

Структурный синтез всепропускающих рекурсивных цифровых фильтров

В.А. Лесников, Т.В. Наумович, А.В. Частиков

Вятский государственный университет, г. Киров, lesnlex@mail.ru

Аннотация — Одним из разделов теории цифровой обработки сигналов является теория построения всепропускающих рекурсивных цифровых фильтров, у которых амплитудно-частотная характеристика постоянна на всех частотах, и которые различаются своими фазо-частотными характеристиками. В данной работе предложено распространить разрабатываемый авторами подход к синтезу рекурсивных ЦФ с конечной длиной слова на все пропускающие ЦФ. Подход основан, что нули и полюсы, а значит и коэффициенты передаточной функции, определяются уже с учетом конечной разрядности. Далее производится генерация структур и параметрический синтез, т.е. расчет коэффициентов выбранной структуры. При этом структурный синтез не искажает нули и полюсы. Данная работа ограничена рассмотрением только этапа структурного синтеза и связанного с ним параметрического синтеза.

Ключевые слова — всепропускающие рекурсивные цифровые фильтры, структурный синтез, конечная длина слова, топологическая матрица, генерация структур.

I. ВВЕДЕНИЕ

К числу важных компонент цифровой обработки сигналов (ЦОС) относятся всепропускающие рекурсивные цифровые фильтры (all-pass IIR digital filters) [1] - [8]. Амплитудно-частотные характеристики таких фильтров постоянны на всех частотах, т. е. избирательность по частоте у них отсутствует. При синтезе таких фильтров задаются требования к фазо-частотной характеристике. Такие цифровые фильтры (ЦФ) применяются как компоненты ЦФ с более сложной структурой с низкой чувствительностью характеристик к точности представления коэффициентов, для построения ЦФ без умножителей (multiplierless digital filters), ЦФ с низким уровнем шумов округления, для построения фазовых корректоров (эквалайзеров), для реализации различных акустических эффектов, для реализации банков вейвлет-фильтров. Предложено несколько структур всепропускающих ЦФ.

Авторы данной работы в цикле своих работ [10]-[16] новый подход к разработке рекурсивных ЦФ с ограниченной длиной слова (finite wordlength). При реализации данного подхода конечная длина слова учитывается уже на функциональном этапе синтеза, т.е. нули и полюсы ЦФ определяются еще до этапа структурного синтеза на основе исследованной

авторами алгебраико-числовой природы нулей и полюсов ЦФ с коэффициентами с конечной разрядностью. Структурная схема ЦФ генерируется с учетом характеристик точности и сложности. При этом, в отличие от традиционного подхода, выполнение структурного и связанного с ним параметрического синтеза не искажают результаты функционального синтеза.

В данной работе предлагается распространить разработанный авторами подход на построение структур всепропускающих ЦФ, характеризующихся определенной взаимосвязью между коэффициентами передаточной функции.

Данная работа построена следующим образом. В разделе I представлены необходимые теоретические сведения о всепропускающих ЦФ. В разделе II описано используемое в разрабатываемом авторами подходе матричное описание структур ЦФ. Раздел III иллюстрирует осуществление предлагаемого метода структурного и параметрического синтеза на примере всепропускающих ЦФ второго порядка со структурой с пятью узлами.

II. ВСЕПРОПУСКАЮЩИЕ РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Свойства всепропускающих фильтров определяются тем, что значения нулей

$$z_{zi} = |z_{zi}| \exp(j\varphi_{zi}) \quad (1)$$

и полюсов

$$z_{pi} = |z_{pi}| \exp(j\varphi_{pi})$$

передаточной функции

$$H(z) = b \frac{\prod_{i=1}^n (z - z_{zi})}{\prod_{i=1}^n (z - z_{pi})} = \frac{\sum_{l=0}^n b_l z^{n-l}}{\sum_{l=0}^n a_l z^{n-l}} \quad (2)$$

взаимозависимы:

$$\forall i: |z_{zi}| = 1/z_{pi}, \varphi_{zi} = \varphi_{pi} \quad (3)$$

На рис. 1 показан пример расположения пары нуль-полюс в z-плоскости. Полюсы, естественно должны обеспечивать устойчивость фильтра и поэтому расположены внутри единичного круга ($|z_{pi}| < 1$), исключая единичную окружность. В этом случае все нули расположены вне единичного круга ($|z_{zi}| > 1$). Таким образом, всепропускающие фильтры являются максимально фазовыми. Описанная связь между

нулями и полюсами определяет связь между коэффициентами числителя и знаменателя передаточной функции:

$$a_l = b_{n-l}. \quad (4)$$

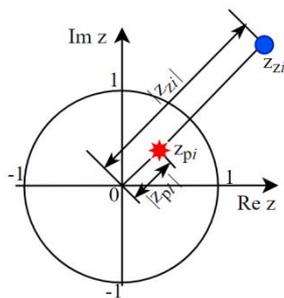


Рис. 1. Взаимное положение нуля z_{zi} и полюса z_{pi} в z -плоскости

III. ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

Однозначное описание структуры цифрового фильтра с N узлами обеспечивается [9] квадратной матрицей $\mathbf{T}(z)$ размерностью $N \times N$, элементы которой t_{ij} являются коэффициентами передачи от узла с номером j к узлу с номером i . Условием физической реализуемости (вычислимости) структурной схемы

является отсутствие замкнутых контуров без элементов задержки (z^{-1}). Этому условию соответствует существование такой нумерации узлов, при которой все элементы t_{ij} , отличные от 0 и z^{-1} , расположены ниже главной диагонали матрицы $\mathbf{T}(z)$. В наших работах, посвященных синтезу ЦФ с конечной длиной слова (в частности [10]-[16]), мы называем эти матрицы топологическими.

Тонкая структура топологической матрицы определяет теоретико-числовую природу нулей и полюсов ЦФ с соответствующей структурой [11], [12]. Было показано, что нули и полюсы ЦФ, коэффициенты которых имеют конечную разрядность, являются элементами множества алгебраических чисел различной степени. Максимально возможная степень равна порядку фильтра n . Конкретные значения степеней алгебраических чисел, являющихся полюсами ЦФ определяются взаимным расположением n квадратных подматриц $\mathbf{T}_i(z)$ матрицы $\mathbf{T}(z)$. Элементы $t_{i,11}$ подматриц $\mathbf{T}_i(z)$ являются элементами $t_{p(i),p(i)}$ главной диагонали матрицы $\mathbf{T}(z)$, где $p(i)$ – номер строки матрицы $\mathbf{T}(z)$, в которой расположен i -й элемент задержки z^{-1} . Размерность квадратных подматриц $\mathbf{T}_i(z)$ равна $d(i)$. Номер столбца матрицы $\mathbf{T}(z)$, в которой расположен i -й элемент задержки z^{-1} , равен $p(i)+d(i)-1$.

$\begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d2p2d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p2d2p3d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & z^{-1} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p3d2p4d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d2p2d3</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p2d2p3d3</p>
$\begin{bmatrix} 0 & z^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d2p2d4</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d3p3d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & z^{-1} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p2d3p4d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d3p2d3</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p2d3p3d3</p>
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d3p3d3</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d3p2d4</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & z^{-1} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d4p4d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{21} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d4p2d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p2d4p3d2</p>
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d4p3d3</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d4p2d4</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{21} & 0 & z^{-1} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d5p2d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d5p3d2</p>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ c_{21} & 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 0 & 0 \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & 0 \end{bmatrix}$ <p>N5z2p1d5p2d3</p>

Рис. 2. Топологические матрицы структур с $N=5$ узлами ЦФ второй степени с комплексными нулями и полюсами

В данной работе мы ограничимся рассмотрением случая $n=2$. В этом случае условием того, чтобы полюсы были комплексными алгебраическими числами второй степени, является наличие у подматриц $T_1(z)$ и $T_2(z)$ общих элементов.

На рис. 2 показаны все возможные топологические матрицы с $N=5$ и $n=2$. Символы красного и синего цветов являются элементами соответственно подматриц $T_1(z)$ и $T_2(z)$. Символы зеленого цвета – общие элементы подматриц. Значения полюсов определяются только элементами, изображенными красным, зеленым и черным цветами. Значения полюсов не зависят от элементов, изображенных пурпурным (magenta) цвета. Нули определяются всеми элементами $T(z)$.

Тонкая структура матрицы $T(z)$ позволяет провести именование структур. Предлагается следующее обозначение для топологической матрицы:

$$N\{N\}z\{n\}p\{p(1)\}d\{d(1)\}\dots\{p(n)\}d\{d(n)\}$$

Здесь вместо фигурных скобок должны быть поставлены конкретные числа.

На рис. 3 показан шаблон, который отображает структуры, обозначаемые кодом N5z2p1d2p2d2. Каждый узел может быть как входным (inp), так и выходным (out). Конкретная структура будет обозначаться следующим образом:

$$N5z2p1d2p2d2i\{inp\}o\{out\}.$$

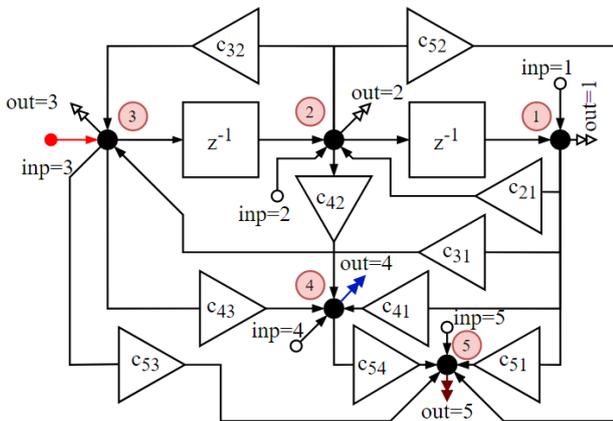


Рис. 3. Шаблон структур N5z2p1d2p2d3

Однако не все получаемые (генерируемые) структуры представляют интерес. В общем случае передаточная функция ЦФ второго порядка равна

$$H(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}. \quad (4)$$

С точностью до постоянного множителя передаточная функция имеет

$$F_H = 2n + 1 \quad (5)$$

степеней свободы (обычно принимают, что $a_0=1$).

Для ЦФ второго порядка $F_H=5$.

Коэффициенты передаточной функции, очевидно, являются некоторыми функциями коэффициентов c_{ij} структуры ЦФ.

Следует отметить, что число степеней свободы структуры равно

$$F_T = N(N-1)/2. \quad (6)$$

Для рассматриваемого случая $F_T=10$. Таким образом, $F_T > F_H$, т.е. число коэффициентов структуры превосходит требуемое число для реализации заданной передаточной функции. Эта избыточность используется в разрабатываемом авторами подходе [15], например, для размена увеличенного числа умножителей на уменьшение разрядности коэффициентов структуры. Впрочем, можно отказаться от избыточности для синтеза новых канонических структур со степенью свободы F_H [16].

IV. СИНТЕЗ ВСЕПРОПУСКАЮЩИХ ЦФ

для $n = 2, N = 5$

Работа любого ЦФ можно описать уравнением

$$y(z) = T(z)y(z) + ix(z), \quad (7)$$

где

$$y(z) = [y_1(z) \ y_2(z) \ \dots \ y_N(z)]^T \quad (8)$$

- вектор-столбец, элементы которого являются z -преобразованиями последовательностей отсчетов, вычисляемых в узлах структуры;

i - вектор столбец, все элементы равны 0, за исключением элемента с номером inp , равного 1;

$x(z)$ - z -преобразование входной последовательности;

t - символ транспонирования.

Решая уравнения (8) относительно $y(z)/x(z)$ для всех номеров входных узлов, получим матрицу всех возможных передаточных функций для всех номеров входных и выходных узлов

$$H(z) = [H_{oi}(z)], \quad (9)$$

где i и o - соответственно номера входного и выходного узлов. Для решения уравнений пользуемся возможностями одной из систем символьной математики MATLAB, Octave, Maple.

Для дальнейшего рассмотрения для нас представляют интерес только те структуры, для которых коэффициенты b_0, b_1, b_2, a_1, a_2 не являются константами (0, 1, -1). Так что, при синтезе структуры всепропускающего ЦФ подходит не любая комбинация номеров входного и выходного узлов. Необходимо выполнить выбор этих номеров. Анализируя полученные решения, отбираем подходящие структуры.

Ниже представлены результаты анализа всех шаблонов, соответствующих топологическим матрицам, представленным на рис. 2. Для всех шаблонов решаем уравнения (6), выбираем подходящие структуры и затем, учитывая, что передаточная функция всепропускающего ЦФ второго порядка имеет вид

$$H(z) = \frac{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}, \quad (10)$$

решаем символьные системы уравнений

$$\begin{cases} b_0 = a_2, \\ b_1 = a_1, \\ b_2 = a_0 \end{cases} \quad (11)$$

относительно коэффициентов c_{ij} соответствующей структуры. Для $n=2$ и $N=5$ решаемая система состоит из $n+1=3$ уравнений и имеет $F_T=10$ неизвестных. Т.е. система уравнений является неопределенной. Решением системы является множество $n+1$ базовых неизвестных, которые зависят от F_T-n-1 свободных неизвестных. Система Maple автоматически производит разбиение неизвестных, тогда как в MATLAB и Octave необходимо задать базовые неизвестные самостоятельно.

A. Структуры N5z2p1d2p2d2

Структурная схема множества ЦФ, описываемых этим шаблоном, показана на рис.3.

Анализ показал, что подходящими являются две структуры, имеющие одинаковый входной узел $\text{inpr}=3$:

N5z2p1d2p2d2i3o4 и N5z2p1d2p2d2i3o5 с выходными узлами 4 и 5 соответственно.

- Структура N5z2p1d2p2d2i3o4.

Передаточная функция равна

$$H_{43} = \frac{c_{43} z^2 + (c_{42} - c_{21} c_{43}) z + c_{41}}{z^2 - (c_{32} + c_{21}) z - c_{31}}. \quad (12)$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} c_{41} = 1, \\ c_{42} - c_{21} c_{43} = -c_{21} - c_{32}, \\ c_{43} = -c_{31}. \end{cases} \quad (13)$$

Выбираем множество базовых неизвестных – $\{c_{41}, c_{42}, c_{43}\}$. Решение системы в системе Octave-online:

$$\begin{cases} c_{41} = 1, \\ c_{42} = -c_{21} - c_{32} - c_{21} c_{31}, \\ c_{43} = -c_{31}. \end{cases} \quad (14)$$

- Структура N5z2p1d2p2d2i3o5.

Передаточная функция:

$$H_{53} = \frac{\left(\begin{aligned} &(c_{53} + c_{43} c_{54}) z^2 + \\ &+ (c_{52} + c_{42} c_{54} - c_{21} c_{53} - c_{21} c_{43} c_{54}) z + \\ &+ (c_{51} + c_{41} c_{54}) \end{aligned} \right)}{z^2 - (c_{32} + c_{21}) z - c_{31}}. \quad (15)$$

Искомое решение:

$$\begin{cases} c_{41} = (1 - c_{51}) / c_{54}, \\ c_{42} = -(c_{21} + c_{32} + c_{21} c_{32} + c_{52}) / c_{54}, \\ c_{43} = -(c_{31} + c_{53}) / c_{54}. \end{cases} \quad (16)$$

B. Структуры N5z2p2d2p3d2

Подходят две структуры.

- Структура N5z2p2d2p3d2i1o2.

Передаточная функция

$$H_{21} = \frac{c_{21} z^2 + (c_{31} - c_{21} c_{43}) z + c_{41}}{z^2 - (c_{32} + c_{43}) z - c_{42}}. \quad (17)$$

Решение:

$$\begin{cases} c_{21} = -c_{42}, \\ c_{31} = -c_{32} - c_{43} - c_{42} c_{43}, \\ c_{41} = 1. \end{cases} \quad (18)$$

- Структура N5z2p2d2p3d2i1o5.

Передаточная функция

$$H_{53}(z) = \frac{\left(\begin{aligned} &(c_{51} + c_{21} c_{52} + c_{31} c_{53} + c_{41} c_{54} + c_{21} c_{32} c_{53} + \\ &+ c_{21} c_{42} c_{54} + c_{31} c_{43} c_{54} + c_{21} c_{32} c_{43} c_{54}) z^2 - \\ &- (c_{31} c_{52} + c_{32} c_{51} - c_{41} c_{53} + c_{43} c_{51} - c_{21} c_{42} c_{53} + \\ &+ c_{21} c_{43} c_{52} - c_{31} c_{42} c_{54} + c_{32} c_{41} c_{54} \\ &+ (c_{41} c_{52} - c_{42} c_{51})) \end{aligned} \right)}{z^2 - (c_{32} + c_{43}) z - c_{42}}. \quad (19)$$

Искомое решение:

$$\begin{cases} c_{21} = \frac{\left(\begin{aligned} &(c_{52} (c_{42} + c_{51}) (c_{42} c_{54} + c_{52}) + \\ &+ c_{52} (c_{43} c_{54} + c_{53}) (c_{32} c_{51} - c_{32} + c_{43} c_{51} - c_{43}) + \\ &+ (c_{42} c_{51} + 1) (c_{54} (c_{42} c_{54} + c_{52}) + \\ &+ (c_{32} c_{54} - c_{53}) (c_{43} c_{54} + c_{53})) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &c_{52} ((c_{42} c_{53} - c_{43} c_{52}) (c_{43} c_{54} + c_{53}) - \\ &- (c_{42} c_{54} + c_{52}) (c_{32} c_{43} c_{54} + c_{32} c_{53} + c_{42} c_{54} + c_{52})) \end{aligned} \right)}, \\ c_{41} = (c_{42} c_{51} + 1) / c_{52}, \\ c_{31} = \frac{\left(\begin{aligned} &-(c_{52} (c_{42} + c_{51}) (c_{42} c_{53} - c_{43} c_{52}) + \\ &+ c_{52} (c_{32} c_{51} - c_{32} + c_{43} c_{51} - c_{43}) * \\ &* (c_{32} c_{43} c_{54} + c_{32} c_{53} + c_{42} c_{54} + c_{52}) + \\ &+ (c_{42} c_{51} + 1) (c_{54} (c_{42} c_{53} - c_{43} c_{52}) + \\ &+ (c_{32} c_{54} - c_{53}) (c_{32} c_{43} c_{54} + c_{32} c_{53} + c_{42} c_{54} + c_{52})) \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &c_{52} ((c_{42} c_{53} - c_{43} c_{52}) (c_{43} c_{54} + c_{53}) - \\ &- (c_{42} c_{54} + c_{52}) (c_{32} c_{43} c_{54} + c_{32} c_{53} + c_{42} c_{54} + c_{52})) \end{aligned} \right)}. \end{cases} \quad (20)$$

Ниже из-за громоздкости решений и ограничений на размер публикации будут приводиться только передаточные функции, которые содержат всю исходную информацию для получения конечного решения.

C. Структуры N5z2p3d2p4d2

Одна подходящая структура - N5z2p3d2p4d2i1o3.

Передаточная функция:

$$H_{31}(z) = \frac{\left((c_{31} + c_{21}c_{32})z^2 + (c_{41} - c_{31}c_{54} + c_{21}c_{42} - c_{21}c_{32}c_{54})z + (c_{51} + c_{21}c_{52}) \right)}{z^2 - (c_{43} + c_{54})z - c_{53}}. \quad (21)$$

D. Структуры N5z2p1d2p2d3

Передаточная функция единственной подходящей структуры N5z2p1d2p2d3i3o5:

$$H_{53}(z) = \frac{\left((-c_{43}c_{54} - c_{53})z^2 + (-c_{43}c_{52} + c_{42}c_{53} + c_{21}c_{53} + c_{21}c_{43}c_{54})z + (c_{41}c_{53} - c_{43}c_{51}) \right)}{z^2 - (c_{21} + c_{42} + c_{32}c_{43}) - (c_{41} + c_{31}c_{43})}. \quad (22)$$

E. Структуры N5z2p2d2p3d3

Передаточные функции двух подходящих структур:

$$H_{21}(z) = \frac{c_{21}z^2 + (c_{31} - c_{21}c_{53} - c_{21}c_{43}c_{54})z + (c_{51} + c_{41}c_{54})}{z^2 - (c_{53} + c_{32} + c_{43}c_{54})z - (c_{52} + c_{42}c_{54})}, \quad (23)$$

$$H_{51}(z) = \frac{\left((-c_{41} - c_{21}c_{42} - c_{31}c_{43} - c_{21}c_{32}c_{43})z^2 + (-c_{31}c_{42} + c_{32}c_{41} + c_{41}c_{53} - c_{43}c_{51})z + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \right)}{z^2 - (c_{53} + c_{32} + c_{43}c_{54})z - (c_{52} + c_{42}c_{54})}. \quad (24)$$

F. Структуры N5z2p1d2p2d4

Одна подходящая структура с передаточной функцией:

$$H_{43}(z) = \frac{\left(-c_{43}z^2 + (-c_{21}c_{43} + c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52})z + (-c_{41}c_{53} + c_{43}c_{51}) \right)}{\left(z^2 - (c_{21} + c_{52} + c_{32}c_{53} + c_{42}c_{54} + c_{32}c_{43}c_{54})z + (c_{51} + c_{31}c_{53} + c_{41}c_{54} + c_{31}c_{43}c_{54}) \right)}. \quad (25)$$

G. Структуры N5z2p1d3p3d2

Передаточные функции двух подходящих структур:

$$H_{52}(z) = \frac{\left((-c_{52} - c_{32}c_{53} - c_{42}c_{54} - c_{32}c_{43}c_{54})z^2 + (c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51} - c_{42}c_{53} + c_{43}c_{52})z + (c_{31}c_{42}c_{54} - c_{32}c_{41}c_{54}) \right)}{z^2 + (c_{31} + c_{43} + c_{21}c_{32})z + (c_{41} + c_{21}c_{42})}, \quad (26)$$

$$H_{54}(z) = \frac{c_{54}z^2 + (c_{53} - c_{31}c_{54} - c_{21}c_{32}c_{54})z + (c_{51} + c_{21}c_{52})}{z^2 + (c_{31} + c_{43} + c_{21}c_{32})z + (c_{41} + c_{21}c_{42})}. \quad (27)$$

H. Структуры N5z2p2d3p4d2

Две подходящие структуры имеют следующие передаточные функции

$$H_{21}(z) = \frac{c_{21}z^2 + (c_{41} - c_{21}c_{54} + c_{31}c_{43})z + (c_{51} + c_{31}c_{53})}{z^2 - (c_{42} + c_{54} + c_{32}c_{43})z - (c_{52} + c_{32}c_{53})}, \quad (28)$$

$$H_{31}(z) = \frac{\left((-c_{31} - c_{21}c_{32})z^2 + (c_{31}c_{42} + c_{31}c_{54} - c_{32}c_{41} + c_{21}c_{32}c_{54})z + (c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51}) \right)}{z^2 - (c_{42} + c_{54} + c_{32}c_{43})z - (c_{52} + c_{32}c_{53})}. \quad (29)$$

I. Структуры N5z2p1d3p2d3

Этот шаблон описывает две подходящие структуры:

$$H_{53}(z) = \frac{\left((c_{53} + c_{43}c_{54})z^2 + (c_{51} + c_{21}c_{52} + c_{41}c_{54} - c_{42}c_{53} + c_{43}c_{52} + c_{21}c_{42}c_{54})z + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \right)}{z^2 - (c_{31} + c_{42} + c_{21}c_{32} + c_{32}c_{43})z + (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}, \quad (30)$$

$$H_{54}(z) = \frac{\left(c_{54}z^2 + (c_{52} - c_{31}c_{54} + c_{32}c_{53} - c_{21}c_{32}c_{54})z + (-c_{31}c_{52} + c_{32}c_{51}) \right)}{z^2 - (c_{31} + c_{42} + c_{21}c_{32} + c_{32}c_{43})z + (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41})}. \quad (31)$$

J. Структуры N5z2p2d3p3d3

Передаточные функции двух структур:

$$H_{21}(z) = \frac{c_{21}z^2 + (c_{41} - c_{21}c_{53} + c_{31}c_{43} - c_{21}c_{43}c_{54})z + (c_{43}c_{51} - c_{41}c_{53})}{z^2 - (c_{42} + c_{53} + c_{32}c_{43} + c_{43}c_{54})z - (c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52})}, \quad (32)$$

$$H_{31}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} (c_{31} + c_{21}c_{32})z^2 + \\ + (c_{51} + c_{21}c_{52} - c_{31}c_{42} + c_{32}c_{41} + c_{41}c_{54} + c_{21}c_{42}c_{54})z + \\ + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \end{array} \right)}{z^2 - (c_{42} + c_{53} + c_{32}c_{43} + c_{43}c_{54})z - (c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52})}. \quad (33)$$

K. Структуры N5z2p1d3p3d3

Подходит одна структура:

$$H_{42}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} (c_{42} + c_{32}c_{43})z^2 + (c_{32}c_{41} - c_{31}c_{42} - c_{42}c_{53} + c_{43}c_{52})z + \\ + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{31} + c_{53} + c_{21}c_{32} + c_{43}c_{54})z - \\ - (c_{51} + c_{21}c_{52} + c_{41}c_{54} + c_{21}c_{42}c_{54}) \end{array} \right)}. \quad (34)$$

L. Структуры N5z2p1d3p2d4

Передаточная функция одной подходящей структуры:

$$H_{43}(z) = \frac{c_{43}z^2 + (c_{41} + c_{21}c_{42} + c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52})z + (-c_{41}c_{52} + c_{42}c_{51})}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{31} + c_{52} + c_{21}c_{32} + c_{32}c_{53} + c_{42}c_{54} + c_{32}c_{43}c_{54})z - \\ - (c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51} + c_{31}c_{42}c_{54} - c_{32}c_{41}c_{54}) \end{array} \right)}. \quad (35)$$

M. Структуры N5z2p1d4p4d2

В этом шаблоне одна структура с передаточной функцией:

$$H_{32}(z) = \frac{c_{32}z^2 + (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41} - c_{32}c_{54})z + (c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51})}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{41} + c_{54} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{43} + c_{21}c_{32}c_{43})z - \\ - (c_{51} + c_{21}c_{52} + c_{31}c_{53} + c_{21}c_{32}c_{53}) \end{array} \right)}. \quad (36)$$

N. Структуры N5z2p1d4p2d2

Две структуры с передаточными функциями:

$$H_{53}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} (-c_{53} - c_{43}c_{54})z^2 + \\ + (-c_{52} + c_{41}c_{53} - c_{42}c_{54} - c_{43}c_{51})z + \\ + (c_{21}c_{42}c_{53} - c_{21}c_{43}c_{52}) \\ + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{32} + c_{41} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{43} + c_{21}c_{32}c_{43})z - \\ - (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) \end{array} \right)}, \quad (37)$$

$$H_{54}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} c_{54}z^2 + (c_{51} + c_{21}c_{52} + c_{31}c_{53} - c_{32}c_{54} + c_{21}c_{32}c_{53})z + \\ + (c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51}) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{32} + c_{41} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{43} + c_{21}c_{32}c_{43})z + \\ + (c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41}) \end{array} \right)}. \quad (38)$$

O. Структуры N5z2p2d4p3d2

Две структуры с передаточными функциями:

$$H_{21}(z) = \frac{c_{21}z^2 + (c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52})z + (c_{41}c_{53} - c_{43}c_{51})}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{43} + c_{52} + c_{32}c_{53} + c_{42}c_{54} + c_{32}c_{43}c_{54})z + \\ + (c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52}) \end{array} \right)}, \quad (39)$$

$$H_{31}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} (-c_{31} - c_{21}c_{32})z^2 + \\ + (-c_{41} - c_{21}c_{42} + c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51})z + \\ + (c_{31}c_{42}c_{54} - c_{32}c_{41}c_{54}) \\ + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{43} + c_{52} + c_{32}c_{53} + c_{42}c_{54} + c_{32}c_{43}c_{54})z - \\ - (c_{42}c_{53} - c_{43}c_{52}) \end{array} \right)}. \quad (40)$$

P. Структуры N5z2p1d4p3d3

Передаточная функция одной подходящей структуры:

$$H_{32}(z) = \frac{c_{32}z^2 + (c_{52} + c_{31}c_{42} - c_{32}c_{41} + c_{42}c_{54})z + (-c_{41}c_{52} + c_{42}c_{51})}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{41} + c_{53} + c_{21}c_{42} + c_{31}c_{43} + c_{43}c_{54} + c_{21}c_{32}c_{43})z - \\ - (-c_{41}c_{53} + c_{43}c_{51} - c_{21}c_{42}c_{53} + c_{21}c_{43}c_{52}) \end{array} \right)}. \quad (41)$$

Q. Структуры N5z2p1d4p2d4

Данный шаблон не описывает ни одной подходящей структуры.

R. Структуры N5z2p1d5p2d2

Передаточная функция одной подходящей структуры:

$$H_{43}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} c_{43}z^2 + (c_{42} + c_{41}c_{53} - c_{43}c_{51} + c_{21}c_{42}c_{53} - c_{21}c_{43}c_{52})z + \\ + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} z^2 - \\ - (c_{32} + c_{51} + c_{21}c_{52} + c_{31}c_{53} + c_{41}c_{54} + \\ + c_{21}c_{32}c_{53} + c_{21}c_{42}c_{54} + c_{31}c_{43}c_{54} + c_{21}c_{32}c_{43}c_{54})z - \\ - (c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51} + c_{31}c_{42}c_{54} - c_{32}c_{41}c_{54}) \end{array} \right)}. \quad (42)$$

S. Структуры N5z2p1d5p3d2

Передаточная функция одной подходящей структуры:

$$H_{32}(z) = \frac{\left(\begin{array}{l} c_{32}z^2 + (c_{42} + c_{31}c_{52} - c_{32}c_{51} + c_{31}c_{42}c_{54} - c_{32}c_{41}c_{54})z + \\ + (c_{41}c_{52} - c_{42}c_{51}) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{l} z^2 - (c_{43} + c_{51} + c_{21}c_{52} + c_{31}c_{53} + c_{41}c_{54} + \\ + c_{21}c_{32}c_{53} + c_{21}c_{42}c_{54} + c_{31}c_{43}c_{54} + c_{21}c_{32}c_{43}c_{54})z - \\ - (c_{41}c_{53} - c_{43}c_{51} + c_{21}c_{42}c_{53} - c_{21}c_{43}c_{52}) \end{array} \right)}. \quad (43)$$

T. Структуры N5z2p1d5p2d3

Данный шаблон не описывает ни одной подходящей структуры.

V. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа посвящена распространению разрабатываемого авторами подхода к синтезу рекурсивных ЦФ с конечной разрядностью коэффициентов, при котором выполнение структурного этапа синтеза не искажает результаты расчета нулей и полюсов уже учитывающего конечную длину слова, на построение всепропускающих фильтров. Работа ограничена только рассмотрением генерации структур, математической моделью которых являются так называемые топологические матрицы – матрицы коэффициентов передачи между узлами структурной схемы. Примеры синтеза приведены только для всепропускающих ЦФ второго порядка и только для структур с пятью узлами. Но подход просто распространяется на всепропускающие ЦФ произвольного порядка и на произвольное число узлов.

В дальнейшем предполагается провести исследования в области учета конечной длины слова на этапе расчета нулей и полюсов, в области сравнения и выбора структур после их генерации, уменьшения доли ручной работы при параметрическом синтезе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Regalia P.A., Mitra S.K., Vaidyanathan P.P. The digital allpass filter: A versatile signal processing building block // Proceedings of IEEE. 1988. Vol. 76. № 1. P. 19-37.
[2] Ikehara M., Tanaka H., Kuroda H. Design of IIR digital filters using all-pass networks // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. 1994. Vol. 41. № 3. P. 231-235.
[3] Lang M. Allpass filter design and applications // IEEE Transactions on Signal Processing. 1998. Vol. 46. № 9. P. 2505-2514.
[4] Harris F.J. A most efficient digital filter: The two-path recursive all-pass filter // Streamlining Digital Signal Processing: A Tricks of the Trade Guidebook. / Ed. R.G. Lyons. Wiley-IEEE Press. 2nd edition. 2012. 496 pp.
[5] Zhang L., Lai X., Qiao H. Design of allpass IIR digital filters using a minimax frequency response error method //

Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. 2014. P. 7328-7332.
[6] Zhang X. Wavelet filter banks using allpass filters // Wavelet Theory / Ed. S. Mohammady. Intechopen, 2021. 398 pp.
[7] Wang Y., Velazquez S.R. Dyadic allpass notch filter architecture and design // 2021 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS). San Diego, CA, USA, 2021. P. 83-86.
[8] Appaiah K., Pal D. All-Pass Filter Design Using Blaschke Interpolation", IEEE Signal Processing Letters, vol.27, pp.226-230, 2020.
[9] Crochier R. E., Oppenheim A. V. The analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. Vol. 63. № 4. P. 581 – 595.
[10] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Новый подход к проектированию рекурсивных цифровых фильтров // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем - 2010. Сборник трудов / под общ. ред. академика А.Л.Стемпковского. М.:ИППМ РАН, 2010. С. 466-471.
[11] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Синтез рекурсивных цифровых фильтров с конечной длиной слова: проблемы и их решения // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем. 2018. Выпуск 4. С. 89-97. doi:10.31114/2078-7707-2018-4-89-97.
[12] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Synthesis of recursive digital filters with finite word length: Problems and their solutions // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2019. № 3. С. 46-53.
[13] Лесников В.А., Наумович Т.В., Частиков А.В. Структурная точность цифровых фильтров и структура коэффициентов знаменателя передаточной функции // Проблемы разработки перспективных микро- и нанoeлектронных систем (МЭС). 2020. Выпуск 4. С. 217-224. doi:10.31114/2078-7707-2020-4-217-224
[14] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Classification of structures of IIR digital filters // 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2015). Batumi, Georgia, 2015.
[15] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The use of redundancy in the structural synthesis of IIR digital filters // 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2016). Yerevan, Armenia, 2016.
[16] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // 9th East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2011). Sevastopol, Ukraine, 2011.

Structural Synthesis of Allpass IIR Digital Filters

V.A. Lesnikov, T.V. Naumovich, A.V. Naumovich

Vyatka State University, Kirov, lesnlex@mail.ru

Abstract — One of the important domains of digital signal processing is the development of IIR allpass digital filters that differ in phase response, and the magnitude response of which is constant at all frequencies. This paper is devoted to the extension of the new approach developed by the authors to the synthesis of IIR digital filters with a finite word length to allpass filters. This approach is based on the fact that the finite wordlength is taken into account even before structural

synthesis at the stage of calculating zeros and poles. The calculated values of zeros and poles are final. The next stage of structural synthesis does not distort these values. At the stage of structural synthesis, structures are generated. To describe the structure, a matrix of transmission coefficients between nodes is used, which is called a topological matrix in the paper. For a fixed number of nodes, topological matrices are generated. For filters described by these matrices,

transfer function formulas are calculated. The coefficients of these transfer functions are functions of the coefficients of the structure. For calculations, the possibilities of symbolic computations of computer algebra systems MATLAB, Octave or Maple are used. The numerator coefficients of the transfer function of such filters are related in a certain way to the denominator coefficients. These relations are used to form an indefinite system of symbolic equations. The solution of these equations allows one to obtain relations that describe the relationship between the elements of the topological matrix, which are the coefficients of the allpass filter.

Keywords — all-pass IIR digital filters, structural synthesis, finite wordlength, topological matrix, generation of structures.

REFERENCES

- [1] Regalia P.A., Mitra S.K., Vaidyanathan P.P. The digital allpass filter: A versatile signal processing building block // Proceedings of IEEE. 1988. Vol. 76. № 1. P. 19-37.
- [2] Ikehara M., Tanaka H., Kuroda H. Design of IIR digital filters using all-pass networks // IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing. 1994. Vol. 41. № 3. P. 231-235.
- [3] Lang M. Allpass filter design and applications // IEEE Transactions on Signal Processing. 1998. Vol. 46. № 9. P. 2505-2514.
- [4] Harris F.J. A most efficient digital filter: The two-path recursive all-pass filter // Streamlining Digital Signal Processing: A Tricks of the Trade Guidebook. / Ed. R.G. Lyons. Wiley-IEEE Press. 2nd edition. 2012. 496 pp.
- [5] Zhang L., Lai X., Qiao H. Design of allpass IIR digital filters using a minimax frequency response error method // Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference. 2014. P. 7328-7332.
- [6] Zhang X. Wavelet filter banks using allpass filters // Wavelet Theory / Ed. S. Mohammady. Intechopen, 2021. 398 pp.
- [7] Wang Y., Velazquez S.R. Dyadic allpass notch filter architecture and design // 2021 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS). San Diego, CA, USA, 2021. P. 83-86.
- [8] Appaiah K., Pal D. All-Pass Filter Design Using Blaschke Interpolation", IEEE Signal Processing Letters, vol.27, pp.226-230, 2020.
- [9] Crochier R. E., Oppenheim A. V. The analysis of linear digital circuits // Proceedings of IEEE. 1975. Vol. 63. № 4. P. 581 – 595.
- [10] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. A New Approach in Design of IIR Digital Filters // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2010. Proceedings / edited by A. Stempkovsky, Moscow, IPPM RAS, 2010. P. 466-471.
- [11] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. Synthesis of Recursive Digital Filters with Finite Word Length: Problems and Their Solutions // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2018. Issue 4. P. 89-97. doi:10.31114/2078-7707-2018-4-89-97
- [12] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Synthesis of recursive digital filters with finite word length: Problems and their solutions // Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanoelektronnyh sistem (MES). 2019. № 3. C. 46-53.
- [13] Lesnikov V.A., Naumovich T.V., Chastikov A.V. The structural precision of digital filters and the structure of the coefficients of the transfer function denominator // Problems of Perspective Micro- and Nanoelectronic Systems Development - 2020. Issue 4. P. 217-224. doi:10.31114/2078-7707-2020-4-217-224
- [14] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. Classification of structures of IIR digital filters // 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2015). Batumi, Georgia, 2015.
- [15] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A. The use of redundancy in the structural synthesis of IIR digital filters // 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2016). Yerevan, Armenia, 2016.
- [16] Lesnikov V., Naumovich T., Chastikov A., Armishev S. A generation of canonical forms for design of IIR digital filters // 9th East-West Design & Test Symposium (EWDTS 2011). Sevastopol, Ukraine, 2011.