УДК 62-50 DOI: 10.31114/2078-7707-2022-4-223-227

Динамические и флуктуационные ошибки одномерного фильтра Калмана

А.Н. Лыгач, И.Н. Давыденко

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, г. Минск,
asya_lygach@mail.ru

***Аннотация* — В статье рассматривается оценка критичности дисперсии ошибок фильтрации фильтра Калмана к изменению коэффициентов фильтрации, которые зависят от шумов маневра и модели маневра. Представлены графики зависимости суммарной ошибки фильтрации от коэффициента фильтрации. Раздельно рассмотрены динамические и флуктуационные ошибки фильтрации.**

***Ключевые слова* — фильтр Калмана, динамические и флуктуационные ошибки.**

I. Введение

Задачи построения следящих систем в радиолокации, радионавигации [1]-[3] и радиосвязи [4] являются востребованными и актуальными в настоящее время.

На примере проблемы повышения безопасности полётов в системе организации воздушного движения, в частности, своевременного обнаружения и предотвращения нарушений правил эшелонирования, рассмотрено оценивание координат и параметров движения воздушных судов по информации на выходе радиолокационных и других источников наблюдения. Ключевым моментом является предъявление жестких требований как к техническим характеристикам средств наблюдения воздушных судов, так и к качеству траекторной обработки [5].

Фильтры Калмана, которые основаны на одной модели возможного движения объекта, не удовлетворяют требованиям. В основном используется модель прямолинейного равномерного движения с возмущениями, однако при маневрировании воздушного судна, например, при посадке или взлете, модель неадекватно описывает реальное движение. Это способствует возникновению больших динамических ошибок, при использовании траекторной обработки. Компенсация возможна за счет увеличении мощности случайного возмущения в самой модели движения, но точность оценивания координат и параметров движения воздушного судна при прямолинейном равномерном движении будет снижена.

Решение проставленной задачи основано на адаптивных методах, при которых учитывается изменение структуры и параметров фильтра траекторной обработки при обнаружении маневра воздушных судов.

В отличие от традиционного подхода к анализу фильтра Калмана в данной работе раздельно рассмотрены динамические и флуктуационные ошибки фильтрации.

II. Выражения для дисперсий флуктуационных и динамических ошибок

Получим раздельные выражения для дисперсий флуктуационных и динамических ошибок, составляющих в сумме дисперсию суммарной ошибки фильтрации:

$$P = P_{\text{дин}} + P_{\text{фл}}.$$

Это позволит оценить критичность дисперсии ошибок фильтрации к изменению коэффициентов фильтрации, в свою очередь зависящих от шумов маневра и модели маневра (случайный маневр или детерминированный маневр в виде полиномиальной модели).

Для этого в одномерном случае уравнение фильтруемого сигнала и уравнение наблюдения запишем в общем виде:

$$x_k = x_{k-1} + \eta_k \ ,$$
$$y_k = x_k + \xi_k \ ,$$

где x_k – фильтруемый сигнал;

η_k – нормальный белый формирующий шум маневра с дисперсией $D_\eta = E\{(\eta_k)^2\}$;

y_k – наблюдаемый сигнал;

ξ_k– нормальный белый шум наблюдения с дисперсией $D_\xi = E\{(\xi_k)^2\}$.

Используем вывод уравнения фильтрации Калмана, приведенный в [6, 8, 9]. Для получения алгоритма рекуррентной фильтрации предположим, что после $k-1$ наблюдения $\{y(1), y(2), \cdots, y(k-1)\}$ известны оценка $\hat{x}(k-1)$ параметра $x(k-1)$ и устой ошибки $P(k-1) = E\left\{\left(\varepsilon(k-1)\right)^2\right\}$, $\varepsilon(k-1) = \hat{x}(k-1) - x(k-1)$.

Будем искать оценку $\hat{x}(k)$ параметра $x(k)$ на следующем шаге итерации в виде линейной комбинации известной оценки и очередного наблюдения $y(k) = x(k) + \xi(k)$ [9]:

$$\hat{x}(k) = \beta(k)\hat{x}(k-1) + \alpha(k)y(k)\,, \qquad (1)$$

где $\beta(k)$ и $\alpha(k)$ – некоторые коэффициенты, зависящие от номера итерации.

Коэффициенты $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ выбираются таким образом, чтобы выполнялись следующие условия [7, 8]:

- получившаяся оценка $\hat{x}(k)$ должна быть несмещенной (ее математическое ожидание равно истинному значению $x(k)$);
- дисперсия ошибки оценивания $\hat{x}(k)$ должна быть минимальной.

Несмещенной оценке $\hat{x}(k)$ соответствует равенство нулю математического ожидания ошибки оценивания:

$$M\{\varepsilon(k)\} = M\{\hat{x}(k) - x(k)\} = 0.$$

Выражение для ошибки $\varepsilon(k)$ может быть получено в следующем виде:

$$\varepsilon(k) = \hat{x}(k) - x(k) = \beta(k)\hat{x}(k-1) + \alpha(k)y(k) - x(k) =$$
$$= \beta(k)\hat{x}(k-1) + \alpha(k)\big(x(k) + \xi(k)\big) - x(k).$$

Учтем, что $\hat{x}(k-1) = x(k-1) + \varepsilon(k-1)$:

$$\varepsilon(k) = \beta(k)\big(x(k-1) + \varepsilon(k-1)\big) + x(k)\big(\alpha(k) - 1\big) + \alpha(k)\xi(k)$$

Учтем уравнение, описывающее полезное сообщение: $x(k) = x(k-1) + \eta(k)$. В этом случае выражение для ошибки изменится следующим образом:

$$\varepsilon(k) = \big(\beta(k) + (\alpha(k) - 1)\big)x(k-1) +$$
$$\beta(k)\varepsilon(k-1) + (\alpha(k) - 1)\eta(k) + \alpha(k)\xi(k).$$

Учитывая, что

$$M\{\varepsilon(k-1)\} = M\{\eta(k)\} = M\{\xi(k)\} = 0,$$

математическое ожидание ошибки оценивания перепишется следующим образом:

$$M\{\varepsilon(k)\} = \big(\beta(k) + (\alpha(k) - 1)\big)x(k-1)\,.$$

Условие исключения математического ожидания ошибки принимает вид:

$$\beta(k) + (\alpha(k) - 1) = 0\,.$$

Следовательно, коэффициенты $\alpha(k)$ и $\beta(k)$ уравнения оптимальной рекуррентной фильтрации связаны между собой уравнением [8]:

$$\beta(k) = \big(1 - \alpha(k)\big)\,,$$

а уравнения оптимальной рекуррентной фильтрации и ошибки фильтрации (1) перепишутся следующим образом:

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_э(k) + \alpha(k)\big(y(k) - \hat{x}_э(k)\big), \qquad (2)$$

где $\hat{x}_э(k) = \hat{x}(k-1)$ – экстраполированное (предсказанное) значение оцениваемого значения;

$$\varepsilon(k) = \big(1 - \alpha(k)\big)\varepsilon(k-1) + \big(\alpha(k) - 1\big)\eta(k) + \alpha(k)\xi(k)\cdot$$

В данном выражении отражены три составляющие ошибки оценивания на k-м шаге. Первое слагаемое $\big(1 - \alpha(k)\big)\varepsilon(k-1)$ учитывает ошибку фильтрации предыдущего шага. Второе определяется величиной $\eta(k)$ изменения параметра $x(k) = x(k-1) + \eta(k)$, то есть динамикой наблюдаемого процесса [9]. Составляющая $\alpha(k)\xi(k)$ ошибки связана с помехой $\xi(k)$, возникающей при наблюдении: $y(k) = x(k) + \xi(k)$. Так как все слагаемые являются независимыми случайными величинами, то дисперсия ошибки фильтрации будет равна сумме

$$D_\varepsilon = M\left\{\big(\varepsilon(k)\big)^2\right\} = \big(1 - \alpha(k)\big)^2 P(k-1) +$$
$$(\alpha(k) - 1)^2 D_\eta(k) + \alpha^2(k) D_\xi(k),$$

где $D_\xi(k) = M\left\{\big(\xi(k)\big)^2\right\}$; $D_\eta(k) = M\left\{\big(\eta(k)\big)^2\right\}$.

Коэффициент $\alpha(k)$ этого уравнения выберем из условия минимума дисперсии ошибки $D_\varepsilon = M\left\{\big(\varepsilon(k)\big)^2\right\}$. Минимальное значение дисперсии ошибки $D_{\varepsilon\min} = D(k)$ находится из уравнения

$$\left.\frac{dD_\varepsilon}{d\alpha(k)}\right|_{\alpha(k)=\alpha_{\text{opt}}(k)} = 0.$$

$$\frac{dD_\varepsilon}{d\alpha(k)} = -2\big(1 - \alpha(k)\big)D(k-1) + 2(\alpha(k) - 1)D_\eta(k) +$$
$$2\alpha(k)D_\xi(k) = 0.$$

В результате решения уравнения можно получить [9]:

$$\alpha(k) = \frac{D_э(k)}{D_э(k) + D_\xi(k)} = \frac{D_\xi^{-1}(k)D_э(k)}{1 + D_\xi^{-1}(k)D_э(k)} = D_\xi^{-1}(k)D(k),$$

где $D_э(k) = D(k-1) + D_\eta(k)$.

В этом случае минимальное значение дисперсии ошибки

$$D_{\varepsilon\min} = D(k) = \frac{D_э(k)}{1 + D_\xi^{-1}(k)D_э(k)} = \frac{D_\xi(k)D_э(k)}{D(k) + D_э(k)}\,.$$

Учитывая, что $\alpha(k) = D_\xi^{-1}(k)D(k)$, можно получить следующее конечное выражение для рекуррентной оптимальной фильтрации после подстановки оптимальных коэффициентов $\alpha(k)$ в уравнение (2):

$$\hat{x}(k) = \hat{x}_э(k) + D(k)D_\xi^{-1}(k)\big(y(k) - \hat{x}_э(k)\big), \qquad (3)$$

$$D_k = \frac{D_{эk}}{1 + D_{\xi k}^{-1}D_{эk}} = \frac{D_{\xi k}D_{эk}}{D_{\xi k} + D_{эk}}, \qquad (4)$$

где $\hat{x}_э(k) = \hat{x}(k-1)$;

$D_э(k) = D(k-1) + D_\eta(k)$.

Эквивалентная структурная схема полученного скалярного фильтра Калмана приведена на рис. 1.

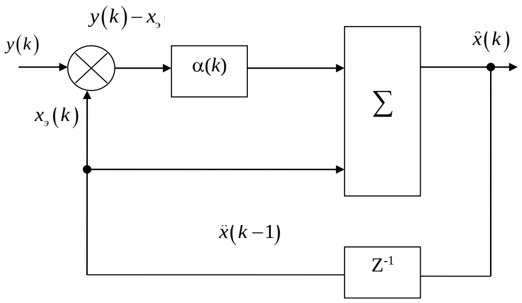

Рис. 1. Структурная схема скалярного фильтра Калмана

В уравнении (3) величина $\hat{x}_э(k)$ является экстраполированной на один шаг оценкой параметра $x(k)$ (прогнозом $x(k)$) на основе наблюдений $\{y(1),\ y(2), \dots, y(k-1)\}$. Действительно, до наблюдения имеется лишь оценка $\hat{x}(k-1)$ и описание $x(k) = x(k-1) + \eta(k)$ одношагового изменения параметра. Поскольку $\{\eta(k)\}$ – последовательность независимых случайных величин, то лучшим прогнозом будет $\hat{x}_э(k) = \hat{x}(k-1)$ [9]. Дисперсия ошибки прогноза в точности равна $D_э(k)$:

$$E\left\{\left(\hat{x}_э(k) - x(k)\right)^2\right\} = D(k-1) + D_\eta(k) = D_э(k).$$

Такой же вывод следует из формулы (4) для дисперсии ошибки оценивания, если положить $D_\xi(k) \to \infty$. В этом случае $D(k) = D_э(k)$, поскольку наблюдение $y(k) = x(k) + \xi(k)$ поражено помехой с бесконечной дисперсией и не приводит к уменьшению дисперсии прогноза $D_э(k)$.

Поскольку установившийся режим часто является основным для фильтра Калмана, рассмотрим этот случай более подробно. В установившемся режиме дисперсия ошибки $D(k)$ приближается к постоянной величине D, которую можно найти из условия:

$$D(k) = D(k-1) = D.$$

Действительно, с учетом этого условия рекуррентное соотношение (4) преобразуется в квадратное уравнение:

$$D\left(D_\xi + D + D_\eta\right) = \left(D + D_\eta\right)D_\xi.$$

Положительное решение из двух решений (мощность не может быть отрицательной) можно записать в виде:

$$D(\infty) = \frac{D_\eta}{2}\left(\sqrt{1 + 4\frac{D_\xi}{D_\eta}} - 1\right). \qquad (5)$$

Полученное выражение (5) для дисперсии ошибки фильтрации в установившемся режиме соответствует только оптимальному коэффициенту фильтрации $k_k = k_{k\mathrm{opt}}$ и не разделяет флуктуационные и динамические ошибки. До оптимизации дисперсия суммарной ошибка фильтрации может быть получена из выражения:

$$D = (1-\alpha)^2 D + (\alpha - 1)^2 D_\eta + \alpha^2 D_\xi$$

или

$$D(1 - (1-\alpha)^2) = (\alpha - 1)^2 D_\eta + \alpha^2 D_\xi.$$

Соответственно, в установившемся режиме при произвольном коэффициенте фильтрации дисперсию ошибки фильтрации можно представить в виде суммы дисперсий динамической и флуктуационной ошибок:

$$D = D_{\text{дин}} + D_{\text{фл}} = \left(\frac{1}{\alpha(2-\alpha)} - 1\right) D_\xi + \frac{\alpha}{2-\alpha} D_\eta,$$

где $D_{\text{дин}} = \left(\frac{1}{\alpha(2-\alpha)} - 1\right) D_\eta$ – дисперсия динамической ошибки фильтрации в установившемся режиме;

$D_{\text{фл}} = \frac{\alpha}{2-\alpha} D_\xi$ – дисперсия флуктуационной ошибки фильтрации в установившемся режиме.

Коэффициент α меняется в диапазоне от 0 до 1.

- $D_{\alpha=1} = D_{\text{фл}} = D_\xi$: из-за больших динамических ошибок экстраполированные значения игнорируются, результирующая оценка совпадает с текущей полученной оценкой ($\hat{x}(k) = y(k)$).
- $D|_{B=0} = D_{\text{дин}} = D_\eta$: из-за большой дисперсии текущих оценок они игнорируются, результирующая оценка совпадает с экстраполированным значением ($\hat{x}(k) = \hat{x}_э(k)$).

Оптимальное установившееся значение коэффициента фильтрации $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ находится исходя из условия:

$$\left.\frac{dD_\varepsilon}{d\alpha(k)}\right|_{\alpha(k)=\alpha_{\text{opt}}(k)} = 0$$

и определяется ранее полученным выражением:

$$\alpha = D_\xi^{-1} D(\infty).$$

Рассмотрим, как изменится выражение для дисперсии ошибки фильтрации в случае детерминированного приращения измеряемого параметра (параметр изменяется с постоянной скоростью). В этом случае уравнение фильтруемого процесса изменится следующим образом:

$$x(k) = x(k-1) + V \cdot T = x(k-1) + \Delta x\,,$$

где $x(k)$ – фильтруемый сигнал;

V – скорость изменения измеряемого параметра $x(k)$;

T – интервал дискретизации;

$\Delta x = V \cdot T$ – приращение измеряемого параметра x_k за интервал дискретизации.

Выражение для ошибки фильтрации получено ранее:

$$\varepsilon(k) = \beta(k)\big(x(k-1) + \varepsilon(k-1)\big) + x(k)(\alpha(k) - 1) + \\ + \alpha(k)\eta(k).$$

Учтем уравнение, описывающее полезное сообщение: $x(k) = x(k-1) + V \cdot T$.

В этом случае выражение для ошибки изменится следующим образом:

$$\varepsilon(k) = \big(\beta(k) + (\alpha(k) - 1)\big)x(k-1) + \beta(k)\varepsilon(k-1) \\ + (\alpha(k) - 1)V \cdot T + \alpha(k)\xi(k).$$

Полагая, что связь коэффициентов $\beta(k)$ и $\alpha(k)$ не изменилась: $\beta(k) = \big(1 - \alpha(k)\big)$, выражение для ошибки фильтрации $\varepsilon(k)$ изменится и примет вид:

$$\varepsilon(k) = \big(1 - \alpha(k)\big)\varepsilon(k-1) + \big(\alpha(k) - 1\big)V \cdot T + \alpha(k)\xi(k).$$

Учитывая, что в установившемся режиме $\varepsilon(k) = \varepsilon(k-1)$, для динамической ошибки можно записать:

$$\varepsilon_{\text{дин}} = (1 - \alpha)\varepsilon_{\text{дин}} + (\alpha - 1)V \cdot T$$

или

$$\varepsilon_{\text{дин}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} V \cdot T.$$

Соответственно, для среднего квадрата ошибки получим:

$$D_{\text{дин}} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 (V \cdot T)^2.$$

Соответственно, в установившемся режиме при произвольном коэффициенте фильтрации дисперсию ошибки фильтрации можно представить в виде суммы дисперсий динамической и флуктуационной ошибок для двух моделей фильтруемого сигнала (случайного и детерминированного):

$$D = D_{\text{дин}} + D_{\text{фл}} = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha}\right)^2 (V \cdot T)^2 + \frac{\alpha^2}{(1 - (1 - \alpha)^2)} D_{\xi}.$$

$$D = D_{\text{дин}} + D_{\text{фл}} = \left(\frac{1}{\alpha(2 - \alpha)} - 1\right) D_{\xi} + \frac{\alpha}{2 - \alpha} D_{\eta}.$$

Графики зависимостей суммарной дисперсии ошибки измерения от коэффициента фильтрации α имеет вид, представленный на рис. 2.

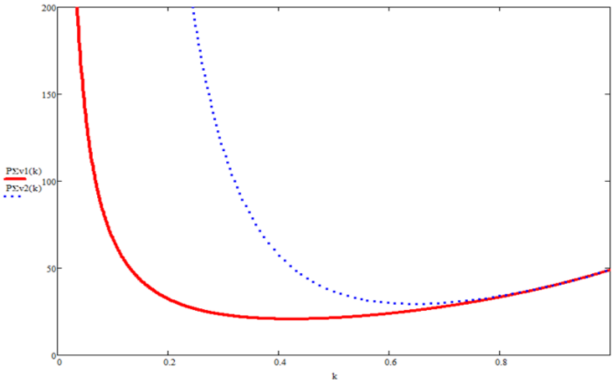

Рис. 2. Графики зависимости дисперсии суммарной ошибки фильтрации от коэффициента фильтрации

III. Заключение

Получены выражения для дисперсий суммарной ошибки фильтрации, которые необходимы при оценке критичности к изменению коэффициентов фильтрации. Представлены графики зависимости дисперсии суммарной ошибки фильтрации от коэффициента фильтрации. Рассмотрены раздельно динамические и флуктуационные ошибки фильтрации.

Литература

[1] Ю.М. Казаринов и др. Радиотехнические системы: учебник для студентов вузов. / Ю.М. Казаринова. М.: Издательский центр «Академия», 2008. 592 с.
[2] Перов, А.И. Статистическая теория радиотехнических систем: учебное пособие для вузов. / А.И. Перов. М.: Радиотехника, 2003. 400 с.
[3] Сосулин, Ю.Г. Теоретические основы радиолокации и радионавигации: учебное пособие/Ю.Г. Сосулин. М.: Радио и связь, 1992. 304 с.
[4] Кловский, Д.Д. Передача дискретных сообщений по радиоканалам/ Д.Д. Кловский. М.: Радио и связь, 1982.
[5] Eurocontrol Standard Document for Radar Surveillance in En-Route Airspace and Major Terminal Areas. SUR.ET1.ST01.1000-STD-01-01, Edition 1.0, March 1997
[6] Васильев К.К. Методы обработки сигналов: Учебное пособие. Ульяновск, 2001. 80 с
[7] Кузьмин С.З. Основы теории цифровой обработки радиолокационной информации. М.:Сов. радио, 1974. 432 с.
[8] Васильев К.К. Оптимальная обработка сигналов в дискретном времени: Учебное пособие. М.: Радиотехника, 2016. 288 с.
[9] Васильев, К. К. Прием сигналов с дискретным временем : учебное пособие / К. К. Васильев. Ульяновск, 2014. 102 с.

Dynamic and Fluctuation Errors of One-Dimensional Kalman Filter

A.N. Lyhach, I.N. Davydzenko

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, asya_lygach@mail.ru

***Abstract* — In this paper, we consider the assessment of the criticality of the variance of filtering errors to a change in the filtering coefficients, which depend on the noise of the maneuver, and to a change in the maneuver model, that is, a deterministic maneuver in the form of a polynomial model. Graphs of the dependence of the total filtration error on the filtration coefficient are presented. Dynamic and fluctuation filtering errors are considered separately.**

***Keywords* — Kalman filter, dynamic and fluctuation errors.**

References

[1] Yu.M. Kazarinov and others. Radio engineering systems: a textbook for university students. / Yu.M. Kazarinov. M.: Publishing Center "Academy", 2008. 592 p.

[2] Perov, A.I. Statistical theory of radio engineering systems: textbook for universities. / A.I. Perov. M.: Radiotehnika, 2003. 400 p.

[3] Sosulin, Yu.G. Theoretical foundations of radar and radio navigation: textbook / Yu.G. Sosulin. Moscow: Radio and communication, 1992. 304 p.

[4] Klovsky, D.D. Transmission of discrete messages over radio channels / D.D. Klovsky. Moscow: Radio and communication, 1982. 304 p.

[5] Eurocontrol Standard Document for Radar Surveillance in En-Route Airspace and Major Terminal Areas. SUR.ET1.ST01.1000-STD-01-01, Edition 1.0, March 1997

[6] Vasiliev K.K. Signal Processing Methods: Study Guide. Ulyanovsk, 2001. 80 p.

[7] Kuzmin S.Z. Fundamentals of the theory of digital processing of radar information. M.: Sov. radio, 1974. 432 p.

[8] Vasiliev K.K. Optimal Signal Processing in Discrete Time: Tutorial. M.: Radiotehnika, 2016. 288 p.

[9] Vasiliev, K. K. Reception of signals with discrete time: a tutorial / K. K. Vasiliev. Ulyanovsk, 2014. 102 p.