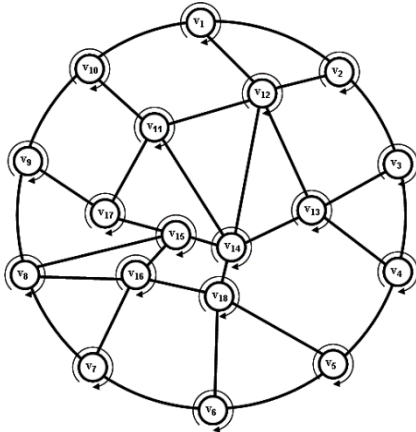


Рис. 4. Плоский суграф G_2

На рис. 5. представлена координатно-базисная система векторов: $KBS(G_1) = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_8) + (v_8, v_9) + (v_9, v_{10}) + (v_{10}, v_1)$. Тогда ребра с концевыми вершинами на ободе могут быть представлены как проекции вектора на координатно-базисную систему (КБС):

$$(v_8, v_1) = (v_8, v_9) + (v_9, v_{10}) + (v_{10}, v_1); (v_{10}, v_3) = (v_{10}, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_3); (v_9, v_4) = (v_9, v_{10}) + (v_{10}, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_4); (v_4, v_7) = (v_4, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_7); (v_5, v_8) = (v_5, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_8).$$

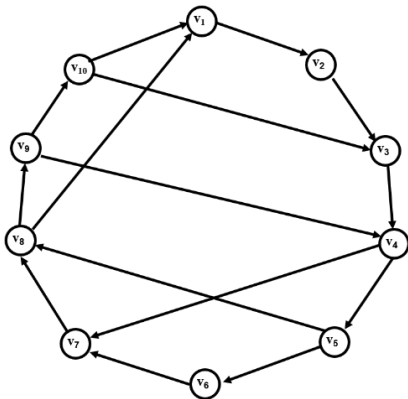


Рис. 5. Проекция ребер на КБС

Рассмотрим пересечение ребер как пересечение соответствующих проекций векторов. Тогда можно определить, что ребро (v_5, v_8) пересекается с ребром (v_4, v_7) , т. к. пересекаются их проекции на КБС. То есть пересечение проекций ребер (v_5, v_8) и (v_4, v_7) не пусто: $pr(v_5, v_8) \cap pr(v_4, v_7) = (v_5, v_6) + (v_6, v_7) \neq \emptyset$. Ребро (v_8, v_1) пересекается с ребрами (v_{10}, v_3) и (v_9, v_4) : $pr(v_8, v_1) \cap pr(v_{10}, v_3) = (v_{10}, v_1) \neq \emptyset$; $pr(v_8, v_1) \cap pr(v_9, v_4) = (v_9, v_{10}) + (v_{10}, v_1) \neq \emptyset$. Непересекающиеся между собой ребра $(v_4, v_7), (v_{10}, v_3), (v_9, v_4)$ совместно со своими проекциями образуют простые циклы, которые включаются как дополнительные в систему циклов для описания плоского суграфа G_2 :

$$c_{d1} = (v_3, v_4) + (v_4, v_9) + (v_9, v_{10}) + (v_{10}, v_3);$$

$$c_{d2} = (v_3, v_{10}) + (v_{10}, v_1) + (v_1, v_2) + (v_2, v_3);$$

$$c_{d3} = (v_5, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_8) + (v_8, v_5).$$

VII. ПОСТРОЕНИЕ РИСУНКА ГРАФА С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ

Определение 8. Число пересечений $cr(G)$ графа G – это наименьшее число пересечений ребер рисунка графа G .

Граф является планарным тогда и только тогда, когда его число пересечений равно нулю. Полезное неравенство для числа пересечений приводится в [9]. Для неориентированных простых графов G с n вершинами и m ребрами таких, что $m > 7n$ имеем:

$$cr(G) \geq \frac{m^3}{29n^2}$$

Константа 29 является наилучшей из известных. Согласно Акерману [9], если понизить условие $m > 4n$, то это будет стоить замены константы 29 на 64.

$$cr(G) \geq \frac{m^3}{64n^2}$$

Небольшое изменение приведённой аргументации позволяет заменить 64 на 33,75 для $m > 7,5n$.

Процесс укладки соединений рассмотрим на примере топологического рисунка графа G_3 (рис. 6).

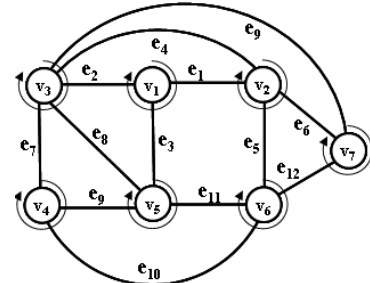


Рис. 6. Топологический рисунок плоской части графа G_3

Топологический рисунок планарного графа можно описать диаграммой вращения его вершин. Например, топологический рисунок графа (G_3, σ) представленного на рис. 6 описывается следующей диаграммой:

$\sigma(v_1):$	v_3	v_2	$v_5,$	
$\sigma(v_2):$	v_1	v_3	v_7	$v_6,$
$\sigma(v_3):$	v_5	v_4	v_7	v_2
$\sigma(v_4):$	v_3	v_5	$v_6,$	$v_1,$
$\sigma(v_5):$	v_4	v_3	v_1	$v_6,$
$\sigma(v_6):$	v_4	v_5	v_2	$v_7,$
$\sigma(v_7):$	v_2	v_3	$v_6.$	

Топологический рисунок может быть записан в виде множества кортежей вращения вершин графа:

$$\sigma(G_2) = \{ \sigma(v_1) = \langle v_3, v_2, v_5 \rangle, \sigma(v_2) = \langle v_1, v_3, v_7, v_6 \rangle, \sigma(v_3) = \langle v_5, v_4, v_7, v_2, v_1 \rangle, \sigma(v_4) = \langle v_3, v_5, v_6 \rangle, \sigma(v_5) = \langle v_4, v_3, v_1, v_6 \rangle, \sigma(v_6) = \langle v_4, v_5, v_2, v_7 \rangle, \sigma(v_7) = \langle v_2, v_3, v_6 \rangle \}.$$

Запись вращения вершин трактуется как циклическая запись ненулевых элементов соответствующей строки в матрице смежностей графа. В свою очередь, вращение вершин индуцирует ориентированные циклы. Следует заметить, что ребра в базисных циклах ориентированы в противоположную сторону за исключением обода c_0 . Запишем циклы в виде циклического кортежа вершин, который можно преобразовать в сумму ориентированных ребер графа (векторов):

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle v_3, v_4, v_5 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_3); \\ c_2 &= \langle v_1, v_3, v_5 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_1); \\ c_3 &= \langle v_1, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1); \\ c_4 &= \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2); \\ c_5 &= \langle v_4, v_6, v_5 \rangle = (v_4, v_6) + (v_6, v_5) + (v_5, v_4); \\ c_6 &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1); \\ c_7 &= \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2); \\ c_0 &= \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle = (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3). \end{aligned}$$

Данный вид записи нужно рассматривать не как арифметическое сложение ребер, а как последовательность ориентированных ребер в цикле. Например, циклическая запись цикла c_7 показывает, что за ребром (v_2, v_7) следует ребро (v_7, v_3) , за ребром (v_7, v_3) следует ребро (v_3, v_2) и процесс является замкнутым. Предположим, что нам нужно в топологический рисунок графа G уложить ребро $\{v_2, v_4\}$. Естественно, что проведение данного соединения обязательно будет пересекать ребра плоской части графа. Будем вводить новые вершины как результат пересечения ребер.

Определение 9. Назовем *мнимой* вершину графа, образованную топологическим местоположением пересечения двух ребер.

Методом поиска в ширину выделим все маршруты, соединяющие выбранные вершины графа. В данном случае, для графа G_3 имеем пять маршрутов для проведения соединения (v_2, v_4) . Будем отсчитывать маршруты от вершины v_2 к вершине v_4 . Тогда можно записать выбранные маршруты в виде кортежей циклов $h_1 = \langle c_7, c_0 \rangle$, $h_2 = \langle c_4, c_0 \rangle$, $h_3 = \langle c_3, c_5 \rangle$, $h_4 = \langle c_6, c_2, c_1 \rangle$, $h_5 = \langle c_3, c_2, c_1 \rangle$. В общем случае для проведения соединений выбираются маршруты минимальной длины. Однако в нашем случае для более детального рассмотрения процесса проведения удаленных соединений выберем маршрут $h_5 = \langle c_3, c_2, c_1 \rangle$. Определим порядок проведения соединения (v_2, v_4) . При проведении соединения $\{v_2, v_4\}$ вначале пересекается ребро $e_3 = \{v_1, v_5\}$, принадлежащее циклам c_3 и c_2 . Затем пересекается ребро $e_8 = \{v_3, v_5\}$, принадлежащее циклам c_2 и c_1 . Следовательно, вводятся две мнимые вершины для исходного графа G_3 . Обозначим эти вершины как v_8 и v_9 . Введем вершину v_8 в ребро e_3 циклов c_3 и c_2

$$\begin{aligned} c_2^* &= \langle v_1, v_3, v_5, v_8 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_5) + (v_5, v_8) + \\ &+ (v_8, v_1); \quad c_3^* = \langle v_1, v_8, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_1, v_8) + (v_8, v_5) + \\ &+ (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1). \end{aligned}$$

Теперь введем вершину v_9 в ребро e_8 циклов c_1 и c_2

$$\begin{aligned} c_1^* &= \langle v_3, v_4, v_5, v_9 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + \\ &+ (v_9, v_3); \quad c_2^{**} = \langle v_1, v_3, v_9, v_5, v_8 \rangle = (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + \\ &+ (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1). \end{aligned}$$

Осталось последовательно ввести части соединения $\{v_2, v_4\}$ в соответствующие циклы. Будем последовательно вводить ребро $\{v_2, v_8\}$ в цикл c_3^* , ребро $\{v_8, v_9\}$ в цикл c_2^{**} и ребро $\{v_9, v_4\}$ в цикл c_1^* .

$$\begin{aligned} c_3^* &= (v_1, v_8) + (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_1) + \\ &+ (v_2, v_8) + (v_8, v_2) = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + \\ &+ (v_2, v_8) + (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_3^{**} = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_8); \quad c_8 = (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2).$$

Вводим ребро $\{v_8, v_9\}$ в цикл c_2^{**} :

$$\begin{aligned} c_2^{**} &= (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_1) + \\ &+ (v_9, v_8) + (v_8, v_9) = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8) + \\ &+ (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_2^{***} = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + (v_9, v_8); \quad c_9 = (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9).$$

Вводим ребро $\{v_9, v_4\}$ в цикл c_1^* :

$$\begin{aligned} c_1^* &= (v_3, v_4) + (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_3) + (v_9, v_4) + \\ &+ (v_4, v_9) = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4) + (v_9, v_3) + \\ &+ (v_3, v_4) + (v_4, v_9). \end{aligned}$$

В результате образуются два новых цикла:

$$c_1^{**} = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4); \quad c_{10} = (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9).$$

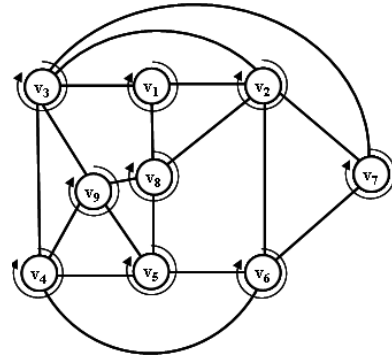


Рис. 7. Топологический рисунок графа G_3 с двумя точками пересечения

Новая система циклов имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1^{**} &= \langle v_4, v_5, v_9 \rangle = (v_4, v_5) + (v_5, v_9) + (v_9, v_4); \\ c_2^{***} &= \langle v_8, v_1, v_3, v_9 \rangle = (v_8, v_1) + (v_1, v_3) + (v_3, v_9) + \\ &+ (v_9, v_8); \\ c_3^{**} &= \langle v_8, v_5, v_6, v_2 \rangle = (v_8, v_5) + (v_5, v_6) + (v_6, v_2) + \\ &+ (v_2, v_8); \\ c_4 &= \langle v_2, v_6, v_7 \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_7) + (v_7, v_2); \\ c_5 &= \langle v_4, v_6, v_5 \rangle = (v_4, v_6) + (v_6, v_5) + (v_5, v_4); \\ c_6 &= \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) + (v_3, v_1); \\ c_7 &= \langle v_2, v_7, v_3 \rangle = (v_2, v_7) + (v_7, v_3) + (v_3, v_2); \end{aligned}$$

$$c_8 = \langle v_2, v_1, v_8 \rangle = (v_2, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_2);$$

$$c_9 = \langle v_9, v_5, v_8 \rangle = (v_9, v_5) + (v_5, v_8) + (v_8, v_9);$$

$$c_{10} = \langle v_9, v_3, v_4 \rangle = (v_9, v_3) + (v_3, v_4) + (v_4, v_9);$$

$$c_0 = \langle v_3, v_7, v_6, v_4 \rangle = (v_3, v_7) + (v_7, v_6) + (v_6, v_4) + (v_4, v_3).$$

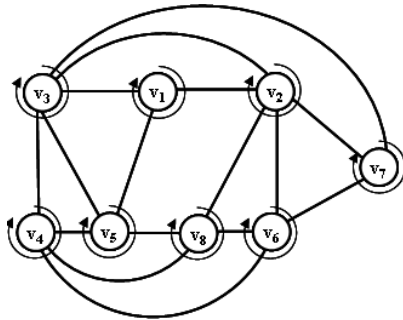


Рис. 8. Топологический рисунок графа G_3 с одной точкой пересечения

В результате получен топологический рисунок непланарного графа G_3 с двумя точками пересечения (рис. 7). Если воспользоваться маршрутом h_3 , то полученный топологический рисунок непланарного графа G_3 будет характеризоваться только одной точкой пересечения (рис. 8). Так как в процессе укладки ребер происходит разбиение ребер на части и появление новых циклов, то в целом процесс построения минимального количества пересечений ребер определяется последовательностью проведения соединений. Данный процесс будем рассматривать с помощью перестановки ребер в последовательности. Каждую перестановку опишем кортежем $\varphi_i = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$, где i – номер кортежа, k – количество удаленных ребер.

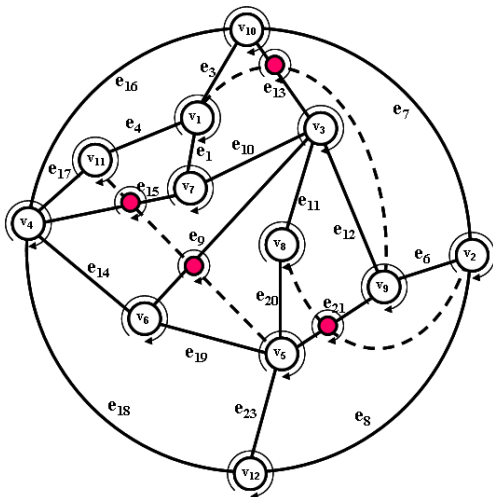


Рис. 9. Топологический рисунок графа G_1 с пересечениями (вариант 1)

Вернемся к топологическим рисункам плоских суграфов графа G_1 (рис. 2–3). На рис. 9 представлен топологический рисунок графа G_1 с числом пересечений равным четырем, для перестановки удаленных ребер $\langle e_2, e_5, e_{22} \rangle$. Определяем минимальное число пересечений ребер графа G_1 равное четырём (рис. 9).

VIII. ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА ГРАФА МИНИМАЛЬНОЙ ТОЛЩИНЫ

Определение 10. Толщина графа G – это наименьшее число плоских суграфов, на которые можно разложить рёбра графа G .

То есть, если существует набор k плоских графов, имеющих одинаковый набор вершин, объединение которых даёт граф G , то толщина графа G не больше k . Таким образом, плоский граф имеет толщину 1 [19]. Всесторонний обзор по теме толщины графа приведен в работе Мутцеля, Оденталя и Шарбротта [19].

Определение 11. Топологический рисунок плоского суграфа с максимальным количеством непересекающихся ребер называется *слоем* графа.

Толщина полного графа с n вершинами K_n равна

$$\left\lceil \frac{n+7}{6} \right\rceil$$

за исключением случаев $n = 9, 10$, для которых толщина равна 3. За исключением нескольких случаев, толщина полного двудольного графа $K_{a,b}$ равна

$$\left\lceil \frac{ab}{2(a+b-2)} \right\rceil$$

Следует заметить, что топологические рисунки слоев начиная со второго должны строиться совместно с топологическим рисунком первого слоя с учетом различия, так как проведение соединений осуществляется в топологическом пространстве определенным вращением вершин первого слоя (рис. 10).

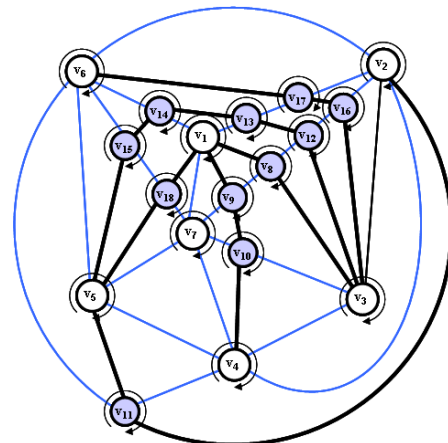


Рис. 10. Топологический рисунок второго слоя графа K_7

IX. ПОСТРОЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО РИСУНКА

Таким образом, следует различать следующие три вида топологических рисунков графов: топологический рисунок плоского суграфа, приближенного к максимально плоскому; топологический рисунок графа с минимальным числом пересечений; топологические рисунки слоев графа. Последние два вида топологических рисунков строятся с участием мнимых вершин. Вне зависимости от вида графа, топологиче-

ский рисунок определяется вращением вершин и индуцированной этим вращением системой циклов. Например, вращение вершин, описывающее топологический рисунок второго слоя графа K_7 , представленного на рис. 10, имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma(v_1) &= \langle v_{13}, v_8, v_9, v_7, v_{18}, v_{14} \rangle; \\ \sigma(v_2) &= \langle v_6, v_{11}, v_4, v_3, v_{16}, v_{17} \rangle; \\ \sigma(v_3) &= \langle v_{10}, v_8, v_{12}, v_{16}, v_2, v_4 \rangle; \\ \sigma(v_4) &= \langle v_7, v_{10}, v_3, v_2, v_{11}, v_5 \rangle; \\ \sigma(v_5) &= \langle v_6, v_{15}, v_{18}, v_7, v_4, v_{11} \rangle; \\ \sigma(v_6) &= \langle v_2, v_{17}, v_{14}, v_{15}, v_5, v_{11} \rangle; \\ \sigma(v_7) &= \langle v_1, v_9, v_{10}, v_4, v_5, v_{18} \rangle; \\ \sigma(v_8) &= \langle v_1, v_{12}, v_3, v_9 \rangle; & \sigma(v_9) &= \langle v_1, v_8, v_{10}, v_7 \rangle; \\ \sigma(v_{10}) &= \langle v_7, v_9, v_3, v_{49} \rangle; & \sigma(v_{11}) &= \langle v_5, v_4, v_2, v_6 \rangle; \\ \sigma(v_{12}) &= \langle v_{13}, v_{16}, v_3, v_8 \rangle; & \sigma(v_{13}) &= \langle v_{14}, v_{17}, v_{12}, v_1 \rangle; \\ \sigma(v_{14}) &= \langle v_6, v_{13}, v_1, v_{15} \rangle; & \sigma(v_{15}) &= \langle v_6, v_{14}, v_{18}, v_5 \rangle; \\ \sigma(v_{16}) &= \langle v_2, v_3, v_{12}, v_{17} \rangle; & \sigma(v_{17}) &= \langle v_6, v_2, v_{16}, v_{13} \rangle; \\ \sigma(v_{18}) &= \langle v_{15}, v_1, v_4, v_5 \rangle. \end{aligned}$$

Множество индуцированных циклов данным вращением вершин:

$$\begin{aligned} c_1 &= \langle v_2, v_6, v_{17} \rangle = (v_2, v_6) + (v_6, v_{17}) + (v_{17}, v_2); \\ c_2 &= \langle v_{17}, v_6, v_{14}, v_{13} \rangle = (v_{17}, v_6) + (v_6, v_{14}) + (v_{14}, v_{13}) + \\ &+ (v_{13}, v_{17}); \\ c_3 &= \langle v_2, v_{17}, v_{16} \rangle = (v_2, v_{17}) + (v_{17}, v_{16}) + (v_{16}, v_2); \\ c_4 &= \langle v_6, v_{15}, v_{14} \rangle = (v_6, v_{15}) + (v_{15}, v_{14}) + (v_{14}, v_6); \\ c_5 &= \langle v_{14}, v_1, v_{13} \rangle = (v_{14}, v_1) + (v_1, v_{13}) + (v_{13}, v_{14}); \\ c_6 &= \langle v_{17}, v_{13}, v_{12}, v_{16} \rangle = (v_{17}, v_{13}) + (v_{13}, v_{12}) + (v_{12}, v_{16}) + \\ &+ (v_{16}, v_{17}); \\ c_7 &= \langle v_{16}, v_3, v_2 \rangle = (v_{16}, v_3) + (v_3, v_2) + (v_2, v_{16}); \\ c_8 &= \langle v_{15}, v_{18}, v_1, v_{14} \rangle = (v_{15}, v_{18}) + (v_{18}, v_1) + (v_1, v_{14}) + \\ &+ (v_{14}, v_{15}); \\ c_9 &= \langle v_{13}, v_1, v_8, v_{12} \rangle = (v_{13}, v_1) + (v_1, v_8) + (v_8, v_{12}) + \\ &+ (v_{12}, v_{13}); \\ c_{10} &= \langle v_{12}, v_3, v_{16} \rangle = (v_{12}, v_3) + (v_3, v_{16}) + (v_{16}, v_{12}); \\ c_{11} &= \langle v_6, v_5, v_{15} \rangle = (v_6, v_5) + (v_5, v_{15}) + (v_{15}, v_6); \\ c_{12} &= \langle v_{15}, v_5, v_{18} \rangle = (v_{15}, v_5) + (v_5, v_{18}) + (v_{18}, v_{15}); \\ c_{13} &= \langle v_{18}, v_7, v_1 \rangle = (v_{18}, v_7) + (v_7, v_1) + (v_1, v_{18}); \\ c_{14} &= \langle v_1, v_7, v_9 \rangle = (v_1, v_7) + (v_7, v_9) + (v_9, v_1); \\ c_{15} &= \langle v_1, v_9, v_8 \rangle = (v_1, v_9) + (v_9, v_8) + (v_8, v_1); \\ c_{16} &= \langle v_8, v_3, v_{12} \rangle = (v_8, v_3) + (v_3, v_{12}) + (v_{12}, v_8); \\ c_{17} &= \langle v_9, v_{10}, v_3, v_8 \rangle = (v_9, v_{10}) + (v_{10}, v_3) + (v_3, v_8) + (v_8, v_9); \\ c_{18} &= \langle v_7, v_{10}, v_9 \rangle = (v_7, v_{10}) + (v_{10}, v_9) + (v_9, v_7); \\ c_{19} &= \langle v_5, v_7, v_{18} \rangle = (v_5, v_7) + (v_7, v_{18}) + (v_{18}, v_5); \\ c_{20} &= \langle v_6, v_{11}, v_5 \rangle = (v_6, v_{11}) + (v_{11}, v_5) + (v_5, v_6); \\ c_{21} &= \langle v_5, v_4, v_7 \rangle = (v_5, v_4) + (v_4, v_7) + (v_7, v_5); \\ c_{22} &= \langle v_7, v_4, v_{10} \rangle = (v_7, v_4) + (v_4, v_{10}) + (v_{10}, v_7); \\ c_{23} &= \langle v_{10}, v_4, v_3 \rangle = (v_{10}, v_4) + (v_4, v_3) + (v_3, v_{10}); \\ c_{24} &= \langle v_5, v_{11}, v_4 \rangle = (v_5, v_{11}) + (v_{11}, v_4) + (v_4, v_5); \\ c_{25} &= \langle v_3, v_4, v_2 \rangle = (v_3, v_4) + (v_4, v_2) + (v_2, v_3); \\ c_{26} &= \langle v_{11}, v_2, v_4 \rangle = (v_{11}, v_2) + (v_2, v_4) + (v_4, v_{11}); \\ c_{27} &= \langle v_{11}, v_6, v_2 \rangle = (v_{11}, v_6) + (v_6, v_2) + (v_2, v_{11}). \end{aligned}$$

Х. ВЫВОДЫ

В данной работе авторы продолжают исследовать математические модели, методы и алгоритмы решения задачи построения топологического рисунка графа. В работе рассмотрен общий поэтапный подход к решению задач построения топологического рисунка различных видов графа. На базе представленных матема-

тических моделей рассмотрены приближенные методы решения труднорешаемых задач. Представленные математические модели позволяют эффективно строить геометрический прообраз топологического рисунка графа, что продемонстрировано на конкретных примерах. Также рассмотренная математическая модель рисунка графа позволяет свести решение задачи к известным методам дискретной оптимизации и носит приближенный характер. Методы построения рисунка графа тесно связаны с расположением элементов в определяющем множестве (кортеж изометрических циклов, кортеж планарных топологических рисунков, кортеж удаленных в процессе планаризации ребер и т. д.). Построение кортежей данного вида осуществляется метаэвристическими методами [13].

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Зыков А.А. Теория конечных графов. Новосибирск: Наука, 1969. 542 с.
- [2] Харари Ф. Теория графов. Пер. с англ. / Козырева В.П., под ред. Гаврилова В.Г. М.: Мир, 1973. 300 с.
- [3] Апанович З.В. От рисования графов к визуализации информации. Новосибирск, РАН, 2007. 24 с.
- [4] Tamassia R. Handbook of Graph Drawing and Visualization. Charman and Hall/CRC, 2013. 844 p.
- [5] Курапов С.В., Толоч А.В. Построение топологического рисунка максимально плоского суграфа не планарного графа // Автомат. и телемех. 2018. № 5. С. 24–45.
- [6] Рингель Г. Теорема о раскраске карт. М.: Мир, 1977. – 126 с.
- [7] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи: Пер. с англ. / М. Гэри., Д. Джонсон. М.: Мир, 1982. 416 с.
- [8] Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Dover Publications, 1998. 528 p.
- [9] Schaefer M. Complexity of some geometric and topological problems // LNCS. 2010. V. 5849. P. 334–344.
- [10] Крон Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика). М.: Наука, 1972. 544 с.
- [11] Kavitha T., Liebchen C., Mehlhorn K., Michail D., et al. Cycle bases in graphs – characterization, algorithms, complexity, and applications // Comput. Sci. Rev. 2009. No.3. P. 199–243.
- [12] Курапов С.В., Давидовский М.В., Клиценко А.А. Изометрические циклы графа // Вісник Запорізького національного університету: Збірник наук. статей. Фіз.-мат. науки. Запоріжжя: ЗНУ. 2016. № 1. С. 121–137.
- [13] Luke S. Essentials of Metaheuristics. lulu.com Pub., 2nd Ed., 2013. 242 p.
- [14] Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. / М. Свами, К. Тхуласираман. М.: Мир, 1984. 455 с.
- [15] MacLane S. A combinatorial condition for planar graphs // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 22–32.
- [16] Козин И.В., Курапов С.В., Полюга С.И. Эволюционно-фрагментарный алгоритм нахождения максимального планарного суграфа // Прикладная дискретная математика. 2015. № 3(29). С. 74–82.
- [17] Курапов С.В., Давидовский М.В., Толоч А.В. Генерация топологического рисунка плоской части непланарного графа // Научная визуализация. 2020. Т. 12, № 1, С. 90–102.
- [18] Раппопорт Л.И., Мороговский Б.Н., Поливцев С.А. Векторная алгебра пересечений / В кн.:

Topological Graph Drawings

S.V. Kurapov¹, M.V. Davidovsky²

¹Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine, kurapov5050@gmail.com

²Zaporizhzhya Institute of Postgraduate Pedagogical Education, Zaporizhzhya, Ukraine, m.davidovsky@gmail.com

Abstract — Graph theory provides models and methods for analyzing structures of an arbitrary nature, where a graph can be viewed as a form of structure modeling. In the process of solving applied problems, such structures need to be visualized, transformed, stored and displayed. The best form of graph visualization is its drawing. Graph drawing (visualization) methods are widely used in such fields as biological sciences, artificial intelligence, financial information analysis, designing flat constructs, where the connections between elements are located in several parallel planes – integrated circuits, printed circuit boards, etc. However, modern methods of graph theory represent objects up to isomorphism without distinguishing between their images (graph drawings). Moreover, it is desirable that the drawing can be stored and processed using topological methods, without making geometric constructions in the process of transformations. The paper considers a general step-by-step approach to solving the problems of constructing a topological drawing of various types of graphs – the main stages of constructing a topological drawing of a graph are considered, the main definitions and limitations of the proposed mathematical models are introduced. The models are based on discrete optimization methods and the theory of graph vertex rotation. To build a mathematical model, the problem of selecting a flat part of a graph is solved, which is considered as a combinatorial problem of finding a subset of isometric cycles of a graph. The presented method for extracting the flat part of the graph is based on extracting the basis of isometric cycles of the graph by using the modified Gaussian algorithm, followed by extracting the flat part by the gradient descent method. The presented mathematical models and methods make it possible to effectively build a geometric prototype of a topological graph drawing, which is demonstrated by specific examples.

Keywords — graph, topological graph drawing, vertex rotation diagram, isometric cycles.

REFERENCES

- [1] Zykov A.A. Teoriya konechnykh grafov (Theory of Finite Graphs). Novosibirsk: Nauka, 1969. 542 s.
- [2] Harary F. Graph Theory. Addison-Wesley, 1971. 274 p.
- [3] Apanovich Z.V. Ot risovaniya grafov k vizualizacii informacii (From graph drawing towards information visualization) Novosibirsk, RAN, 2007. 24 s.
- [4] Tamassia R. Handbook of Graph Drawing and Visualization. Charman and Hall/CRC, 2013. 844 p.
- [5] Kurapov S.V., Tolok A.V. Construction of a Topological Drawing of the Most Planar Subgraph of the Non-planar Graph // Autom Remote Control. 2018. № 79. С. 793–810.
- [6] Ringel G. Map Color Theorem. Springer, 1974. – 191 p.
- [7] Garey M.R., Johnson D.S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. Freeman, San Francisco, 1979. 338 p.
- [8] Papadimitriou C.H., Steiglitz K. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity. Dover Publications, 1998. 528 p.
- [9] Schaefer M.. Complexity of some geometric and topological problems // LNCS. 2010. V. 5849. P. 334–344.
- [10] Kron G. Diakoptics; the piecewise solution of large-scale systems. London, Macdonald, 1963. 166 p.
- [11] Kavitha T., Liebchen C., Mehlhorn K., Michail D., et al. Cycle bases in graphs – characterization, algorithms, complexity, and applications // Comput. Sci. Rev. 2009. No.3. P. 199–243.
- [12] Kurapov S.V., Davidovsky M.V., Klitsenko A.A. Izometricheskie tsikly grafa (Graph isometric cycles) // Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu: Zbirnik nauk. statej. Fiz.-mat. nauki. Zaporizhzhya: ZNU. 2016. № 1. S. 121–137.
- [13] Luke S. Essentials of Metaheuristics. lulu.com Pub., 2nd Ed., 2013. 242 p.
- [14] Swamy M.T.S., Thulasiraman K.. Graphs, Networks, and Algorithms. J. Wiley & Sons, 1981. 592 p.
- [15] MacLane S. A combinatorial condition for planar graphs // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 22–32.
- [16] Kozin I.V., Kurapov S.V., Polyuga S.I. Evolyutsionno-fragmentarnyj algoritm nahozhdeniya maksimal'nogo planarnogo sugrafa (Evolutionarily-fragmented algorithm for finding a maximal flat part of a graph) // Prikladnaya diskretnaya matematika. 2015. № 3(29). S. 74–82.
- [17] Kurapov S.V., Davidovsky M.V., Tolok A.V. Generating a topological drawing of the flat part of a nonplanar graph // Scientific Visualization. 2020. V. 12, № 1, P. 90–102.
- [18] Rappoport L.I., Morogovskij B.N., Polivcev S.A. Vektornaya algebra peresechenij (Vector algebra of intersections) / V kn.: Mnogoprocessornye vychislitel'nye struktury (Multiprocessor Computing Structures). Taganrog, 1982. Vyp. 2(11). S. 53–56.
- [19] Mutzel P., Odenthal T., Scharbrodt M. The Thickness of Graphs: A Survey // Graphs and Combinatorics. 1998. V. 14. P. 59–73.